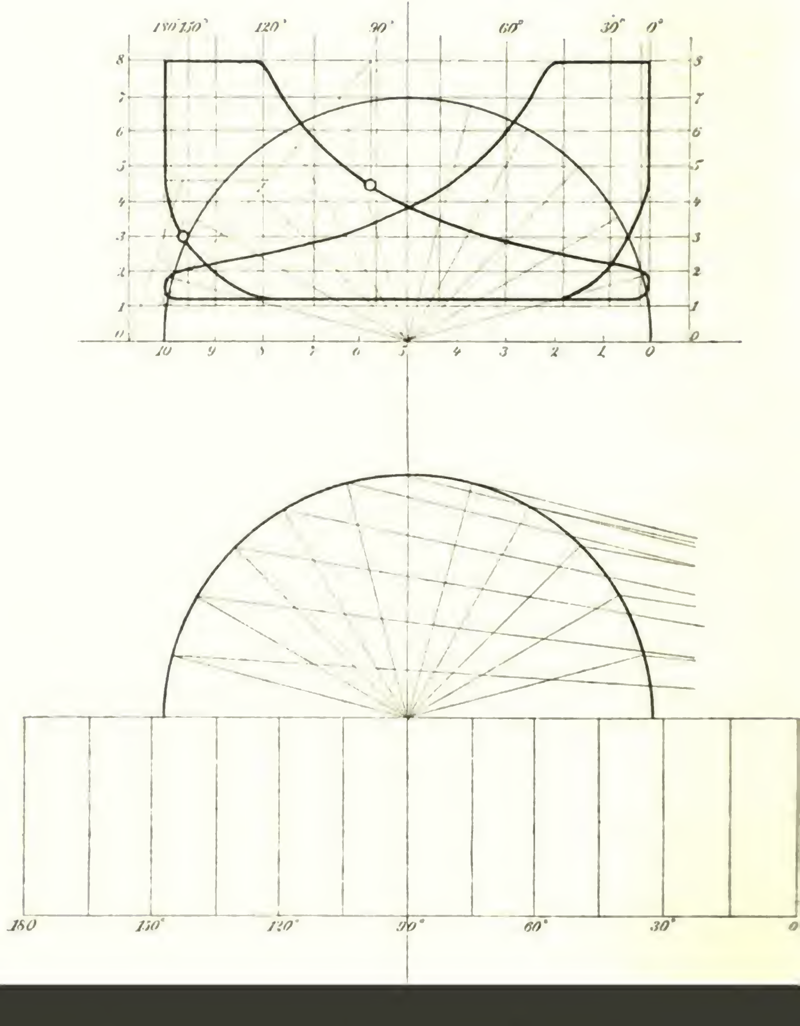


Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Achter Band.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899,
die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge,

sowie:

Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

Bericht von Arthur Schoenflies in Königsberg i. Pr.

Mit 8 Figuren im Text.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Hauck in Berlin. und **A. Gutzmer** in Jena.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1900.

Inhalt.

Erstes Heft.

I. Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Die auf der Versammlung zu München gehaltenen Vorträge.

Zweites Heft.

Berichtigung.

Im Jahresbericht VIII, Heft 1, S. 49, Z. 23 v. o. muſs es heiſsen „Enkelin“ statt „Tochter“.

DIE ENTWICKELUNG DER LEHRE VON DEN

PUNKTMANNIGFALTIGKEITEN.

BERICHT,

ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

ARTHUR SCHOENFLIES,

O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT IN KÖNIGSBERG I. PR.

Vorwort.

Von dem Bericht über „Curven und Punktmannigfaltigkeiten", mit dessen Erstattung mich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung betraut hat, übergebe ich hiermit den ersten gröfseren Teil der Öffentlichkeit.

Als ich vor einigen Jahren mich bereitwilligst entschlofs, der an mich ergangenen Aufforderung nachzukommen, vermutete ich nicht, dafs ich mich heute meiner Verpflichtung nur teilweise entledigen würde. Aber äufsere und innere Umstände tragen hieran zu gleichen Teilen die Schuld. Um nur von den inneren zu sprechen, so handelt es sich um einen Wissenszweig, der noch im Werden begriffen ist, und dem gegenüber ich doch wieder den natürlichen Wunsch empfand, ein wenigstens teilweise abgeschlossenes Bild zu liefern. Dazu kommt, dafs die Einflufssphäre der Mengenlehre täglich wächst, und dafs gerade die letzte Zeitspanne wichtige Arbeiten geliefert hat, die zu berücksichtigen waren und sogar zwangen, einzelne Teile umzuformen. Dies hat sélbst während des Druckes noch an einzelnen Stellen geschehen müssen, wodurch allerdings die Rundung der Disposition teilweise gelitten haben mag.

Der Bericht hat in seinen beiden ersten Abschnitten mehr die Form eines Lehrbuches angenommen. Aber da es sich hier um ein jedenfalls in seinen Einzelheiten noch wenig gekanntes Gebiet handelt, so durfte ich nur auf diese Weise hoffen, mich in den Teilen, die die Anwendungen enthalten, knapper und doch verständlich fassen zu können. Was die Darstellung betrifft, so darf ich die Beweismethoden, wie auch die genetische Entwickelung, die ich dem Bericht gegeben habe, vielfach als eigene Arbeit erklären. Hoffentlich läfst sie hervortreten, dafs hier wie auch sonst, einige wenige charakteristische Begriffe und Sätze vorhanden sind, die für die verschiedensten Probleme in gleicher Weise die Grundlage der Schlüsse bilden. Auch von den Resultaten darf ich einige als mein Eigentum beanspruchen.

Zur Orientirung über die dem Bericht eigentümlichen mengentheoretischen Begriffe habe ich ein Sachregister angefügt.

Das Interesse, dessen sich die Mengentheorie in den letzten Jahren erfreuen konnte, hat sich ständig gesteigert. Wenn es mir gelungen sein sollte nachzuweisen, dafs dieses Interesse ein wohlverdientes ist, und dafs diese in ihren ersten Anfängen scheinbar so controverse Disciplin ebenso fundamentale und notwendige, wie auch weittragende Methoden besitzt, so würde dieser Bericht dem Zweck, den ich ihm wünsche, entsprechen.

Allen den Herren, die mich beim Lesen der Correctur freundlichst unterstützt haben, besonders Herrn Privatdocenten Dr. J. Sommer in Göttingen, sage ich auch an dieser Stelle vielen Dank. Mein Dank gebührt auch der Verlagsbuchhandlung, die es ermöglicht hat, den Bericht trotz der zahlreichen Correcturen, die vielfach nötig waren, rechtzeitig erscheinen zu lassen.

Königsberg i./Pr., im September 1900.

A. Schoenflies.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Litteraturbemerkung.

Die nachstehenden Werke sind im Bericht abkürzend citirt worden.

B. Bolzano, Paradoxieen des Unendlichen, herausgegeben von F. Přihonsky. Leipzig, 1851.

É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898.

G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.

R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig, 1887 u. 1893.

U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Gröfse, übersetzt von J. Lüroth und A. Schepp. Leipzig, 1892.

A. Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig, 1881.

C. Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique. Paris, 1893—1896.

O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Leipzig, 1893—1899.

J. Thomae, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Halle, 1875.

J. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen (2. Aufl.). Halle, 1898.

Endlich erwähne ich, dafs G. Cantor's „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" auch in Math. Ann. 21, S. 453 erschienen und meist in dieser Weise citirt sind. Ebenso ist das Hankel'sche Universitätsprogramm: „Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen" (Freiburg, 1870) mit dem Hinweis auf Math. Ann. 20, S. 63 citirt, wo sich ein Abdruck davon befindet.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Achter Band. Erstes Heft.

Enthaltend

I. Die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899:

II. Die auf der Versammlung zu München gehaltenen Vorträge:

das Verzeichnis derselben siehe zweite Umschlagseite.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Hauck in Berlin und **A. Gutzmer** in Jena.

BG

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1900.

Ausgegeben am 6. April 1900.

Die auf der Versammlung zu München gehaltenen Vorträge:

Chronik

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Bericht über die Jahresversammlung zu München

am 17. bis 23. September 1899.

Der Einladung des Vorstandes zur Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, welche in Gemeinschaft mit der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in den Tagen vom 17. bis 23. September zu München stattfand, waren trotz der umfangreichen Verkehrsstörungen durch das Hochwasser, von welchem die schöne Hauptstadt Bayerns ganz besonders schwer heimgesucht worden war, gegen 80 Fachgenossen gefolgt, darunter mehrere Mitglieder und Gäste des Auslandes. In seiner Begrüfsungsansprache hob der einführende Senior der deutschen Mathematiker, Herr Bauer, in kurzem Rückblick auf die reiche Entwicklung der mathematischen Wissenschaften während des zur Rüste gehenden Jahrhunderts hervor, wie im Anfange des letzteren die Geometrie und die Anwendungen der Mathematik im Vordergrunde standen, wie dann um die Mitte die abstracte Seite und die mehr philosophischen Theorien zur Blüte gelangten, während das Interesse sich nun wieder in ungewöhnlich starkem Grade den Anwendungen der Mathematik zuwende.

Hieran knüpfte sich eine Begrüfsung der Mitglieder durch den derzeitigen Vorsitzenden der Vereinigung, Herrn Noether. Dieser erinnerte daran, dafs die Vereinigung bei der diesjährigen Versammlung ein zehnjähriges Jubiläum feiern könne, nämlich das des Gedankens ihrer Gründung, der von Herrn Georg Cantor auf der Heidelberger Naturforscherversammlung ausgesprochen wurde und durch das Rundschreiben der 20 Teilnehmer jener Versammlung weite Verbreitung und lebhaften Anklang fand; die aufsteigende Entwicklung der Vereinigung und das wachsende Interesse an ihren Plänen und Unternehmungen sind der beste Beweis für die Lebensfähigkeit jenes Gedankens. Besonders wies der Vorsitzende auf die Bedeutung der Referate für die Herstellung von Beziehungen zwischen den verschiedenen Wissensgebieten der Mathematik hin.

Für die Münchener Versammlung hatte der Vorstand frühzeitig Schritte gethan, um das wissenschaftliche Programm zu einem bedeutungsvollen zu gestalten. Zwar sind nicht alle Pläne, die ins Auge gefafst waren, zur Verwirklichung gelangt, auch traten im

letzten Augenblick noch gröfsere Änderungen ein, aber es verblieb doch eine solche Fülle von Referaten und Vorträgen, dafs nur durch genaueste Zeiteinteilung die wissenschaftliche Tagesordnung erledigt werden konnte.

Trotzdem kam auch der gesellige Teil, der die Mitglieder persönlich einander näher zu führen geeignet war, nicht zu kurz, Dank insbesondere der ausgezeichnetsten Gastfreundschaft der Münchener Fachcollegen.

Es sei hier zunächst zusammengestellt die

Liste der gehaltenen Vorträge und Referate.

I. Referate und gröfsere Vorträge:

1. F. Engel (Leipzig): Nachruf auf Sophus Lie.
2. K. Hensel (Berlin): Über die analytisch-arithmetische Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen.
3. K. Heun (Berlin): Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik.
4. E. Study (Greifswald): Die Geometrie der Dynamen.
5. Bericht und Discussion über die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen: R. Mehmke (Stuttgart), J. Bauschinger (Berlin) und A. Schülke (Osterode).
6. Über die Ordnung des mathematischen Universitätsunterrichts auf Grund der neuen preufsischen Prüfungsordnung. Referat und Correferat von H. Weber (Strafsburg) und G. Hauck (Berlin).

II. Kleinere Vorträge:

7. A. v. Brill (Tübingen): Über ein Beispiel des Herrn Boltzmann zu der Mechanik von Hertz.
8. K. Döhlemann (München): Über hyperboloidische Gerade.
9. F. Engel (Leipzig): Über zwei merkwürdige Gruppen des Raumes von fünf Dimensionen.
10. P. Gordan (Erlangen): Über die symmetrischen Functionen.
11. Derselbe: Über homogene Functionen.
12. D. Hilbert (Göttingen): Über den Zahlbegriff.
13. Derselbe: Über das Dirichlet'sche Princip.
14. J. Horn (Charlottenburg): Divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen.
15. M. Lerch (Freiburg-Schweiz): Arithmetisches über unendliche Reihen.
16. M. Noether (Erlangen): Über Riemann's Vorlesungen von 1861/62 über Abel'sche Functionen.
17. E. Schimpf (Bochum): Einführung eines Mafses der Convergenz in die Lehre von der Convergenz der unendlichen Processe.
18. A. Schoenflies (Königsberg i. Pr.): Über einen Satz der Mengenlehre.
19. J. Sommer (Göttingen): Über Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen.
20. A. Sommerfeld (Clausthal): Bemerkungen zur Variationsrechnung.
21. E. v. Weber (München): Eine fundamentale Classification der Differentialprobleme.
22. K. Zindler (Wien): Über Complexcurven und ein Theorem von Lie.

Die Vorträge wurden teils in Fachsitzungen, teils in gemeinschaftlichen Sitzungen mit den Abteilungen für Ingenieurwesen und für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht gehalten. Ein Teil der Vorträge gelangt ausführlich zur Wiedergabe, während über die anderen die der Redactionscommission zugesandten kurzen Mitteilungen in diesem Jahresbericht veröffentlicht werden.

In der zweiten allgemeinen Sitzung der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte am 22. September hielt ferner Herr L. Boltzmann einen Vortrag: „Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit", der mit Rücksicht auf das grofse Interesse dieses Gegenstandes in dem gegenwärtigen Jahresbericht vollständig zum Abdruck gelangt.

Zu einzelnen Teilen des Programmes möge noch folgendes bemerkt werden:

Auf der Düsseldorfer Versammlung im vorigen Jahre war die Tafelcommission mit einer Prüfung der Frage der Decimalteilung der Winkelgröfsen betraut worden (Jahresbericht VII, S. 6), und es war die Hinzuziehung von Fachmännern der verschiedenen, bei der Frage der Winkelteilung interessirten Gebiete vorbehalten worden. Inzwischen war nun dem Vorstande zur Kenntnis gekommen, dafs die französische Regierung beabsichtige, im Jahre 1900 einen internationalen Congrefs nach Paris zu berufen, der über die Decimalteilung nicht nur der Winkelgröfsen sondern auch der Zeitgröfsen beraten und beschliefsen solle. Es wurde deshalb auch die Frage der Decimalteilung der Zeit in die Betrachtung einbezogen. Die Tafelcommission, welche Herrn A. Börsch für diese Frage cooptirt hatte, und namens deren Herr R. Mehmke einen Bericht erstattete, der mit den litterarischen Belegen und mit Anmerkungen in dem vorliegenden Jahresbericht veröffentlicht wird, erörterte die Winkelteilung hauptsächlich vom mathematischen und geodätischen Standpunkt aus. Um aber die in erster Linie interessirte Astronomie und Nautik zu Wort kommen zu lassen, hat der Vorstand Herrn J. Bauschinger um Darlegung seines Standpunktes ersucht; der letztere ist in einem Gutachten dargelegt worden, das infolge Behinderung des Herrn Bauschinger von dem Schriftführer der Vereinigung verlesen wurde. Hierzu kam dann noch ein Vortrag des Herrn Schülke, in welchem die Stellungnahme der Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht zu der behandelten Frage Ausdruck fand.

Diese Vorträge waren, um der sich anschliefsenden Discussion die breiteste Unterlage zu geben, in die gemeinschaftliche Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe verlegt worden, und es wurde, nachdem in der Debatte berufene Vertreter der hauptsächlich

in Betracht kommenden Gebiete ihrer Ansicht über die Decimalteilung Ausdruck gegeben hatten, auf Antrag des Herrn F. Klein einstimmig beschlossen, dafs der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über die Discussion einen Bericht verfassen und ihn dem Herrn Reichskanzler unterbreiten möge, mit dem Ersuchen, den geplanten internationalen Congrefs zu Paris durch Sachverständige zu beschicken, die sich über die Frage der Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen im Sinne des Berichtes nach den verschiedenen Gebieten zu informiren haben. Diesem Beschlufs gemäfs hat der Schriftführer der Vereinigung einen Bericht über die stattgehabte Discussion zusammengestellt, der inzwischen durch den Vorsitzenden und den Schriftführer im Namen des Vorstandes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung bezw. der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte an den Herrn Reichskanzler befördert worden ist.

Durch die neue preufsische Prüfungsordnung für das höhere Lehramt (vom 12. September 1898) hat das Prüfungsgebiet der Mathematik eine erhebliche Erweiterung erfahren und der Hochschulunterricht in derselben an Bedeutung gewonnen. Angesichts der ganz neuen Sachlage, die durch Einführung der Facultas in angewandter Mathematik gegeben ist, für welche an den meisten Universitäten weder in Betreff der Lehrkräfte noch der Lehrmittel Vorsorge getroffen ist, hat der Vorstand es für seine Pflicht erachtet, die Ordnung des mathematischen Hochschulunterrichts auf Grund der neuen preufsischen Prüfungsordnung auf das Programm her diesjährigen Versammlung zu stellen. In dankenswerter Weise datten die Herren H. Weber und G. Hauck das Referat bezw. Correferat über diesen Gegenstand übernommen, der bei der Versammlung das lebhafteste Interesse fand. An diese Referate schlossen sich zunächst die Vorträge der Herren Rudel: „Die neue bayrische Prüfungsordnung für das Lehramtsexamen der Lehrer für Mathematik und Physik“ und Schotten: „Stellungnahme des Gymnasialunterrichts gegenüber der Neuordnung der Lehramtsprüfung in Preufsen“, welche von Seiten der Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in die gemeinsame Sitzung verlegt worden waren. Laut Versammlungsbeschlufs beschränkte sich die Discussion auf die Darlegungen der Herren Weber und Hauck, von denen der erstere die allgemeinen Gesichtspunkte hervorhob und zu fünf Leitsätzen zusammenfafste, während der letztere mehr auf die einzelnen Zweige der angewandten Mathematik einging. Die Discussion ergab eine erfreuliche Übereinstimmung mit den Thesen des Herrn Weber, doch wurde davon abgesehen, Beschlüsse zu fassen und eventuelle Anträge an die Regierungen zu stellen. Es soll zunächst abgewartet werden, wie sich der Unterrichts-

betrieb besonders in der angewandten Mathematik an den einzelnen Universitäten weiter entwickeln wird, wobei in Aussicht genommen wurde, etwa in zwei Jahren einen Bericht über die inzwischen getroffenen Einrichtungen erstatten zu lassen. Von der Discussion enthält der gegenwärtige Jahresbericht die Bemerkungen der Herren F. Klein, A. Krazer und E. Study, die ein allgemeineres Interesse darbieten.

Auf Veranlassung des Herrn L. Boltzmann war auf der Versammlung zu Düsseldorf eine Commission, bestehend aus den Herren L. Boltzmann, M. Planck und E. Wiedemann gewählt worden, die unter Mitwirkung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung eine Vereinbarung über die neuere Terminologie der mathematischen Physik herbeiführen sollte. Inzwischen hat Herr Boltzmann nach dieser Richtung einige Vorschläge gemacht, doch hat sich herausgestellt, daſs die Frage der Ordnung der Terminologie nur auf breitester Grundlage erörtert werden kann. Deshalb ist zunächst Herr E. Lampe ersucht worden, in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft den Gegenstand zur Sprache zu bringen und anzubahnen, daſs die wichtige Angelegenheit unter Mitwirkung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung — wenn möglich — einer Regelung entgegengeführt werde.

Von gröſseren Referaten, die bereits früher in Aussicht genommen worden sind, bleiben zu erwarten: ein Bericht über die allgemeine Dynamik von Herrn P. Stäckel, ein Referat von Herrn R. Hauſsner über numerische Auflösung von Gleichungen, der Abschluſs des Referates über die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Teil I von Herrn E. Kötter (Jahresbericht V), sowie die Fortsetzung dieses Referates. Den übernommenen Bericht über die Theorie der endlichen Gruppen hofft Herr E. Steinitz der nächsten Jahresversammlung vorlegen zu können. Das ursprünglich für die Münchener Versammlung geplante Referat über die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Bauconstructionen gedenkt Herr Müller-Breslau im nächsten Jahre zu erstatten. Die Referate der Herren Schoenflies über Curven- und Punktmannigfaltigkeiten, und Heun über die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik werden, so weit sich bis jetzt übersehen läſst, noch in dem gegenwärtigen Jahresbericht zur Veröffentlichung gelangen.

Zu diesen Referaten tritt sodann ein Bericht über die Variationsrechnung, den Herr Kneser erstatten wird. Voraussichtlich wird dieser Bericht bereits der nächsten Jahresversammlung vorgelegt werden können.

Ferner wird Herr L. Schlesinger im Vereine mit Herrn Richard Fuchs einen Bericht über die Entwicklung der Theorie

der linearen Differentialgleichungen verfassen, der voraussichtlich 1901 der Vereinigung vorgelegt werden kann.

Seit längerer Zeit hat der Vorstand Schritte gethan, um eine Gruppe zusammenhängender Referate über die Forschungsgebiete und wesentlichen Entdeckungen von Sophus Lie zu erhalten. Nachdem die Herren G. Scheffers, F. Schur und G. Kowalewski, dem Herr F. Engel seine Unterstützung zugesichert hat, ihre Mitwirkung bereits zugesagt haben, ist begründete Aussicht vorhanden, dafs diese Referate im Jahre 1901 erstattet werden.

Erwähnung mag hier ferner finden, dafs in der Versammlung der Wunsch hervortrat, über die mathematische Seite der internationalen mitteleuropäischen Gradmessung einen zusammenhängenden Bericht zu erhalten.

Herr Mehmke wird bei der nächsten Versammlung einen Bericht über graphisches Rechnen zunächst mündlich erstatten, hat sich aber vorbehalten, statt dessen der Vereinigung eventuell einen Bericht über Rechenmaschinen und -Apparate auf der Pariser Ausstellung anzubieten. Gleichzeitig regte Herr Mehmke an, dafs auch Berichte über die ausgestellten mathematischen Modelle u. dgl. ins Auge gefafst würden, ähnlich den Berichten von Bruns und W. Stahl über die wissenschaftliche Ausstellung in London 1876. Der Vorstand wird diese dankenswerten Anregungen im Auge behalten.

Hinsichtlich des im Jahre 1900 zu Paris stattfindenden II. internationalen Mathematiker-Congresses wurde beschlossen, dafs die Deutsche Mathematiker-Vereinigung durch ihren Vorsitzenden vertreten werde. In Übereinstimmung mit früheren Beschlüssen und Äufserungen wurde auch daran festgehalten, dafs die Vereinigung den dritten internationalen Congrefs nach Deutschland einladen solle; über Zeit und Ort dieses Congresses wurden jedoch keine bindenden Beschlüsse gefafst, sondern es wurde dem Vorstande überlassen, über diese Punkte unter Berücksichtigung der in der Jahresversammlung hervorgetretenen Ansichten und Wünsche und der obwaltenden Verhältnisse selbständig zu entscheiden.

Über die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, die den Mitgliedern durch Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung zu einem Vorzugspreise zugänglich ist, äufserte sich Herr H. Burkhardt; er legte hauptsächlich den Stand der Drucklegung der ersten drei Bände dar.

Es mag hier noch hinzugefügt werden, dafs im Anschlufs an die Versammlung eine Conferenz der akademischen Commission und der Redaction der Encyklopädie stattfand, in welcher insbesondere über die Disposition der Bände über „angewandte Mathematik“ beraten wurde. Es soll behandeln:

Band IV: Mechanik; Redaction: F. Klein;
Band V: Physik; Redaction: A. Sommerfeld;
Band VI: a) Geophysik und Geodäsie; Redaction: E. Wiechert;
b) Astronomie; Redaction: H. Burkhardt.

Alle drei Bände werden gleichzeitig in Angriff genommen.

Die nächste Jahresversammlung wird im September 1900 zu Aachen stattfinden, in Gemeinschaft mit der Abteilung für Mathematik der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte. Wie aus dem vorstehenden Berichte hervorgeht, sind die Vorbereitungen bereits im Gange; dies ist möglich Dank der Stetigkeit der Leitung, die durch die Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung herbeigeführt ist!

Geschäftlicher Bericht.

1. Unter Leitung des Vorsitzenden, Herrn M. Noether, fand am 21. September 1899 die Geschäftssitzung statt. Der Schrift- und Kassenführer, Herr A. Gutzmer, erstattete einen vorläufigen Bericht über die Vermögenslage der Vereinigung, die sich ebenso wie die Zahl der Mitglieder wiederum gehoben hat. Die Beiträge gingen zwar regelmäfsiger ein, aber es ist doch eine gröfsere Zahl von Mitgliedern mit den Jahresbeiträgen im Rückstande. Um die Mitglieder an diese Verpflichtungen zu erinnern, wird ihnen mit der Chronik ein vorgedrucktes Postanweisungsformular zugesandt werden.

Der von den Revisoren geprüfte Kassenbericht wird unten folgen.

2. Hinsichtlich des Standes der Jahresberichte konnte über den Abschlufs der Bände VI und VII berichtet werden; dagegen ist die Drucklegung der Schlufslieferung des Jahresberichts V noch nicht vollendet.

3. Seit dem letzten Bericht hat die Vereinigung sechs Mitglieder durch den Tod verloren, nämlich: Luis Gonzaga Gascó, Carl Immanuel Gerhardt, Sophus Lie, Eugen v. Lommel, Friedrich Meyer und Carl Schober. Es ist der Redactionscommission gelungen, bereits für diesen Jahresbericht aufser dem in der Eröffnungssitzung der diesjährigen Versammlung gehaltenen Nachruf auf Lie auch solche auf die übrigen Dahingeschiedenen zu gewinnen; ferner enthält der gegenwärtige Jahresbericht eine Würdigung Hermann Schapira's. Den Verfassern dieser Nachrufe sagt der Vorstand hierdurch den besten Dank.

Während der Drucklegung dieses Berichtes ist der Vereinigung ein weiteres Mitglied durch den Tod entrissen worden: am 15. December 1899 verstarb zu Prag Prof. Dr. Karl Bobek; eine Biographie desselben wird voraussichtlich im nächsten Bande veröffentlicht werden.

4. Bei der am 17. Juni 1899 stattgehabten Feier der Enthüllung des Gaufs-Weber-Denkmals in Göttingen, welcher der Herr Vorsitzende in Vertretung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung als Ehrengast beiwohnte, legte derselbe, zusammen mit dem Vorstandsmitgliede Herrn Hilbert, im Namen der Vereinigung unter einigen kurzen Begleitworten einen Kranz am Denkmal nieder.

Herr Moritz Cantor in Heidelberg wurde zu seinem 70. Geburtstage am 23. August d. J. durch ein Schreiben des Vorsitzenden im Namen des Vorstandes beglückwünscht.

5. Die Wahlen hatten folgendes Ergebnis: Zu Kassenrevisoren wurden ernannt die Herren J. Thomae und G. Frege zu Jena. An Stelle der Ende 1899 statutengemäfs ausscheidenden Herren G. Hauck und A. Vofs wurden die Herren W. Dyck und A. Mayer neu gewählt. Der letztere hat jedoch gebeten, von seiner Wahl Abstand zu nehmen, und somit hat der Vorstand sich nach § 3 der Statuten durch Cooptation des Herrn

H. Minkowski für das Jahr 1900 auf sechs Mitglieder ergänzt. Der Vorstand der Vereinigung besteht hiernach für das Jahr 1900 aus folgenden Mitgliedern: K. Hensel (1900), M. Noether (1900), A. Gutzmer (1901), D. Hilbert (1901), W. Dyck (1902), H. Minkowski (1900). Hierbei bezeichnen die zugefügten Zahlen das Jahr, an dessen Schlufs der Betreffende turnusgemäfs, bezw. durch Ablauf der Cooptation, aus dem Vorstande ausscheidet.

Die Wahlen innerhalb des Vorstandes ergaben folgendes: es wurden für das Jahr 1900 gewählt

zum Vorsitzenden: Herr D. Hilbert;
zum Schrift- und Kassenführer: Herr A. Gutzmer;
zur Redactionscommission für den Jahresbericht IX: Herr A. Gutzmer und Herr K. Hensel.

6. Im Interesse eines genauen Mitgliederverzeichnisses bitten wir, von jeder Änderung der Adresse dem Schriftführer Mitteilung machen zu wollen.

Kassenbericht.

Nach dem Stande vom 31. December 1899.

Einnahmen.	ℳ	₰	Ausgaben.	ℳ	₰
Kassenbestand am 1. November 1898 . . .	406	10	Verschiedenes (Papier, Utensilien etc.) .	11	40
Jahresbeiträge der Mitglieder:			Drucksachen	30	75
1 Beitrag f. 1893; 7½ Beiträge f. 1901;			Schreibhülfe	80	00
1 „ „ 1894; 4 „ „ 1902;			1 Kranz	25	00
4 Beiträge „ 1895; 3 „ „ 1903;			Postporti	126	95
6 „ „ 1896; 2 „ „ 1904;			Honorar für Referate in VI, Heft 2 . .	206	25
16 „ „ 1897; 1 Beitrag „ 1905;			„ „ „ „ VII, „ 2 . .	540	00
41 „ „ 1898; 1 „ „ 1906;			Angekauft: nom. 1000 ℳ 3% Reichsanleihe		
131 „ „ 1899; 1 „ „ 1907.			à 88,90%	903	50
23 „ „ 1900;			Barbestand	838	50
Insgesamt 242½ Beiträge je 2 ℳ	485	00			
21 Ablösungen der Jahresbeiträge	630	00			
Honorar für Jahresbericht VI, Heft 2. . .	213	75			
„ „ „ VII, Heft 1 u. 2	847	50			
1 Jahr Zinsen von 5500 ℳ 3% Reichsanleihe	165	00			
½ „ „ „ 1000 ℳ „ „	15	00			
Summe	2762	35	Summe	2762	35

Vermögensbestand: nom. 6500 ℳ 3% Reichsanleihe, Ankaufswert: ℳ 6191,15.
Barer Kassenbestand . . . . „ 838,50.

A. Gutzmer, als Kassenführer.
J. Thomae, G. Frege, als Revisoren.

Statuten

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891, gefafsten Beschlüssen.)

§ 1.

Zweck der Vereinigung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung stellt sich die Aufgabe, in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem collegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten.

§ 2.

Jahres-Versammlung.

Die Vereinigung hält alljährlich eine Versammlung ab, in Gemeinschaft mit der „I. Abteilung für Mathematik und Astronomie der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte".

§ 3.

Vorstand der Vereinigung.

In der Jahresversammlung wählen die dort anwesenden Mitglieder der Vereinigung einen Vorstand von sechs Mitgliedern. Derselbe darf sich nötigenfalls durch Cooptation auf sechs ergänzen.

Die Wahl der Vorstandsmitglieder geschieht je auf drei Jahre.

Dabei scheiden alljährlich zwei Mitglieder aus und werden durch Neuwahl ersetzt. Das Ausscheiden geschieht in der Reihenfolge des Eintritts. Die Ausscheidenden können erst nach zwei Jahren wieder gewählt werden; nur der Schriftführer (§ 5) ist sofort wieder wählbar. Der Amtsantritt fällt auf den 1. Januar.

§ 4.

Aufgaben des Vorstandes. Jahresbericht.

Der Vorstand ist beauftragt mit der Vertretung der gesamten Interessen der Vereinigung.

Im einzelnen hat er die Aufgabe, die Jahresversammlung vorzubereiten durch Aufstellung eines ausführlichen Programmes, in welches womöglich Referate über die Entwicklung einzelner Gebiete der Wissenschaft aufzunehmen sind.

Weiter veröffentlicht der Vorstand den Jahresbericht der Vereinigung über den wissenschaftlichen Teil der Verhandlungen. Derselbe ist den Mitgliedern zu ermäfsigtem Preise zugänglich zu machen; die Liste der Mitglieder und die Jahresrechnung sind ihm beizudrucken.

§ 5.

Geschäftsführung im Vorstande.

Der Vorstand wählt jährlich aus seiner Mitte:

a) den Vorsitzenden, in jährlichem obligatorischen Wechsel. Derselbe leitet die Sitzungen des Vorstandes und die geschäftlichen Sitzungen der Vereinigung;

b) den Schriftführer, gleichzeitig mit der Führung der Kasse und des Archivs der Vereinigung beauftragt;

c) die engere Commission für die Redaction des Jahresberichtes.

§ 6.

Mitgliedschaft.

Die Mitgliedschaft zur Vereinigung wird erworben durch Anmeldung bei dem Schriftführer. Mit ihr ist die Verpflichtung zur Zahlung eines Jahresbeitrages von zwei Mark für das laufende Kalenderjahr verbunden. Der jährliche Beitrag kann durch eine einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

Geschäftsordnung

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891, gefafsten Beschlüssen.)

§ 1.

Die Redaction des „Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ übernimmt der Vorstand, welcher mit der speciellen Ausführung die in § 5 der Statuten erwähnte engere Commission beauftragt.

Alle auf den Jahresbericht bezüglichen Zusendungen sind an den Schriftführer der Vereinigung zu richten.

§ 2.

Im Jahresberichte sind zu unterscheiden:

a) die Mitteilungen über die in der Jahresversammlung gehaltenen Specialvorträge;

b) die gröfseren wissenschaftlichen Referate.

a) Die ersteren dürfen den Raum von zwei Druckseiten für einen Vortrag nicht überschreiten; sie sind noch auf der Jahresversammlung selbst der Redactionscommission einzuhändigen.

b) Der Umfang der wissenschaftlichen Referate ist innerhalb der mit dem Verleger einzuhaltenden Verträge nicht beschränkt. Für die Einsendung der Manuscripte dieser Referate wird ein Zeitraum von sechs Wochen nach Schlufs der Versammlung festgesetzt.

§ 3.

Das vom Verleger für die Publication des Berichtes gezahlte Honorar fliefst in die Kasse der Vereinigung. Die wissenschaftlichen Referate (§ 2b) werden den betreffenden Berichterstattern gemäfs dem vom Verleger pro Bogen gezahlten Betrage honorirt. Jeder Referent und ebenso die Autoren der übrigen Mitteilungen erhalten aufserdem 25 Separatabzüge ihres Berichtes. Weitere Separatabzüge können sich dieselben auf ihre Kosten, nach Vereinbarung mit dem Verleger, machen lassen.

Mitglieder-Verzeichnis

nach dem Stande vom 31. December 1899.

Abbe, Cleveland, Meteorological Institute, Washington, D. C., U. S. A.
Abbe, Ernst, Professor an der Universität, Jena, Carl Zeifs-Platz 7.
Abraham, Max, Assistent am Institut für theoretische Physik, Berlin.
Ackermann-Teubner, Alfred, Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
Adami, Fr., Gymnasialprofessor, Hof.
Ahrens, W., Lehrer an der Baugewerkschule, Magdeburg, Badestr. 1.
Aley, R. J., Professor at the Indiana State University, Bloomington, Indiana, U. S. A.
Ambronn, L., Professor an der Universität, Göttingen.
Amthor, A., Hannover, Königstr. 40.
10. Archenhold, F. S., Director der Treptow-Sternwarte bei Berlin.
Bacharach, J., Professor an der Industrieschule, Nürnberg, Rollnerstr. 41.
Bachmann, P., Professor, Weimar, Carl Alexander-Allee 2.
Bäcklund, A. V., Professor an der Universität, Lund (Schweden).
Baker, H. F., Fellow and Lecturer at St. John's College, Cambridge (England)
Barthels, K. L., Professor, Privatgelehrter, Bonn, Hofgarten-Auguststr. 9.
Bauer, G., Professor an der Universität, München, Türkenstr. 29.
Baur, L., Director der Grofsh. Realschule, Heppenheim a. d. B., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Darmstadt; Heppenheim a. d. B.
Bauschinger, J., Professor an der Universität, Berlin SW., Lindenstr. 91.
Beck, A., Professor am Polytechnicum, Zürich V., Merkurplatz, Arterstr. 28.
20. Beke, E., Professor, Privatdocent an der Universität, Budapest, Damjanichgasse 50.
Beman, W. W., Professor at the University, Ann Arbor, Mich., U. S. A., 61 East Kingsley Street.
Bernstein, Felix, Cand. math., Halle a. S., Mühlweg 5.
Biermann, O., Professor an der Technischen Hochschule, Brünn (Mähren), Falkensteinergasse 5.
Binder, W., Professor an der Fachschule für Maschinenwesen, Wiener-Neustadt.
Bjerknes, C. A., Professor an der Universität, Christiania. Grönne Gad 6.
Blaschke, E., Privatdocent an der Universität, Wien I, Judenplatz 4.
Blümcke, Ad., Gymnasialprofessor, Nürnberg, Glockenhofstr. 32.
Blumenthal, Otto, Paris, rue Berthollet 5.
Bock, A., Reallehrer an der Realschule, Passau.
30. Böger, R., Oberlehrer an der Realschule, Hamburg, Sophien-Allee 31.
Boehm, Karl, Heidelberg, Theaterstr. 9.
Börsch, A., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam, Mauerstr. 6.
Böttcher, J. E., Professor, Rector des Realgymnasiums, Leipzig, Zeitzerstr. 10.

Bohlmann, G., Professor an der Universität, Göttingen, Bertheaustr. 1.
Bohnert, F., Oberlehrer, Hamburg, Moltkestr. 55.
Bois, H. du, Professor an der Universität, Berlin NW, Schiffbauerdamm 21.
Boltzmann, L., Professor an der Universität, Wien IX, Türkenstr. 3.
Bolza, O., Professor at the University, Chicago Ill., Woodlawn avenue 5810.
Braunmühl, A. v., Professor an der Technischen Hochschule, München, Schellingstr. 53.
40. Brendel, M., Professor an der Universität, Göttingen.
Bretschneider, W., Professor am Friedrich-Eugen-Gymnasium und Docent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Senefelderstr. 38 A.
Brill, A. v., Professor an der Universität, Tübingen, Hechingerstr. 14.
Brix, W., Berlin W., Friedrich Wilhelm-Strafse 9.
Brückner, Max, Oberlehrer am Gymnasium, Bautzen, Paulistr. 32.
Brunn, H., Privatdocent an der Universität, Bibliothekar an der Technischen Hochschule, München, Giselastr. 27.
Bruns, H., Professor an der Universität, Leipzig, Sternwarte.
Burger, Robert, Lehramtspraktikant am Realgymnasium, Donaueschingen.
Burkhardt, H., Professor an der Universität, Zürich V, Kreuzplatz 1.
Burmester, L., Professor an der Technischen Hochschule, München, Barerstr. 69.
50. Busche, E., Oberlehrer an der Hansaschule, Bergedorf bei Hamburg, Am Baum 51.
Cantor, Georg, Professor an der Universität, Halle a. S., Händelstr. 13.
Cantor, Moritz, Professor an der Universität, Heidelberg, Gaisbergstrafse 15.
Cardinaal, J., Professor am Polytechnicum, Delft (Holland), Orangeplantage 35.
Cranz, C., Professor an der Oberrealschule und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Johannesstr. 17.
Crawley, E. S., Professor at the University, Philadelphia, Pa.
Crayen, Wilhelm, Verlagsbuchhändler (G. J. Göschen'sche Verlagshandlung), Leipzig, Johannisgasse 6.
Cremona, L., Professor an der R. Scuola d'applicazione per gl' ingegneri, Rom, Piazza S. Pietro in Vincoli 5.
Curtze, Max, Professor, Thorn.
Czuber, E., Professor an der Technischen Hochschule, Wien III, Neulinggasse 3.
60. Dalwigk, F. v., Privatdocent an der Universität, Marburg.
Dantscher v. Kollesberg, V., Professor an der Universität, Graz, Rechbauerstr. 29.
Dedekind, R., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 87.
Denizot, A., Assistent an der Technischen Hochschule, Aachen, Salvatorstrafse 12.
Dickstein, S., Professor, Warschau, Marzałkowskastr. 117.
Dingeldey, F., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 13.
Dobriner, H., Oberlehrer am Philantropin, Frankfurt a. M., Eiserne Hand 18.
Döhlemann, K., Privatdocent an der Universität, München, Von der Tann-Str. 23.
Doergens, R., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin NW., Spenerstr. 2.
Doležal, E., Professor an der Bergakademie, Leoben (Steiermark).
70. Domsch, P. R., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.

Drygalski, Erich v., Professor an der Universität, Berlin W., Kurfürstenstr. 40.
Dyck, W., Professor an der Technischen Hochschule, München, Hildegardstr. 1½.
Dziobek, O., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Berlinerstr. 55.
Eberhard, V., Professor an der Universität, Halle a. S., Jägerplatz 7.
Edalji, Jamshedji, Professor at the Gujarat College, Ahmedabad, Indien.
Ellemann, Fr., Lehrer am Landes-Seminar, Cöthen, Franzstr. 25b.
Emmerich, A., Oberlehrer am Gymnasium, Mülheim a. d. Ruhr.
Eneström, Gustaf, Bibliothekar an der Königl. Bibliothek, Stockholm, Brahegatan, 43.
Engel, Friedrich, Professor an der Universität, Leipzig, Südplatz 11.
80. Escherich, G. v., Professor an der Universität, Wien IX, Dietrichsteingasse 5.
Färber, C., Oberlehrer an der Luisenstädtischen Oberrealschule, Berlin SO., Fichtestr. 30.
Fehr, H., Professor, Privatdocent an der Universität, Genf, Rue Gevray 19.
Fiedler, Ernst, Professor an der Kantonschule, Zürich-Hottingen, Englisches Viertel 57.
Fiedler, Wilhelm, Professor am Polytechnicum, Zürich, Klosbachstr. 79.
Finger, J., Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV, Alleegasse 35.
Finsterwalder, S., Professor an der Technischen Hochschule, München, Leopoldstr. 51.
Fischer, Karl, Hülfsarbeiter im Bureau des Kgl. Ausschusses zur Untersuchung der Hochwasserverhältnisse, Berlin SW., Puttkamerstr. 10.
Fischer, K., Privatdocent an der Technischen Hochschule, München.
Fisher, George Egbert, Professor at the University, Philadelphia Pa.
90. Flatt, R., Privatdocent an der Universität, Basel, Margaretenstr. 77.
Föppl, A., Professor an der Technischen Hochschule, München, Rambergstr. 2.
Franz, J., Professor an der Universität, Breslau.
Frege, G., Professor an der Universität, Jena, Forstweg 29.
Fricke, R., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 17.
Friesendorff, Th., Oberlehrer an den reformirten Kirchen-Schulen, Assistent am Institut der Wegebauingenieure, St. Petersburg, Gr. Podjatscheskaja 23.
Frobenius, G., Professor an der Universität, Berlin; Charlottenburg, Leibnizstr. 70.
Fuchs, L., Professor an der Universität, Berlin W., Rankestr. 14.
Fuhrmann, A., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Circusstr. 39.
Galdeano, Zoel Ga. de, Professor an der Universität, Zaragoza (Spanien), Cóso 99, 3°.
100. Geer, P. van, Professor an der Universität, Leiden (Holland), Rapenburg 81.
Gegenbauer, L., Professor an der Universität, Wien IX, Frankstr. 1.
Gerbaldi, F., Professor an der Universität, Palermo, Via Gaetano Daita 11.
Godt, W., Oberlehrer am Katharineum, Lübeck, Geninerstr. 29.
Görges, H., Ingenieur, Berlin W., Fasanenstr. 48.
Götting, E., Oberlehrer am Gymnasium, Göttingen, Burgstr. 52.
Goettler, Johann, Reallehrer und Privatdocent an der Universität, München, Holzstr. 6.

Gordan, P., Professor an der Universität, Erlangen, Goethestr. 5.
Graefe, F., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Soderstrafse 75.
Graf, J. H., Professor an der Universität, Bern, Wylerstr. 10.
110. Graham, W. P., Professor of electrical engeneering at the University, Syracuse, N. Y., U. S. A.
Grafsmann, Hermann, Privatdocent an der Universität, Halle a. S., Bergstr. 2.
Greenhill, A. G., Professor am Artillery College Woolwich, London W. C. 10 New Inn, Strand.
Grübler, M., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Savigny-Platz 5.
Günther, S., Professor an der Technischen Hochschule, München, Akademiestr. 5.
Guldberg, Alf, Privatdocent an der Universität, Christiania (Norwegen).
Gundelfinger, S., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 37.
Gutzmer, A., Professor an der Universität, Jena, Wildstr. 2.
Gysel, Julius, Director des Kantons-Gymnasiums, Schaffhausen, Tannergäfschen 13.
Haas, K., Gymnasialprofessor, Wien VI, Matrosengasse 8.
120. Haberland, M., Realschullehrer, Neustrelitz.
Haebler, Th., Professor an der Fürstenschule, Grimma i. S.
Haenlein, J., Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium, Berlin NW., Spenerstrafse 34.
Haentzschel, E., Oberlehrer am Köllnischen Gymnasium und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin W., Gleditschstr. 43.
Hagen, J., Professor und Director der Sternwarte am Georgetown College, Washington D. C.
Halsted, George Bruce, Professor at the University, Austin, Texas, U. S. A., 2407 Guadalupe Street.
Hamburger, M., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin N., Karlstr. 28.
Hancock, H., Instructor at the University, Chicago Ill.
Hartwig, E., Director der Sternwarte, Bamberg.
Hatzidakis, Nicolas, Athen, rue Héraclite 3.
130. Hauck, G., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Bülowstrafse 6.
Hausdorff, F., Privatdocent an der Universität, Leipzig, Nordstr. 58.
Haufsner, R., Professor an der Universität, Giefsen, Frankfurterstr. 11.
Hawkes, H. E., Instructor of Mathematics at the Yale College, New Haven, Conn., 391 Edgewood Avenue.
Hecht, Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg-Ostbahnhof, Villa Straufs.
Heffter, L., Professor an der Universität, Bonn, Goethestr. 17.
Helm, G., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Winkelmannstr. 27.
Helmert, F. R., Professor an der Universität, Berlin; Director des Geodätischen Instituts, Potsdam.
Henneberg, L., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Hochstr. 58.
Henneke, Professor am Gymnasium, Preufsisch-Friedland.
140. Henrici, O., Professor am City and Guilds of London Institute, Clarendon Road 34, Notting Hill, London W.
Hensel, K., Professor an der Universität, Berlin W., Kurfürstendamm 36.

Herberich, G., Reallehrer, München, Galleriestr. 18.
Hermann, A., Éditeur, membre de la Société mathématique de France, Paris, rue de la Sorbonne 8.
Hermes, J., Professor am Gymnasium, Lingen a. d. Ems.
Hermes, O., Professor an der Artillerieschule, Berlin; Steglitz, Lindenstr. 35.
Hertzer, H., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Frobenstr. 14.
Hefs, E., Professor an der Universität, Marburg, Barfüsserthor 5.
Hettner, G., Professor an der Technischen Hochschule und an der Universität, Berlin W., Kaiserin Augusta-Str. 58.
Heun, K, Oberlehrer an der ersten Realschule, Berlin SW., Mittenwalderstrafse 17.
150. Heymann, Woldemar, Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz, Kaiserplatz 19.
Heyse, Martin, Cand. math., Halle a. S., Neumarktstr. 8.
Hilbert, D., Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Strafse 29.
Hirsch, A., Professor, Privatdocent am Polytechnicum, Zürich, Rämistr. 56.
Hölder, O., Professor an der Universität, Leipzig, Kaiser Wilhelm-Str. 15.
Holländer, E., Oberlehrer am Gymnasium, Norden (Ostfriesland).
Holzmüller, G., Professor, Director a. D., Hagen i. W.
Hoppe, Edm., Professor, Hamburg, Ritterstr. 153.
Hoppe, Reinhold, Professor an der Universität, Berlin S., Prinzenstr. 69.
Hoppe, R. H., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
160. Horn, J., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Schillerstr. 34.
Hofsfeld, C., Oberlehrer am Gymnasium, Eisenach, Fahrzeugstr. 5.
Hurwitz, A., Professor am Polytechnicum, Zürich, Falkengasse 15.
Hurwitz, J., Privatdocent an der Universität, Basel, Allschwilerstr. 3.
Järisch, P., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg-Eilbeck, Papenstr. 56.
Jahnke, E., Oberlehrer an der achten Realschule, Berlin; Wilmersdorf, Pariserstr. 55.
Jolles, St., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Halensee bei Berlin, Boothstr. 2.
Joukovsky, N., Professor an der Universität, Moskau.
Jürgens, E., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Ludwigsallee 79.
Junker, F., Reallehrer, Württemberg (*Adresse unbekannt*).
170. Kawalki, W., Oberlehrer, Hamburg, Feldstr. 54.
Keck, L., Professor am Gymnasium, Nürnberg.
Kepinski, Stanislaus, Professor an der Technischen Hochschule, Lemberg.
Kerschensteiner, G., Stadtschulrat, München, Lilienstr. 66.
Kiepert, L., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Herrenhäuser Kirchweg.
Kikuchi, D., Professor, Rector der Kaiserl. Universität, Tokyo (Japan).
Killing, W., Professor an der Akademie, Münster i. W., Salzstr. 21 a.
Kirsch, E. G., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Kleiber, J., Hauptlehrer an der Handelsschule, München, Herrenstr. 7.
Klein, Felix, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Strafse 3.
180. Klein, Georg, Rector des Realgymnasiums, München, Ludwigstr. 14.
Klug, L., Privatdocent an der Universität, Klausenburg (Ungarn).
Kneser, A., Professor an der Universität, Dorpat, Gartenstr. 24.
Knoblauch, J., Professor an der Universität, Berlin W., Karlsbad 12.
Kobald, E., Professor an der Bergakademie, Leoben (Steiermark).

Koch, Karl, Assistent an der Technischen Hochschule, München, Adalbertstrafse 62.
Köhler, C., Professor an der Universität, Heidelberg, Treitschkestr. 3.
Kölmel, Fritz, Professor am Gymnasium, Mosbach in Baden.
König, J., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest.
Koenigsberger, L., Professor an der Universität, Heidelberg, Kaiserstr.
190. Köpcke, A., Oberlehrer an der Realschule, Ottensen, Holländische Reihe 4.
Kötter, Ernst, Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstrafse 49.
Kötter, Fritz, Professor an der Bergakademie, Berlin S., Annenstr. 1.
Kohn, Gustav, Professor an der Universität, Wien I, Schottenring 15.
Kollert, J. A., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz, Weststr. 14.
Kortum, H., Professor an der Universität, Bonn, Meckenheimerstr. 136.
Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg.
Kowalewski, Gerhard, Privatdocent an der Universität, Leipzig, Johannisallee 2
Kraft, F., Privatdocent an der Universität, Zürich IV, Bolleystr. 5.
Krause, M., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Kaitzerstrafse 12.
200. Krazer, A., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Vogesenstr. 10.
Kreutz, H., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 103.
Krüger, L., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam.
Kühne, H., Oberlehrer an den Maschinenbauschulen, Dortmund, Kaiserstr. 102.
Küpper, C., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Prag, Kgl. Weinberge, Villa Brosche.
Kürschak, J., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest II, Albrechtstr. 14.
Kullrich, Oberlehrer am Reformgymnasium, Schöneberg bei Berlin, Erdmannstr. 11.
Kutta, W., Assistent an der Technischen Hochschule, München.
Lacombe, M., Professor am Polytechnicum, Zürich, Kreuzplatz 1.
Lampe, E., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Kurfürstenstr. 139.
210. Landau, Edmund, Berlin NW., Dorotheenstr. 54.
Landsberg, G., Professor an der Universität, Heidelberg, Sandgasse 5.
Laugel, L., Mitglied der Société mathématique de France, Châlet des Bruyères, Golfe Juan, Alpes Maritimes.
Leesekamp, E. A., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Leitzmann, H., Privatgelehrter, Halle-Giebichenstein, Ziethenstr. 28.
Lerch, M., Professor an der Universität, Freiburg (Schweiz).
Levi-Civita, T., Professor an der Universität, Padua (Italien), Via S. Gaetano 3394.
Liebmann, H., Privatdocent an der Universität, Leipzig, Mühlgasse 8.
Lilienthal, R. v., Professor an der Akademie, Münster i. W., Blumenstr. 11.
Lindemann, F., Professor an der Universität, München, Franz Joseph-Strafse 12.
220. Linsenbarth, H., Oberlehrer an der ersten Realschule, Berlin N., Lothringerstr. 76.
Lipschitz, R., Professor an der Universität, Bonn, Königstr. 34.
Loewy, A., Privatdocent an der Universität, Freiburg i. B., Thurnseestr. 4.
London, Franz, Professor an der Universität, Breslau, Ohlauufer 19.
Lorenz, Franz, Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz, Reichsstr. 33.

Lorenz, Hans, Professor an der Universität, Halle a. S., Mühlweg 26.
Lorey, W., Oberlehrer am Realgymnasium, Leer, Ostfriesland, Bergmannstraſse 31. (Vom 1. 4. 1900: Oberlehrer in Remscheid.)
Loria, G., Professor an der Universität, Genua, Passo Caffaro 1.
Lovett, E. O., Professor at the Princeton University, Editor of the Bulletin of the American Mathematical Society, Princeton, New Jersey, U. S. A
Ludwig, Walther, Breslau, Zwingerplatz 6—7.
230. Lüroth, J., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Mozartstr. 10.
Mackay, John S., Edinburgh, Northumberland Street 69.
Maier, Max, Pfarrer in Schaufling bei Deggendorf (Bayern).
Mandl, M., Professor an der Realschule, Proſsnitz in Mähren.
Mangoldt, H. v., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Vaelserstr. 148.
Mansion, Paul, Professor an der Universität, Gent (Belgien), Quai des Dominicains 6.
Marcuse, A., Privatdocent an der Universität, Berlin W., Matthäikirchstr. 12.
Martin, Artemas; 1534 Columbia Street., NW., Washington, D. C., U. S. A.
Marxsen, S., Cand. math., Göttingen.
Maschke, H., Professor at the University, Chicago Ill., Woodlawn Avenue 5810.
240. Maurer, L., Professor an der Universität, Tübingen, Uhlandstr. 22.
Mayer, A., Professor an der Universität, Leipzig, Königstr. 1.
Mehling, Alwin, Gymnasial-Assistent, Würzburg, Semmelstr. 72.
Mehmke, R., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Immenhoferstr. 4.
Metzler, W., Professor at the University, Syracuse, N. Y.
Meyer, Eugen, Professor an der Universität, Göttingen, Grüner Weg 5.
Meyer, Franz, Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Mittel-Tragheim 39.
Meyer, Georg, Oberlehrer an der Realschule, Bremen, Georgstr. 56.
Meyer, Gustav Ferdinand, Professor, München, Amalienstr. 80, 3.
Minkowski, H., Professor am Polytechnicum, Zürich, Mittelstr. 12.
250. Mittag-Leffler, G., Professor an der Universität, Stockholm, Djursholm.
Molien, Th., Docent an der Universität, Dorpat.
Moore, E. H., Professor at the University, Chicago Ill.
Müller, Emil, Oberlehrer an der Kgl. Baugewerkschule und Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr., Dohnastr. 4.
Müller, Felix, Professor, Oberloschwitz bei Dresden, Heinrichstr. 12.
Müller, Reinhold, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hagenstr. 2.
Müller, Richard, Oberlehrer am Kaiser Wilhelms-Realgymnasium und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin S., Blücherstr. 35.
Muth, P., Privatgelehrter, Osthofen (Rheinhessen).
Naetsch, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Dresden, Gluckstr. 6.
Nagaoka, H., Professor an der Universität, Tokyo (Japan).
260. Nath, M., Oberlehrer am Luisen-Gymnasium, Berlin NW., Gerhardstr. 8.
Netto, E., Professor an der Universität, Gieſsen, Süd-Anlage 13.
Neuberg, J., Professor an der Universität, Lüttich, Rue Sclessin 6.
Neumann, Carl, Professor an der Universität, Leipzig, Querstr. 10—12.
Neumann, Ernst, Privatdocent an der Universität, Halle a. S., Weidenplan 6.
Noether, M., Professor an der Universität, Erlangen, Nürnbergerstr. 32.
Nordmann, Professor am Realgymnasium, Halberstadt, Gleimstr. 17.
Oettingen, A. v., Professor an der Universität, Leipzig, Mozartstr. 1.

Osgood, W. F., Professor at the Harvard University, Cambridge, Mass., U. S. A.
Papperitz, E., Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S., Weisbachstrafse 5.
270. Pasch, M., Professor an der Universität, Giefsen, Alicestr. 31.
Pelz, C., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Prag.
Peschka, G. A. V., Professor an der Technischen Hochschule, Wien III, Joaquingasse 2.
Pick, G., Professor an der deutschen Universität, Prag, Kgl. Weinberge 754.
Pierpont, James, Professor at the Yale University, New Haven, Conn. U. S. A., Howard Avenue 357.
Pietzker, Friedrich, Professor am Gymnasium, Nordhausen.
Piltz, A., Jena, Kirchplatz 5.
Planck, M., Professor an der Universität, Berlin W., Tauenzienstr. 18a.
Pochhammer, L., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 59.
Pockels, F., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Lüttichaustrafse 28.
280. Pokrowsky, P., Professor an der Universität, Kiew.
Pringsheim, A., Professor an der Universität, München, Arcisstr. 12.
Protopapadaki, Pierre, Ingenieur, Athen, Rue Valaoritès 15.
Prümm, E., Cand. phys. et math., Göttingen, Reinhäuser Chaussee 38.
Prym, F. v., Professor an der Universität, Würzburg.
Pund, O., Oberlehrer, Altona, Allee 100.
Raaij, W. H. L. Janssen van, Haarlem (Holland).
Rados, G., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest VII, Csengery-Gasse 1.
Rausenberger, O., Professor an der Musterschule, Frankfurt a. M., Heisterstr. 8.
Recknagel, G., Rector des Realgymnasiums, Augsburg.
290. Reich, Karl, Professor am K. K. Technologischen Gewerbe-Museum, Docent an der Technischen Hochschule, Wien IX, Michelbeurngasse 2.
Reinhardt, C., Professor an der Fürstenschule, Meifsen, Freiheit 16.
Réthy, M., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest, Soraksárer Gasse 18.
Reuschle, C., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Lerchenstr. 5.
Reye, Th., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Brantplatz 3.
Ricci, Gregorio, Professor an der Universität, Padua (Italien).
Richarz, F., Professor an der Universität, Greifswald.
Richter, Oberlehrer am Gymnasium, Quedlinburg, Kaiserstr. 38.
Riecke, E., Professor an der Universität, Göttingen, Bühlstr. 22.
Rinecker, Gymnasialprofessor, Regensburg.
300. Ritter, A., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Kasernenstrafse 36.
Rodenberg, C., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstr. 2.
Roe, E. D. Jr., Professor, 1151 College Avenue, Elmira, N. Y., U. S. A.
Rogel, F., Ingenieur, Docent am Technicum, Mittweida, Zschirnerplatz 13.
Rohn, K., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Liebigstrafse 18.
Rosanes, J., Professor an der Universität, Breslau, Schweidnitzer Stadtgraben 16 b.
Rosenow, H., Director der neunten Realschule, Berlin N., Badstr. 22.
Rost, Georg, Assistent am mathematischen Seminar der Universität, Würzburg, Mergentheimerstr. 6.

Rudel, K., Professor an der Industrieschule, Nürnberg, L. Feuerbach-Str. 13.
Rudio, F., Professor am Polytechnicum, Zürich, Feldeggstr. 64.
310. Runge, C., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Körnerstraſse 19 a.
Saalschütz, L., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Schaper, Hans v., Assistent an der Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle, Göttingen, Bühlstr. 30.
Scheffers, G., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Saalbaustr. 85.
Scheibner, W., Professor an der Universität, Leipzig, Schletterstr. 8.
Schell, W., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Kriegstraſse 52.
Scheller, Arthur, Assistent der Sternwarte, Hamburg.
Schendel, L., Halensee bei Berlin, Kronprinzendamm 3.
Schilling, C., Director der Navigationsschule, Bremen, Neustadt-Wall 1.
Schilling, F., Professor an der Universität, Göttingen, Hainholzweg 46.
320. Schimpf, E., Oberlehrer am Gymnasium, Bochum, Blücherstr. 46.
Schlegel, V., Professor an der Gewerbeschule, Hagen i. W., Volmestraſse 62.
Schleiermacher, L., Professor an der forstlichen Hochschule, Aschaffenburg, Glattbacherstr. 2.
Schlesinger, L., Professor an der Universität, Klausenburg (Ungarn), Sánczalj utcza 104.
Schlömilch, O., Geheimrat, Dresden, Liebigstr. 14.
Schmidt, Fr., Baumeister, Budapest V, Rudolfsquai 8.
Schmidt, M., Professor an der Technischen Hochschule, München, Heſsstraſse 32.
Schoenflies, A., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Tragheimer Pulverstr. 28—29.
Scholz, P. G., Professor am Friedrichs-Realgymnasium, Berlin; Steglitz, Fichtestr. 34.
Schorer, Karl, Gymnasiallehrer, Weiſsenburg am Sand, Mittelfranken.
330. Schorr, R., Observator der Sternwarte, Hamburg.
Schotten, H., Director der städtischen Oberrealschule, Halle a. S.
Schottky, F., Professor an der Universität, Marburg, Barfüſserthor 14.
Schrader, C., Regierungsrat, Berlin NW., Calvinstr. 6.
Schröder, E., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Gottesauerstr. 9.
Schröder, J., Oberlehrer, Hamburg, Finkenau 9.
Schröder, Th., Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Sulzbacherstr. 7.
Schubert, H., Professor am Johanneum, Hamburg, Steindamm 107
Schülke, A., Oberlehrer, Osterode i. Ostpr.
Schütz, J. R., Gern bei München, Rupprechtstr. 41.
340. Schultz, E., Oberlehrer am Realgymnasium, Stettin, Poelitzerstr. 9.
Schumacher, H., Professor an der Kadettenanstalt, München, Elvirastr. 1
Schumacher, Robert, Reallehrer an der Realschule, Augsburg, Bismarckstraſse 11.
Schur, F., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Linkenheimerstr. 15.
Schur, W., Professor an der Universität, Göttingen, Geismarchaussee 11.
Schwalbe, B., Professor, Director des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums, Berlin NW., Georgenstr. 30—31.
Schwarz, H. A., Professor an der Universität, Berlin; Villencolonie Grunewald, Boothstr. 33.
Schwatt, J., Professor at the University, Philadelphia Pa.

Schwering, K., Professor, Director des Gymnasiums, Trier.
Scott, Charlotte Angas, Professor at the College, Bryn Mawr, Pa.
350. Seeliger, H., Professor an der Universität, Director der Sternwarte, München-Bogenhausen.
Segre, C., Professor an der Universität, Turin (Italien), Corso Vittorio Emanuele 85.
Selivanoff, D., Professor am Technologischen Institut und Privatdocent an der Universität, St. Petersburg, Fontanka 116 log. 16.
Selling, E., Professor an der Universität, Würzburg, Obere Frühlingstr. 4.
Servus, H., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Spandauerstr. 9.
Sidler, G., Professor an der Universität, Bern, Christoffelgasse 4.
Siebert, A., Oberlehrer des Kadettencorps, Grofs-Lichterfelde, Potsdamerstrafse 61.
Sievert, H., Professor am Gymnasium, Bayreuth.
Simon, Max, Professor am Lyceum, Strafsburg i. E., Lessingstr. 5.
Sintzow, D., Professor an der höheren Bergschule, Ekaterinoslaw (Rufsland).
360. Smith, David Eugene, Professor, Brockport, N. Y.
Sommer, Julius, Privatdocent an der Universität, Göttingen, Grüner Weg 4.
Sommerfeld, A., Professor an der Bergakademie, Clausthal i. H., Sorger-Teichdamm. (Vom 1. 4. 1900 an der Technischen Hochschule, Aachen.)
Sonin, N., Professor, Mitglied der Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg.
Souslow, Professor an der Universität, Kiew.
Sprung, A., Professor am Meteorologischen Institut, Potsdam.
Stäckel, P., Professor an der Universität, Kiel, Hohenbergstr. 13.
Stahl, H., Professor an der Universität, Tübingen.
Stammer, Wilhelm, Professor, Düsseldorf, Hohenzollernstr. 9.
Staude, O., Professor an der Universität, Rostock, St. Georg-Str. 38.
370. Steinitz, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Uhlandstr. 187.
Stephanos, Kyparissos, Professor an der Universität, Athen, Rue de Solon 20.
Sterneck, R. v., Privatdocent an der Universität, Wien VIII, Josefstädterstr. 30.
Stickelberger, L., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Baslerstrafse 38.
Stolz, O., Professor an der Universität, Innsbruck, Anichstr. 34.
Strafsmann, H. W., Gymnasiallehrer, Berlin SW., Dessauerstr. 36.
Studnička, F. J., Professor an der böhmischen Universität, Prag, Schwarze Gasse 6.
Study, E., Professor an der Universität, Greifswald, Fleischerstr. 4.
Sturm, R., Professor an der Universität, Breslau, Fränkelplatz 9.
Suták, Jos., Gymnasialprofessor und Privatdocent an der Universität, Budapest IV., Város ház ter 4.
380. Tauber, A., Privatdocent an der Universität, Wien VI, Gumpendorferstr. 63.
Thomae, J., Professor an der Universität, Jena, Kasernenstr. 9.
Timerding, E., Privatdocent an der Universität, Strafsburg i. E., Fischartstrafse 4.
Toeplitz, E., Professor am Johannes-Gymnasium, Breslau, Ohlauer-Stadtgraben 3.
Tötössy, B. v., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest.
Umlauf, Karl, Oberlehrer an der Dreikönigsschule, Dresden-Neustadt, Schillerstr. 40.

Vahlen, K. Th., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr., Mittel-Tragheim 27.
Valentin, G., Oberbibliothekar der Kgl. Bibliothek, Berlin W., Burggrafenstr. 6.
Vályi, J., Professor an der Universität, Klausenburg (Ungarn).
Veronese, G., Professor an der Universität, Padua.
390. Vieth, Joh. v., Oberlehrer am Königl. Gymnasium, Dresden-Neustadt, Arndtstr. 6.
Vogel, P., Professor an der Artillerie- und Ingenieurschule, München, Linprunnstr. 63.
Voigt, W., Professor an der Universität, Göttingen, Grüner Weg 1.
Von der Mühll, K., Professor an der Universität, Basel, Bäumleingasse 15.
Vofs, A., Professor an der Universität, Würzburg, Sanderglacis 31.
Vries, Jan de, Professor an der Universität, Utrecht (Holland).
Wälsch, E., Professor an der Technischen Hochschule, Brünn.
Wallenberg, G., Oberlehrer an der neunten Realschule, Berlin N., Brunnenstr. 120.
Walter, Alois, Professor an der Staats-Oberrealschule, Graz, Grazbachgasse 15.
Wangerin, A., Professor an der Universität, Halle a. S., Burgstr. 35. (Vom 1. 4. 1900: Reichardtstr. 2.)
400. Wassiljef, Alexander, Professor an der Universität, Kasan.
Weber, E. v., Privatdocent an der Universität, München, Königinstr. 5/0.
Weber, H., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Goethestr. 27.
Weber, M., kgl. Regierungsbauführer, Assistent an der Technischen Hochschule, Hannover, Baumstr. 19.
Weiler, A., Professor am Polytechnicum, Zürich-Hottingen, Neptunstr. 4.
Weingarten, J., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Grolmanstr. 57.
Weinmeister, J. Ph., Professor an der Forstakademie, Tharandt.
Weifs, W., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Prag.
Wellstein, J., Privatdocent an der Universität, Strafsburg i. E., Domplatz 13.
Weltzien, C., Professor an der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule, Berlin; Zehlendorf, Prinz Handjery-Str. 3.
410. Wend, H. O., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Wendler, A., Gymnasiallehrer, Windsbach, Hauptstr. 25.
Wernicke, A., Oberrealschuldirector, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hintern Brüdern 30.
Westphal, A., Professor, Abteilungsvorsteher am kgl. Geodätischen Institut, Potsdam.
White, H., Professor at the University, Evanston, Ill.
Wiechert, Emil, Professor an der Universität, Göttingen, Weender Chaussee 15.
Wien, W., Professor an der Universität, Giefsen.
Wiener, H., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 28.
Wirtinger, W., Professor an der Universität, Innsbruck, Museumstr. 19.
Witting, A., Oberlehrer am Gymnasium, Dresden-Strehlen, Residenzstr. 32.
420. Wölffing, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Stuttgart. Hackländerstr. 38.
Wolf, M., Professor an der Universität, Heidelberg.
Wolfskehl, P., Privatgelehrter, Darmstadt, Rheinstr. 4.
Young, W. H., formerly fellow of Peterhouse and lecturer in Mathematics, Cambridge; z. Z. Göttingen, Bergstr. 11 I.
Zahradnik, K., Professor an der Universität, Agram, Kukovićgasse 6.

Zelbr, K., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Brünn (Mähren).
Zermelo, E., Privatdocent an der Universität, Göttingen, Rosdorferweg 7.
Zindler, K., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Wien, Resselgasse 5.
Ziwet, A., Professor at the University of Michigan, Ann Arbor, Mich.
Zorawski, C. v., Professor an der Universität, Krakau.
430. Zsigmondy, Privatdocent an der Universität, Wien I, Schmerlingplatz 2.
Züge, Professor am Gymnasium, Wilhelmshafen, Roonstr. 29.

Allgemeine Bibliothek der Grofsherz. Technischen Hochschule zu Darmstadt.
Bibliothek der Technischen Hochschule zu Karlsruhe
Bibliothek der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg.
Mathematisches Institut der Technischen Hochschule, München.
Mathematischer Verein der Universität, Berlin NW., Dorotheenstr. 5.
Mathematischer Verein der Universität, Göttingen.
Mathematischer Verein der Universität, Halle a. S.
Kaiserliche Universitäts- und Landesbibliothek, Strafsburg i. E.
440. Universitäts-Bibliothek zu Utrecht.

Zum Gedächtnis.

Luis Gonzaga Gascó.*)

Geboren den 29. August 1844 zu Valencia, besuchte Luis Gonzaga Gascó das *Instituto de 2ª enseñanza*, absolvirte am 28. Juni 1863 die Examina für das *Bachillerato en Artes* (mit der Censur *vorzüglich* und Zuerkennung des aufserordentlichen Preises in der *Sección de Ciencias*) und bezog noch in demselben Jahre die Universität, um dem Studium der exacten Wissenschaften obzuliegen. Dazu hörte er im Jahre 1865 Philosophie und schöne Wissenschaften, unterzog sich im Juni 1867 den betreffenden Prüfungen (mit ausgezeichneter Censur), ergab sich aus Pietät für seinen Vater, der, früh verstorben, in Valencia als Rechtsgelehrter thätig gewesen, auch noch juristischen Studien, wurde im Jahre 1870 Doctor der Rechte und errang, nach beendigtem Licentiat in der philosophischen Facultät zu Barcelona, im Juni 1874 das Doctordiplom in den exacten Wissenschaften.

Noch während seiner Studienzeit im Jahre 1866 als besoldeter Substitut und später Hilfslehrer der Mathematik am *Instituto* thätig, wurde er, da die Regierung letztere Art von Stellungen im Jahre 1868 eingehen liefs, zum Substituten für den Lehrstoff *Latin y Castellano* ernannt. In diese Zeit der Wirksamkeit auf sprachlichem Gebiet fällt die Herausgabe seiner für Schüler bestimmten und mit erklärenden Noten versehenen Biblioteca Latina.

Als dann im Jahre 1883 die Lehrstühle für Mathematik in Canarias, Ciudad Real, León und Ponferrada frei wurden, trat er mit 20 opositores (Wettbewerbern) in die Schranken, hatte das Glück, einstimmig in erster Reihe genannt zu werden, und ging in Folge dessen nach Ciudad Real, das er jedoch bald mit Albacete vertauschte. — Von Anbeginn seiner Laufbahn bestrebt, Universitätsprofessor zu werden, richtete er nach vierjähriger Amtsthätigkeit an letztgenanntem Ort sein Augenmerk auf die Vacanz in Sevilla, trug über seine Mitbewerber abermals den Sieg davon und hatte den neu erlangten Lehrstuhl bis zum Jahre 1892 inne,

*) Auf Grund von Mitteilungen aus wohlunterrichteter Quelle. Ein Porträt zur Reproduction war nicht zu erlangen.

in welchem aus staatsökonomischen Rücksichten unter anderen auch die Facultät der exacten Wissenschaften an der Universität zu Sevilla geschlossen wurde. Bis auf weiteres für excedente erklärt und auf zwei Drittel seines Einkommens herabgesetzt, am 7. September 1893 aber an die Universität zu Zaragoza für *Cálculo diferencial é integral* berufen, begann für den Dahingeschiedenen doch erst im Jahre 1895 mit der Anstellung als Professor der Análisis matemático in Valencia die wahre Freudigkeit im Amt. An seiner Vaterstadt mit allen Fibern seines Herzens hängend, erfüllte ihn hier ganz die Hoffnung auf ein segensreiches Wirken sowohl als auf die endliche Drucklegung seiner in zahlreichen Manuscripten bereit gehaltenen Untersuchungen, als er am 17. Mai 1899 plötzlich abgerufen wurde.

Die *Lecciones de Coordinatoria, con las determinantes y sus principales aplicaciones* (e. c.), XVI—451 *páginas en* 4⁰, Valencia 1882, sind auf mathematischem Gebiet als Erstlingswerk des Verstorbenen zu nennen; von dieser Schrift hob seiner Zeit die Akademie der Wissenschaften zu Madrid als verdienstvoll hervor, dafs es sich mit damals in Spanien kaum noch behandelten Theorien befasse. Auch die *Revue des questions scientifiques*, Octobre 1883, Bruxelles, und *Nature*, September 1884, London, besprachen diese Schrift in anerkennender Weise.

Im Jahre 1884 folgten dann die *Tablas de Logaritmos, Cologaritmos y Antilogaritmos de los números naturales y trigonométricos, con los logaritmos de Gauss y de Mendoza, dispuestas de un modo nuevo y acompañadas de instrucciones prácticas sobre los logaritmos y sobre el uso de las Tablas*, XVIII — 178 pgs. en 8⁰ *con* 10 *Tablas.* — *Mathesis* berichtet darüber im tome V, Octobre 85; das Buch ist bis heute in 6 Auflagen erschienen.

In bedeutend erweiterter Behandlung erschienen im Jahre 1891 abermals: *Lecciones de Coordinatoria;* ihnen folgten später die *Diagramas mnemónicos de Trigonometria, mediante los cuales se obtienen mecánicamente mas de* 700 *fórmulas ó relaciones tanto goniométricas, monomias y binomias como trigonométricas, rectilineas y esféricas*, Valencia 1897, 74 páginas en 4⁰, 2ª edición. In Übersetzungen liegen dazu vor die *Teoria sucinta de las funciones hiperbólicas*, por P. Mansion. Versión española, Valencia 1896, 44 pgs. en 4⁰, sowie die *Memorias sobre las Ecuaciones algébricas* por N. H. Abel, Valencia 1896, 38 pgs. en 4⁰, letztere als ein Teil der *Biblioteca Matemática*, die als Supplement zum *Archivo de Matemáticas puras y aplicadas* bestimmt war, welches Gascó seit 1898 herausgab.

Den *Curso de Análisis matemático* aber, mit besonderer Liebe bearbeitet und schon im Druck begonnen, vollendet zu sehen, hat das Schicksal dem Dahingeschiedenen nicht mehr vergönnt.

C. I. Gerhardt*).

Von **M. Cantor** in Heidelberg.

Carl Immanuel Gerhardt, auf den Titeln seiner Veröffentlichungen immer als C. I. Gerhardt bezeichnet, ist den 2. December 1816 zu Herzberg bei Torgau in Schlesien geboren und am 5. Mai 1899 zu Halle a. S. gestorben. Vom Gymnasium zu Torgau aus bezog Gerhardt im Herbste 1834 die Universität Berlin, um sich dem Studium der Mathematik zu widmen. Gegen Ende 1837 doctorirte er und machte bald darauf sein Lehrerexamen. Nachdem Gerhardt während eines ihm als Probejahr angerechneten Jahres die Gelegenheit benutzt hatte, den erkrankten Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Eutin zu vertreten, wurde er Ostern 1839 in Salzwedel angestellt. Vom Herbste 1853 bis 1855 war er Lehrer der Mathematik an dem Französischen Gymnasium und an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule in Berlin, dann erhielt er Urlaub sowie ein Stipendium zu einer wissenschaftlichen Reise nach Lausanne, Mailand und Paris, von wo zurückgekehrt er 1856 als Professor nach Eisleben kam. Dem Eislebener Gymnasium gehörte Gerhardt von nun an, seit 1876 als Director, bis zum Schlusse seiner amtlichen Thätigkeit an. Dort feierte er am 25. September 1888 in voller Rüstigkeit und unter reger Teilnahme das Fest seines 50-jährigen Amtsjubiläums, von dort aus trat er am 19. September 1891 in den erbetenen Ruhestand. Er wählte Halle als Wohnort, verliefs aber diese Stadt wieder, als ihm dort nach halbjährigem Aufenthalte die treue Lebensgefährtin durch den Tod entrissen wurde. Gerhardt



*) Nach einem für die Nachträge zur allgemeinen Deutschen Biographie bestimmten Manuscript mit dankenswerter Genehmigung des Herausgebers R. v. Liliencron und der Verlagsbuchhandlung von Duncker und Humblot zu Leipzig.

zog zu seiner mit einem Officiere verheirateten Tochter nach Mainz, von da mit ihr nach Graudenz, wo er seinen 80. Geburtstag feierte, 1897, nachdem sein Schwiegersohn den Abschied aus dem Militärdienste genommen hatte, zum zweiten Male nach Halle. Er bewahrte seine geistige Frische, auch nachdem körperliche Gebrechen auftraten, deren von ihm am meisten beklagte Folge die war, dafs er auf die gewohnten langen Spaziergänge verzichten mufste. Am 4. Mai 1899 war er noch bis 10 Uhr des Abends im Kreise seiner Familie, dann ging er zu Bette, am anderen Morgen fand man ihn entschlafen.

Gerhardt hat eine reiche schriftstellerische Thätigkeit, insbesondere auf dem Gebiete der Leibniz-Forschung entwickelt. Die Berliner Universität hatte als Preisaufgabe eine geschichtliche Darstellung der verschiedenen Begründungsweisen der Differentialrechnung verlangt, und Gerhardt's Bearbeitung wurde 1837 mit dem Preise gekrönt. Von da an war die Richtung seines Arbeitens entschieden. Ein Salzwedeler Programm von 1840 behandelte die historische Entwicklung des Princips der Differentialrechnung bis auf Leibniz. Dann folgte 1846 die Herausgabe von Leibniz's „Historia et origo calculi differentialis," welche Gerhardt unter dem in Hannover aufbewahrten handschriftlichen Nachlasse von Leibniz aufgefunden hatte. Zwischen beide Veröffentlichungen fallen einige geschichtliche Aufsätze im 2. und 3. Bande von Grunert's Archiv. Wir haben weiter zu erwähnen: Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz u. s. w. (1848), Die Geschichte der höheren Analysis I. (einziger) Band (1855), die Beteiligung an der Herausgabe von Leibniz's Gesamtwerken durch Bearbeitung der mathematischen, später auch der philosophischen Schriften (seit 1849). Dann gab Gerhardt 1865 das Rechenbuch des Maximus Planudes, 1871 das VII. und VIII. Buch der Sammlungen des Pappus heraus, mit welcher letzteren Ausgabe ein Eislebener Programm von 1875 in Zusammenhang steht. Im Auftrage der bayrischen Akademie beteiligte sich Gerhardt an der Geschichte der Wissenschaften in Deutschland durch Herstellung des 17. Bandes: Geschichte der Mathematik in Deutschland (1877). Am Spätabende seines arbeitsreichen Lebens durfte Gerhardt eine neue Ausgabe von Leibniz's mathematischem Briefwechsel besorgen, deren 1. Band Weihnachten 1898 erschien, während der 2. Band bei Gerhardt's Tode im Drucke war.

Gerhardt hat sich unzweifelhaft durch die Sichtung von Leibniz's handschriftlichem Nachlasse grofse und bleibende Verdienste erworben. Erst durch die bei dieser Gelegenheit an das Licht gezogenen, mit Datumsangabe versehenen Schriftstücke ist es möglich geworden, genau zu erkennen, wie Leibniz der Infinitesimalrechnung schrittweise näher kam, bis er das Ziel erreichte. Auch der Wieder-

abdruck schon da und dort veröffentlichter Abhandlungen und Briefe war im höchsten Grade dankenswert. Einleitungen zu den einzelnen Abschnitten erleichtern den Gebrauch, wenn sie auch das leider fehlende Register nicht zu ersetzen vermögen. Auch für das Bekanntgeben des Rechenbuches des Maximus Planudes wird man Gerhardt erkenntlich sein. Seine Arbeiten über Pappus suchten eine von keinem anderen Historiker geteilte Meinung zu verteidigen, die Sammlung des Pappus habe nur aus drei Büchern bestanden, dem vereinigten 3. und 4. Buche, dem 7. Buche und dem 8. Buche.

Was die Geschichte der Mathematik in Deutschland betrifft, so war sie, nach unserer Meinung, ein von vorn herein verunglücktes Unternehmen, wenn der Verfasser sich nicht entschlofs, die Aufgabe viel weiter zu fassen, wie es etwa Rud. Wolf in dem 16. Bande der gleichen Sammlung durch seine Geschichte der Astronomie 1877 gethan hat. Bei einer so völkergemeinsamen Wissenschaft, wie die Mathematik es ist, läfst sich kaum für die ältesten Zeiten eine Scheidung auf geographischer Grundlage durchführen. Die Geschichte der Mathematik zeigt uns, dafs in der ganzen Wissenschaft wie in einzelnen Abschnitten derselben bald dieses, bald jenes Volk die Führung übernahm, dafs die jeweils zurückbleibenden Völker jedoch lernend, wenn nicht lehrend, den Fortschritt mitmachten, bis sie ganz unerwartet und plötzlich an der Spitze standen. Diese Thatsache hat die Unmöglichkeit zur Folge, eine gute Geschichte der Mathematik in Deutschland zu schreiben. Ob es Gerhardt an dem Bewufstsein dieser Unmöglichkeit fehlte, ob an dem weiten geschichtlichen Überblick, durch welchen Wolf sich auszeichnete, und welcher dessen vorerwähnten 16. Band zu einer Zierde der ganzen Sammlung hat werden lassen, das vermögen wir nicht zu entscheiden.

Vergl. Vollheim, Geschichte des königlichen Gymnasiums zu Eisleben von 1846—1896. Festschrift zur dreihundertfünfzigjährigen Jubelfeier. (Eisleben 1896.) — Briefliche Mitteilungen von Oberst von Ludwiger, dem Schwiegersohne C. J. Gerhardt's.

Sophus Lie.

Von **F. Engel** in Leipzig.

Später als andere grofse Mathematiker, erst in einem Alter von sechsundzwanzig Jahren hat Lie seinen Beruf zur Mathematik erkannt. Aber nachdem er einmal das Feld gefunden hatte, für dessen Bearbeitung er geschaffen war, strömten ihm die Ideen in einer Fülle zu, die kaum ihres Gleichen hat.

An Erfinderkraft steht Lie ebenbürtig neben den gröfsten Mathematikern aller Zeiten. Nur äufserst wenige haben der mathe-

matischen Forschung so ausgedehnte neue Gebiete erschlossen und zugleich Methoden von solcher Fruchtbarkeit und Tragweite geschaffen



wie er, und was die Hauptsache ist: diese Methoden sind von der Art, dafs jeder Mathematiker sie handhaben und damit eine Menge Probleme erledigen kann, die vor Lie vollständig unzugänglich erschienen.

Auf den ihm eigensten Gebieten, den Integrationstheorien und der Gruppentheorie mit den zugehörigen Invariantentheorien und den Anwendungen auf Differentialgleichungen und Geometrie, auf diesen Gebieten hat Lie für sich allein eine Leistung vollbracht, die ich nicht besser zu kennzeichnen vermag als durch Vergleichung mit dem, was Newton und Leibniz zusammen für die Infinitesimalrechnung geleistet haben. Während Newton die Infinitesimalrechnung für seine eigenen Bedürfnisse schuf, als ein Instrument, das nur ein Meister wie er zu spielen im stande war, gab Leibniz, der zweite Erfinder, dem Calcül von vornherein eine Fassung, die für jeden, auch für gewöhnliche Geister benutzbar war, und deren wir uns noch heute bedienen; deshalb können wir zwar Newton nicht genug bewundern, aber gegen Leibniz fühlen wir uns doch in viel höherem Mafse zu Dank verpflichtet. Lie nun vereinigt, wie schon gesagt, auf seinem Gebiete die Leistungen von Newton und Leibniz; wie Leibniz hat er jederzeit die Methode höher gestellt als die einzelnen Resultate, auch bei der Behandlung specieller Aufgaben war sein Augenmerk stets auf Allgemeinheit der Methode gerichtet. Die von ihm geschaffenen Methoden und Theorien sind nicht blofs für die Hand eines Meisters, sondern sie bilden auf lange Jahre hinaus eine unerschöpfliche Fundgrube interessanter und wirklich lösbarer Probleme für jeden Mathematiker, der nur zugreifen will, wenn auch die Virtuosität, mit der der Erfinder selbst seine Methoden handhabte, unerreicht bleiben mufs. In Frankreich und neuerdings auch in Italien hat man sich das schon zu nutze gemacht, in Deutschland leider noch viel zu wenig; über-

haupt ist in Deutschland die Erkenntnis von der Bedeutung Lie's noch lange nicht verbreitet genug.

Man wird mir vorwerfen, ich sei als ein specieller Schüler Lie's Partei. In der That bekenne ich offen und freudig, dafs ich persönlich für meine Entwickelung als Mathematiker Lie überaus viel zu danken habe, mehr als ich sagen kann und mehr als irgend ein anderer: trotzdem glaube ich nicht, ihn zu überschätzen, wenn ich als meine innigste Überzeugung ausspreche, dafs man Lie zu den allerersten Mathematikern rechnen mufs, die überhaupt gelebt haben, und dafs man in nicht ferner Zeit kaum begreifen wird, wie jemals einzelne Mathematiker anders über ihn haben urteilen können.

Dabei bin ich keineswegs blind dafür, dafs Lie's Fähigkeit zur Darstellung des Gefundenen bei weitem nicht auf derselben Höhe stand wie seine Erfinderkraft, oder richtiger, dafs sie sich nicht zu derselben Höhe entwickelt hat wie diese, und dafs er in diesem Punkte den meisten grofsen Mathematikern nachsteht. Aber dafür ist eben die Fülle und Fruchtbarkeit seiner Ideen verantwortlich zu machen, die ihn von Entdeckung zu Entdeckung geradezu fortrifs. Ein noch so langes Menschenleben — und Lie waren nur drei Jahrzehnte für sein Lebenswerk vergönnt — es würde nicht ausreichen, um diese Entdeckungen zu machen und sie auch noch in vollkommener Form darzustellen.

Gaufs hat einmal geäufsert, in seiner Jugend seien ihm die Ideen in solcher Fülle zugeströmt, dafs er sie nicht habe bewältigen können. Die ungeheuer strengen Anforderungen, die Gaufs an die Darstellung seiner Untersuchungen stellte, sind dann die Ursache gewesen, dafs viele seiner Ideen bis lange nach seinem Tode verborgen geblieben oder sogar für die Welt ganz verloren gegangen sind. Es ist daher eher als ein Glück zu betrachten, dafs Lie nicht gleich von Anfang an das Bedürfnis empfand, seine Sachen nur in abgerundeter Form an die Öffentlichkeit zu bringen, sondern sich vielfach begnügte, sie in skizzenhafter, oder wie er selbst sagte, „leichtsinniger“ Darstellung drucken zu lassen, indem er hoffte, das Versäumte später nachholen zu können. Bei einem Teile seiner Theorien ist ihm das ja auch gelungen, zahlreiche andere und mit die wichtigsten harrten aber noch der zusammenhängenden Darstellung, als ihn der Tod ereilte. So sehr das zu beklagen ist — er hat doch wenigstens dafür gesorgt, dafs seine hauptsächlichsten Entdeckungen vor dem Schicksale bewahrt geblieben sind, mit ihm begraben zu werden, und obwohl er immer noch eine Fülle von Wissen, das nur er besafs, mit ins Grab genommen hat: was er uns hinterlassen, ist so reichhaltig, dafs viele Jahre dazu gehören werden, es zu verarbeiten, und Jahrzehnte werden nicht ausreichen um die Fruchtbarkeit der von ihm ausgestreuten Ideen zu erschöpfen

Im Grunde entscheidet ja auch über die Fortdauer der Ideen eines Mathematikers nur der Wert und die Fruchtbarkeit dieser Ideen, nicht die Form, in der sie der Entdecker dargestellt hat. Die Kunst kann Werke schaffen, die niemals veralten, dagegen kommt selbst für die vollkommensten Werke der gröfsten Mathematiker eine Zeit, wo sie veraltet sind und wo nur ihr Ideengehalt noch fortlebt.

Bei Lies Ideenreichtum und bei der Mannigfaltigkeit seiner Entdeckungen ist es unmöglich, im Rahmen eines kurzen Vortrags auch nur von den wichtigsten eine Vorstellung zu geben. Ich werde mich daher begnügen, den Gang seines Lebens zu schildern, und nur hier und da einige Andeutungen über die von ihm verfolgten Ziele einstreuen.

Marius Sophus Lie war ein Pfarrerssohn wie Euler und Riemann und wie auch sein grofser Landsmann Abel. Er wurde geboren am 17. December 1842 in Nordfjordeide am Eidsfjord, einem Zweige des Nordfjords in dem norwegischen Amte Bergenhus. Als der Vater 1851 nach dem Städtchen Moss am Christianiafjord versetzt worden war, besuchte Sophus Lie zunächst die dortige Schule und dann von 1857 an das Nissensche Privatgymnasium in Christiania. Als Schüler war er in allen Fächern gleich gut, ohne besondere Vorliebe für die Mathematik zu zeigen; deshalb entschied er sich, als er 1859 die Universität Christiania bezog, erst nach einigem Schwanken für das Studium der Realfächer. Auch auf der Universität trat seine hervorragende Begabung für die Mathematik noch nicht zu Tage, und keiner seiner Lehrer ahnte das in ihm schlummernde Genie. Er hörte zwar schon 1862 bei L. Sylow, der zeitweilig den Professor O. J. Broch vertrat, eine Vorlesung über Substitutionentheorie; aber diese Dinge hinterliefsen damals keinen nachhaltigen Eindruck bei ihm, und erst viel später gewannen sie für ihn Bedeutung, als er sich mit den Differentialgleichungen und den continuirlichen Gruppen beschäftigte und nun die Analogien mit der Substitutionentheorie und der Galoisschen Gleichungstheorie verfolgte.

Nachdem er 1865 das mathematisch-naturwissenschaftliche Lehrerexamen bestanden hatte, erteilte er zunächst Privatunterricht in der Mathematik, hielt auch in dem allgemeinen Studentenvereine eine Reihe von Vorträgen über Astronomie, ja dachte sogar daran, sich ganz der Astronomie zu widmen, woraus jedoch nichts wurde. Er befand sich während dieser Zeit in ziemlich gedrückter Stimmung, weil er unschlüssig war, welchen Beruf er eigentlich ergreifen sollte. Sein wahrer Beruf war ihm noch nicht aufgegangen, obwohl er sich auch schon damals mit mathematischen Speculationen beschäftigte und insbesondere, was er später selbst merkwürdig fand, mit solchen über die Grundlagen der Geometrie: er versuchte da die

Geometrie, ähnlich wie es Lobatschefskij und W. Bolyai gethan haben, auf den Begriff der Kugel zu gründen.

Anders wurde das, als er im Jahre 1868 zufällig mit Poncelets und Plückers Schriften bekannt wurde. Da erwachte in ihm mit einem Male der Trieb zur mathematischen Production, und es begann jene Staunen erregende Thätigkeit, die erst mit seinem nur allzu frühen Tode ihren Abschlufs gefunden hat. Kein Wunder daher, dafs er lebenslang für Poncelet und Plücker eine ganz besondere Verehrung bewahrte; hat er sich doch später einmal geradezu als einen Schüler Plückers bezeichnet, den er doch nie gesehen (Math. Ann. IX, S. 246).

Der Plückersche Gedanke, an Stelle des Punktes irgend welche Flächen oder Curven, überhaupt irgend welche Raumgebilde als Raumelemente einzuführen, war sein Ausgangspunkt, und von da aus wurde er immer weiter geführt. Er begann mit der Untersuchung gewisser Abbildungen, und diese Methode der Abbildungen ist stets für ihn ein mächtiges Hülfsmittel der Forschung geblieben, er ist da geradezu unerschöpflich in immer neuen Wendungen. Von den Abbildungen ging er bald zu den Transformationen über und zur Untersuchung der Eigenschaften, die bei gewissen Transformationen erhalten bleiben. So wurde er mit Notwendigkeit auf den Gruppenbegriff geführt. Es wird schwer sein, ein zweites Beispiel dafür aufzufinden, dafs ein von dem einen Mathematiker ausgesprochener Gedanke bei einem andern den Anstofs zur Entwickelung so grofsartiger und ausgedehnter Theorien gegeben hätte.

Lies erste gedruckte Arbeit „Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie“ beschäftigte sich mit der Abbildung der imaginären Punkte und Geraden der Ebene durch reelle Gebilde des gewöhnlichen Raumes, insbesondre werden den ∞^4 imaginären Geraden der Ebene die ∞^4 reellen Geraden des Raumes zugeordnet. Er liefs diese überaus knapp gefafste und daher schwer verständliche Arbeit 1869 auf eigene Kosten in einem Heftchen von acht Seiten Quart drucken, und sie fand nicht lange nachher durch Professor Brochs Vermittelung Aufnahme im Crelleschen Journale (Bd. 70). Dagegen hielt es ziemlich schwer, die mafsgebenden wissenschaftlichen Kreise in Christiania davon zu überzeugen, dafs hier eine wirkliche Leistung vorlag, deren Urheber Förderung verdiente, und wenn nicht einige Freunde Lies, nebenbeibemerkt keine Mathematiker, energisch für ihn eingetreten wären, so wäre es ihm kaum gelungen, seine inzwischen auf mehr als das Vierfache ihres ursprünglichen Umfangs angewachsene Arbeit in den Schriften der Christianiaer Gesellschaft der Wissenschaften unterzubringen. Doch, Dank den unablässigen Bemühungen dieser Freunde erreichte er das schliefslich, und auf Grund dieser Abhandlung erhielt er ein Reisestipendium, das ihm einen längeren Aufenthalt im Auslande ermöglichte.

Den Winter 1869—70 brachte Lie in Berlin zu, wo er mit Felix Klein zusammentraf und enge Freundschaft schlofs. Durch seine Abbildung der imaginären Punkte und Geraden der Ebene war Lie damals schon zur Betrachtung gewisser Liniencomplexe, namentlich des tetraedralen Complexes veranlafst worden und hatte angefangen, gewisse Classen von partiellen Differentialgleichungen, die zu solchen Complexen in Beziehung stehen, zu untersuchen und zu integriren; ferner war er durch den Plückerschen Gedanken vom Wechsel des Raumelementes zum Studium der Berührungstransformationen geführt worden, und er fragte damals schon nach solchen Eigenschaften partieller Differentialgleichungen, die bei Berührungstransformation erhalten bleiben. Klein seinerseits hatte auf dem Gebiete der Liniengeometrie gearbeitet; beide hatten daher viele gemeinsame Interessen, und es entwickelte sich zwischen ihnen ein reger Verkehr. Da wir über den Einflufs, den beide damals auf einander ausgeübt haben, eine Schilderung aus der Feder Noethers erwarten dürfen, so will ich hier nicht weiter darauf eingehen und nur einen Punkt erwähnen, auf den Lie selbst mehrmals mit Nachdruck hingewiesen hat. Die Integrationen specieller partieller Differentialgleichungen, die Lie ausführte, beruhten darauf, dafs diese Differentialgleichungen bei einer dreigliedrigen Gruppe von vertauschbaren Transformationen invariant blieben, und dafs diese Gruppe in die Gruppe der Translationen überführbar war. Klein wies nun Lie darauf hin, dafs sein Verfahren eine gewisse Analogie habe mit dem Verfahren, das Abel bei der Behandlung der nach ihm benannten Gleichungen benutzt hat. Der Hinweis auf diese Analogie ist später für Lie insofern von Bedeutung geworden, als er überhaupt die Analogien mit der Theorie der algebraischen Gleichungen weiter zu verfolgen strebte.

Den Sommer 1870 brachten Lie und Klein in Paris zu, wieder im regsten Verkehre mit einander; von den französischen Mathematikern waren es eigentlich nur Darboux und C. Jordan, mit denen sie in nähere Beziehungen traten. Dort war es, im Anfang Juli, dafs Lie seine berühmte Berührungstransformation entdeckte, die die geraden Linien des Raumes in die Kugeln, und die Haupttangentencurven in die Krümmungslinien überführt. Diese Transformation war nicht nur an und für sich höchst merkwürdig durch die Beziehung zwischen der projectiven und der metrischen Geometrie des Raums, die sie enthüllte, sondern sie eröffnete zugleich ein weites Feld neuer und interessanter Theorien. Bald darauf mufste Klein wegen des ausbrechenden Krieges Paris verlassen, während Lie im Vertrauen auf seine Eigenschaft als Norweger zunächst zurückblieb. Später, Anfang August, fafste er den Plan, zu Fufse von Paris nach Italien zu wandern; aber schon in der Nähe von Fontainebleau ward er als vermeintlicher Spion verhaftet und mufste da volle

vier Wochen als Gefangener zubringen. Zunächst mag ihm dieses Abenteuer sehr unangenehm gewesen sein, doch hat er später anders darüber gedacht, denn 1877 schrieb er in einem Briefe an Adolph Mayer: „Ich hatte dort die schönste Mufse zur Entwickelung meiner Entdeckung, die mir ohne Vergleichung das gröfste Vergnügen bereitet hat.“ Endlich ward er durch die Vermittelung von Darboux aus der Haft befreit und konnte gerade noch, bevor die deutschen Heere Paris einschlossen, nach Italien entkommen. Von Italien aus kehrte er über die Schweiz zurück nach Deutschland, traf im November noch einmal in Düsseldorf mit Klein zusammen, und da entstand eine gemeinsame Note beider, die Kummer im December 1870 der Berliner Akademie vorgelegt hat; sie handelte über die Haupttangentencurven der Kummerschen Fläche, deren Bestimmung durch die Liesche Berührungstransformation möglich geworden war. Im December war Lie wieder in Christiania.

Zu Neujahr 1871 wurde Lie Universitätsstipendiat an der heimischen Universität, wodurch ihm wenigstens eine bescheidene feste Einnahme gesichert war, aufserdem gab er noch Unterricht an dem Nissenschen Privatgymnasium. Im Juli desselben Jahres erwarb er den Doctorgrad, was an den skandinavischen Universitäten zugleich die Habilitation bedeutet. Seine Doctorarbeit: „Über eine Classe geometrischer Transformationen“ ist später in umgearbeiteter und erweiterter Fassung in Band V der Mathematischen Annalen erschienen, es ist die bekannte Abhandlung: „Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen.“

Es ist hier nicht möglich, von dem überreichen Inhalte dieser Arbeit, die den Geometer Lie im vollsten Glanze zeigt, eine Vorstellung zu geben. Ich erwähne daher nur, dafs darin insbesondere die Theorie der Berührungstransformationen des gewöhnlichen Raumes vollständig entwickelt wird, aber rein geometrisch. Es wird gezeigt, dafs die Berührungstransformationen als Transformationen der Flächenelemente des Raums aufgefafst werden können, aber es werden für keine einzige Berührungstransformation explicite Formeln in diesem Sinne aufgestellt. Andererseits tritt überall schon die freie Auffassung des Integrationsproblems der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hervor, zu der Lie eben durch den Begriff der Berührungstransformation geführt worden war: jede solche Gleichung scheidet ∞^4 unter den ∞^5 Flächenelementen des Raumes aus, und die Gleichung integriren heifst: diese ∞^4 Elemente in bestimmter Weise zu Scharen von je ∞^2 zusammenfassen. Auch die Verallgemeinerung dieser Theorien auf den Raum von n Dimensionen erscheint als etwas ganz Selbstverständliches.

Während Lie bisher nur specielle Classen von partiellen Differentialgleichungen betrachtet hatte, auf die er durch seine

andern Untersuchungen geführt worden war, wendete er sich jetzt der allgemeinen Theorie zu. Durch seine Untersuchungen über Berührungstransformationen war gerade er hierfür besonders ausgerüstet; er war frei von der analytischen Zwangsjacke, in die Jacobi und seine Nachfolger diese Theorie gekleidet hatten. Als er daher 1871 begann, die bisherigen Methoden zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung sorgfältig zu durchdenken, also namentlich die Methoden von Pfaff, Cauchy und Jacobi, da erkannte er sofort, dafs die Begriffsbildungen und Vorstellungen, die er von dem Standpunkte der Berührungstransformationen aus mitbrachte, nicht blofs diese älteren Methoden in einem ganz neuen Lichte zeigten, sondern dafs sie überhaupt der ganzen Theorie eine ungeahnte Einfachheit und Durchsichtigkeit gaben, und dafs aufserdem eine Integrationsmethode möglich war, die wesentlich niedrigere Integrationsoperationen verlangte als die bisherigen.

Er gab in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania eine kurze Darstellung seiner Methode und schickte eine noch knapper gefafste Skizze davon an Clebsch nach Göttingen. Dieser wollte zuerst nicht an die Richtigkeit der Ergebnisse Lies glauben. Als aber nahezu gleichzeitig Adolph Mayer in Leipzig ebenfalls mit einer neuen Integrationsmethode hervortrat, die genau dieselben Integrationsvereinfachungen erreichte wie die von Lie, da erkannte Clebsch, dafs seine Zweifel grundlos gewesen waren. Er legte daher nicht nur diese Note von Lie der Göttinger Gesellschaft vor, sondern auch in demselben Jahre noch eine zweite, in der Lie zum ersten Male den Gedanken einer allgemeinen Invariantentheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ausspricht. Er setzt auseinander, dafs eine solche Gleichung gegenüber allen Berührungstransformationen keine Invarianten hat, dafs also durch Berührungstransformation jede solche Gleichung in jede andere übergeführt werden kann. Dagegen zeigt er, dafs es Eigenschaften giebt, die bei allen Punkttransformationen erhalten bleiben, und gründet darauf eine Classification der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Er hat, wenigstens in seinen Veröffentlichungen, sich später nicht eingehender mit dieser Classification beschäftigt; erst in der letzten Arbeit, die er überhaupt hat drucken lassen, fängt er an, eine dieser Classen, die semilinearen partiellen Differentialgleichungen, ausführlicher zu behandeln. Leider ist das einer der vielen Pläne, die er nicht mehr hat zu Ende führen können.

Das Zusammentreffen mit A. Mayer ist merkwürdig als ein neues Beispiel dafür, dafs zwei Mathematiker dieselbe Entdeckung nahezu gleichzeitig und unabhängig von einander gemacht haben. Eigentümlich ist es auch, dafs beide im Grunde auf ganz ähnliche Weise zu ihren Ergebnissen gelangten; denn beide bedienten sich

des schon früher von Du Bois-Reymond benutzten Schneidungsprocesses, nur dafs Lie diesen Procefs an den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung selbst ausführte, während Mayer ihn auf die totalen Systeme anwendete, auf deren Integration die vorgelegten Gleichungen zurückgeführt werden können. Für Lie gewann das Zusammentreffen mit Mayer und der darauf folgende rege Briefverkehr mit diesem noch besondere Bedeutung deshalb, weil er dadurch veranlafst wurde, seine bisher blofs begrifflich, durch Mannigfaltigkeitsbetrachtungen abgeleiteten Theorien auch analytisch zu beweisen und in die Sprache der Analysis zu übersetzen. Er hoffte auf diese Weise für allgemeinere Kreise verständlich zu werden, zumal da er es sehr schwierig fand, seine begrifflichen Überlegungen selbst in ganz einwandfreier Form darzustellen. Freilich stellte sich heraus, dafs die neue von ihm gewählte Darstellung die Analytiker doch nicht ganz befriedigte, und das ist der Verbreitung seiner Theorien sehr hinderlich gewesen. Auch dauerte es immerhin ziemlich lange, bis er dem analytischen Apparate die für seine Zwecke wirklich brauchbare Fassung gegeben hatte.

Inzwischen war ihm daheim eine gesicherte Stellung zû Teil geworden. Er hatte sich im Winter 1871—72 um eine erledigte Professur in Lund beworben, was ihm als Norweger gewifs nicht leicht gefallen sein wird. Um ihn seinem Vaterlande zu erhalten, richteten seine Freunde an das norwegische Storthing den Antrag, für ihn eine Professur an der Universität Christiania zu schaffen, und unter dem Eindrucke der höchst anerkennenden Gutachten, die verschiedene hervorragende Mathematiker des Auslandes über Lie abgaben, fafste das Storthing einen dahin gehenden Beschlufs. Am 1. Juli 1872 ward er zum Professor ernannt und konnte sich nunmehr ganz der Entwickelung seiner Ideen widmen, ohne seine kostbare Zeit durch Unterrichtgeben zersplittern zu müssen.

Der Erfolg blieb nicht aus, noch im Jahre 1872 machte Lie Entdeckungen, deren Weiterentwickelung ihn zu ganz neuen, ausgedehnten Theorien führte. Er hatte schon 1869 bemerkt, dafs eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in der Ebene durch Quadraturen integrirt werden kann, wenn man eine eingliedrige Gruppe von Transformationen kennt, bei der die Gleichung invariant bleibt. Jetzt fand er, dafs schon die Kenntnis der infinitesimalen Transformation, von der diese Gruppe erzeugt ist, hinreicht, um einen Eulerschen Integrabilitätsfactor der betreffenden Gleichung anzugeben, und dafs bei den meisten Differentialgleichungen erster Ordnung, die man seit Euler durch allerhand specielle Methoden integrirt hatte, der innere Grund für die Möglichkeit der Integration eben die Kenntnis einer solchen infinitesimalen Transformation war, bei der die Gleichung invariant bleibt. Er stellte sich daher überhaupt die Frage: welchen Nutzen kann man für die

Integration eines vorgelegten Systems von Differentialgleichungen aus dem Umstande ziehen, dafs man eine Anzahl von infinitesimalen Transformationen kennt, die das System invariant lassen? Die allgemeine Integrationstheorie, die sich hierauf gründen läfst, kündigte er schon im November 1872 in einer kurzen Note an, die als ein Programm für viele seiner späteren Arbeiten zu betrachten ist; sie umfafst nicht ganz zwei Seiten und führt den Titel: „Zur Theorie der Differentialprobleme.“ (Verhandlungen der Ges. d. Wiss. zu Christiania, 1872.)

Gleichzeitig stellte sich heraus, dafs der Begriff der infinitesimalen Transformation insbesondere für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eine ganz eigentümliche Bedeutung besafs. Das Problem, eine solche Gleichung zu integriren, deckte sich mit der Aufgabe, alle infinitesimalen Berührungstransformationen zu finden, bei denen die Gleichung invariant bleibt; das Poisson-Jacobische Theorem erschien nunmehr als ein ganz specieller Fall eines allgemeinen Satzes über infinitesimale Transformationen, die eine Gleichung invariant lassen, überhaupt eröffneten sich ganz neue Einblicke in die Theorie. Einige seiner Ergebnisse in dieser Richtung legte Lie noch im December 1872 der Christianiaer Gesellschaft vor in der Note: „Zur Invariantentheorie der Berührungstransformationen.“ Es handelt sich darin um die Aufgabe, eine Anzahl von bekannten Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für die Integration der Gleichung möglichst zu verwerten, und er geht dabei in der Weise zu Werke, dafs er alle bei Berührungstransformationen invarianten Eigenschaften bestimmt, die die Schar der bekannten Lösungen besitzt.

Diese „Invariantentheorie der Berührungstransformationen“ erschien fast unmittelbar nach Kleins Erlanger Programm: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“, und sie enthält das erste Beispiel einer ganz neuen Theorie, die den in diesem Programme entwickelten allgemeinen Grundsätzen entspricht. Lie hat aber mir gegenüber mehrfach betont, dafs er jene Invariantentheorie der Berührungstransformationen ganz unabhängig von den allgemeinen Ideen des Kleinschen Programms geschaffen habe, mit denen er allerdings damals schon durch persönliche Gespräche mit Klein bekannt war, und zu deren Entwickelung eben der persönliche Verkehr beider mit beigetragen hatte. Es sei für ihn von vornherein ganz natürlich gewesen, nach solchen Eigenschaften geometrischer Gebilde zu fragen, die bei den Transformationen einer gegebenen Gruppe erhalten bleiben, wie er es in seiner Invariantentheorie der Berührungstransformationen gethan, dagegen sei Kleins Gedanke, dafs eine grofse Anzahl von Gebieten der bisherigen Mathematik als Invariantentheorien gewisser Gruppen aufgefafst werden könne, für ihn neu und überraschend gewesen.

Das Jahr 1873 ist in Lies Leben besonders denkwürdig, weil in den Herbst dieses Jahres die Anfänge seiner Theorie der Transformationsgruppen fallen. Allem Anscheine nach wurde er auf diese Theorie geführt, als er die Integrationstheorie der Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen weiter ausbaute und für den Fall der vollständigen Systeme durchführte. Das betreffende Problem in seiner allgemeinsten Fassung konnte nämlich auf ein Problem derselben Art zurückgeführt werden, wo die bekannten infinitesimalen Transformationen in gewissen charakteristischen Beziehungen zu einander stehen, und es stellte sich heraus, daſs diese Beziehungen nichts anderes aussagen, als daſs man es mit den infinitesimalen Transformationen einer endlichen continuirlichen Gruppe zu thun hat. Jetzt faſste er den kühnen Gedanken, alle endlichen continuirlichen Transformationsgruppen auf Normalformen zu bringen, und da ihm das bei den Gruppen auf der Geraden ziemlich leicht gelang — sie konnten alle bei geeigneter Wahl der Veränderlichen projective Form erhalten —, so wagte er sich an die Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen und von Berührungstransformationen der Ebene. Durch geradezu schreckliche Rechnungen, so drückte er sich später selbst aus, gelang es ihm während des Winters 1873—74, alle diese Gruppen auf eine begrenzte Anzahl von bestimmten Typen zurückzuführen. Lie hat ja später die Methoden zur Bestimmung der Gruppen so vervollkommnet, daſs die Lösung der Aufgabe für die Ebene verhältnismäſsig sehr einfach ist. Daſs er aber damals, wo seine Methoden noch so unvollkommen waren, nicht erlahmte, sondern schlieſslich durchkam, ist ein Beweis von Energie, den ihm nicht so leicht einer nachmachen wird. Man weiſs nicht, was man mehr bewundern soll, die Kühnheit des Gedankens, alle Gruppen der Ebene zu bestimmen, oder die Ausdauer, mit der er diesen Gedanken durchgeführt hat.

Die erste Mitteilung, die er über seine neue Theorie veröffentlichte, erschien im December 1874 in den Göttinger Nachrichten. Er wies dabei nachdrücklich auf die Bedeutung hin, die seine Gruppenbestimmung für die Theorie der Differentialgleichungen haben würde; im Grunde war ja die ganze Bestimmung nur unternommen worden, um diese Theorie zu fördern. Das Problem, eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Ebene zu integriren, ist nämlich, sobald diese Differentialgleichung eine Gruppe gestattet, in zwei Aufgaben zerlegt: erstens muſs die Gruppe der Gleichung bestimmt, das heiſst, durch geeignete Wahl der Veränderlichen auf eine der von Lie gefundenen Normalformen zurückgeführt werden; zweitens muſs die Differentialgleichung integrirt werden, die aus der gegebenen durch Einführung der neuen Veränderlichen entsteht, und die nunmehr eine bekannte Gruppe gestattet. Jedes dieser Probleme

ist ein Specialfall der Lieschen Normalaufgabe: ein vollständiges System zu integriren, das gegebene infinitesimale Transformationen gestattet.

Allerdings hat Lie das hierin liegende Programm zur Behandlung der gewöhnlichen Differentialgleichungen der Ebene erst später (1882) im einzelnen ausgeführt, als er sich veranlafst sah, Halphén gegenüber seine Priorität zu wahren. Andererseits war seine ganze Methode überhaupt nur bei solchen Differentialgleichungen von Nutzen, die wirklich eine continuirliche Gruppe gestatten. Gleichungen, bei denen das nicht der Fall ist, waren damals seiner Methode noch unzugänglich, und erst, nachdem er den Begriff der unendlichen Gruppen und der Differentialinvarianten von solchen entwickelt hatte (von 1882 ab), wurde das anders.

Das Jahr 1873, dessen Herbst die Anfänge der Transformationsgruppen sah, war sonst der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und des Pfaffschen Problems gewidmet. Aufserdem aber übernahm Lie im Vereine mit Sylow den Auftrag, eine neue Ausgabe der Werke Abels herauszugeben, und obwohl der Löwenanteil der Arbeit an dieser Ausgabe Sylow zufiel, hat Lie doch in den acht Jahren, die die Herstellung der Ausgabe erforderte, ihr neben seinen andern Arbeiten sehr viel Zeit und Arbeitskraft gewidmet. Gleich hier sei noch erwähnt, dafs er sich zu Weihnachten 1872 mit Anna Birch verlobt hatte und im Laufe des Jahres 1874 heiratete. Dieser überaus glücklichen Ehe sind zwei Töchter und ein Sohn entsprossen.

Bis 1876 lebte Lie, wie er sich einmal ausgedrückt hat, nur in Transformationsgruppen und Integrationsproblem. Aus diesen Jahren stammen namentlich seine grofsen Arbeiten in den Annalen über die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen er seine Christianiaer Veröffentlichungen über diesen Gegenstand dem mathematischen Publicum vorlegte. Die hervorragende Wichtigkeit dieser Arbeiten ist heutzutage bei den Sachverständigen allgemein anerkannt, aber damals wurden sie wenig beachtet, jedenfalls war Lie über den Mangel an Interesse für seine Untersuchungen sehr enttäuscht, und er wandte sich daher nach 1876 wieder mehr der Geometrie zu, teilweise auch um sich von der schweren Arbeit an den Transformationsgruppen zu erholen. So entstanden seine Untersuchungen über Minimalflächen, über die Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe der geodätischen Linien, über Flächen constanter Krümmung und über Translationsflächen; daneben aber veröffentlichte er auch noch eine grofse Anzahl von Arbeiten über Transformationsgruppen und Integrationstheorie. Da ihm die Veröffentlichung in den Schriften der Christianiaer Gesellschaft nicht schnell genug ging, so hatte er im Jahre 1876 zusammen mit G. O. Sars und Worm Müller eine eigne Zeitschrift

gegründet, das Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, das seinen Bedürfnissen besser entsprach.

Im Jahre 1882 sah er sich veranlafst, sich wieder ungeteilt der Integrationstheorie und den Transformationsgruppen zuzuwenden; Halphén war nämlich inzwischen mit seinen Untersuchungen über die Invariants différentiels hervorgetreten und hatte eine Integrationstheorie von Differentialgleichungen entwickelt, die bei der allgemeinen projectiven Gruppe invariant bleiben. Da fühlte sich Lie verpflichtet, zu zeigen, dafs er dieses Gebiet schon längst beherrschte, und dafs seine Theorien eine ganz andere Tragweite hatten als die speciellen von Halphén. Deshalb veröffentlichte er von 1883 an in Christiania eine Reihe von Abhandlungen unter dem Titel: „Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe gestatten“ und gab darin eine erschöpfende Behandlung aller dieser Gleichungen. Ferner schickte er 1884 an die Annalen zwei grofse Arbeiten über Differentialinvarianten und über Differentialgleichungen, die endliche continuirliche Gruppen gestatten; hier entwickelte er einerseits die Theorie der Differentialinvarianten endlicher und unendlicher Gruppen in denkbarster Allgemeinheit, andererseits zeigte er, welche ausgedehnten Kategorien von Differentialgleichungen mit seiner alten Integrationstheorie behandelt werden können.

Schon längst hatte sich Lie in Christiania als Mathematiker sehr vereinsamt gefühlt. Er hatte keinen einzigen Schüler, der in seiner Richtung arbeitete. Die Anerkennung von aufsen blieb auch aus; abgesehen von seinen alten Freunden F. Klein und A. Mayer interessirte sich fast niemand für die Gruppentheorie, auf die Lie mit Recht ganz besonders stolz war; nur Picard erkannte 1883 die Bedeutung der Gruppentheorie öffentlich an, indem er in einer kurzen Note in den Comptes Rendus eine neue Anwendung dieser Theorie auf die linearen Differentialgleichungen andeutete. Es ist daher nicht zu verwundern, dafs Lie mich auf das freundlichste aufnahm, als ich im September 1884 zu einem längeren Aufenthalte nach Christiania kam. F. Klein und A. Mayer hatten mich dazu veranlafst, und der Zweck meiner Reise war einerseits, dafs ich Lies Theorien unter dessen eigener Anleitung kennen lernen sollte, andererseits, einen sanften Druck auf ihn auszuüben, damit er endlich eine zusammenhängende Darstellung einer seiner gröfseren Theorien unternähme, wobei ich ihm zur Hand gehen sollte. Lie hatte sich damals schon längst mit dem Gedanken getragen, ein gröfseres Werk über Transformationsgruppen zu schreiben, aber er war noch nicht dazu gekommen, einen wirklichen Anfang zu machen, und ohne den äufseren Anstofs, den mein Kommen gab, wäre daraus wohl ebenso wenig etwas geworden wie aus dem Werke über partielle Differentialgleichungen, das er in den siebziger Jahren geplant hatte, das

aber leider in den Anfängen stecken geblieben war. Jetzt aber wurde gleich der Plan zu einem Werke über Transformationsgruppen entworfen, und zwar beschlofs Lie, was ganz nach meinem Sinne war, dafs es nicht ein populäres Werk zur blofsen Einführung in die Elemente der Theorie werden sollte, sondern eine umfassende systematische Darstellung, die als ein grundlegendes Werk auf eine möglichst lange Dauer rechnen könnte; es sollte, wie Lie zu sagen pflegte, gleich von vornherein mit voller Musik angefangen werden.

Ich werde stets die drei Vierteljahre, die ich in Christiania im täglichen Verkehre mit Lie habe verleben dürfen, zu den glücklichsten Zeiten meines Lebens rechnen, ebenso wie die lange Reihe von Jahren, während deren ich Lies Mitarbeiter und Vertrauter war.

Lie war damals in der vollsten Kraft, eine Hünengestalt, die auf ungewöhnliche körperliche Stärke und Leistungsfähigkeit schliefsen liefs. In der That war er unter seinen Landsleuten als Fufsgänger berühmt, was etwas heifsen will bei einem Volke, das einen Nansen hervorgebracht hat; freilich kannten ihn die meisten eben nur als berühmten Fufsgänger, wufsten aber nicht, welches mathematische Genie Norwegen an ihm besafs.

Sein gerades, offenes, jeder Verstellung feindes Wesen erweckte unwillkürlich Vertrauen. Man fühlte vom ersten Augenblicke an, dafs er sich so gab, wie er war, dafs man ihm gegenüber ganz offen sein konnte. Bei allem gerechtfertigten Selbstbewufstsein war er doch voll Anerkennung für die Leistungen anderer Mathematiker, so wenig er daraus ein Hehl machte, wenn ihm eine Persönlichkeit unsympathisch war. Er gestand ohne weiteres zu, dafs verschiedene Gebiete der Mathematik, die für ihn nichts Anziehendes hatten, ihm fremd waren, aber er urteilte nicht über Sachen ab, die er nicht kannte, oder that das höchstens im Scherze; leider mufs ich sagen, dafs ich nicht wenige Mathematiker gefunden habe, die seinen Leistungen gegenüber diesen Grundsatz nicht befolgten.

Er war ein liebevoller Gatte und Vater; dafs aber die Mathematik in seinen Gedanken die allererste Stelle einnahm, war nicht zu verkennen. Seine sonstigen Interessen waren nicht gerade vielseitig. Zeitweilig nahm er an der Politik regen Anteil: er war da seiner Gesinnung nach ein radicaler Norweger. Auf die blühende Literatur seines Vaterlandes war er stolz, ohne sich jedoch zum Beispiel mit der pessimistischen und mystischen Richtung befreunden zu können, der sich Ibsen in seinen Dramen immer mehr zuwandte. Eine besondere Vorliebe hatte er für die Romane von Walter Scott und namentlich für die Seeromane des Kapitäns Marryat. Er war ein grofser Verehrer der Naturschönheiten seines Vaterlandes, in dessen Gebirgen er womöglich jedes Jahr ausgedehnte Wanderungen ausführte.

Das ist in nur allzuschwachen Umrissen das Bild, das ich von dem Menschen Lie im Herzen trage. Der Wandel, der in den letzten Jahren unter dem Einflusse seiner Krankheit mit ihm vorgegangen war, hat dieses Bild zwar zeitweilig trüben, nicht aber ganz verdunkeln können. Jetzt, wo er nicht mehr ist, sind alle diese Trübungen vergessen, und ich gedenke nur noch daran, was er mir so lange Jahre hindurch gewesen ist. Ich zweifle nicht, dafs es allen, die jemals in nähere Beziehungen zu ihm getreten sind, ebenso ums Herz sein wird.

Ostern 1886 folgte Lie einem Rufe an die Universität Leipzig als Nachfolger Kleins. Die Früchte der umfassenden Thätigkeit, die er da entwickelt hat, sind vor aller Augen; selbst wer den Wert der Lieschen Theorien noch nicht erkannt hat, dem mufs doch der Umfang der von ihm geschaffenen, durchaus originellen Werke Achtung abnötigen. In Leipzig fand Lie nunmehr auch Schüler, die in seinen Theorien arbeiteten; namentlich gewann er in Scheffers einen Schüler, mit dessen Hülfe er das Bedürfnis nach einer elementar gehaltenen Einführung in seine Integrationstheorie und Gruppentheorie befriedigen konnte, ein Bedürfnis, zu dessen Befriedigung das grofse, systematische Werk über Transformationsgruppen seiner ganzen Anlage nach nicht geschaffen war. Die Darstellung seiner älteren geometrischen Untersuchungen, die Lie später zusammen mit Scheffers unternahm, ist leider nicht über den ersten Band hinaus gediehen, und die geplante Fortsetzung der Theorie der Transformationsgruppen — sie sollte die unendlichen Gruppen, die Differentialinvarianten und die Integrationstheorie behandeln — ist überhaupt ganz in den Anfängen stecken geblieben.

Nach und nach kamen auch von auswärts junge Mathematiker, die bei Lie Anregung zu wissenschaftlichen Arbeiten suchten. Besonders schmeichelhaft war es ihm, dafs von 1888 ab nach einander eine ganze Reihe von Schülern der Pariser École Normale sich längere Zeit in Leipzig aufhielten, um Lies Theorien an der Quelle zu studiren. Allmählich begannen auch einzelne Mathematiker, die nicht seine Schüler waren, an dem Ausbau der Gruppentheorie mitzuarbeiten.

Im Herbste 1889 mufste Lie seine wissenschaftliche Thätigkeit auf längere Zeit unterbrechen, da er von einer schweren Neurasthenie befallen wurde, zu der verschiedene Ursachen mitgewirkt haben. Er war bei seiner Übersiedelung nach Leipzig gerade in die Periode schnellen Niedergangs der Zahl der Mathematikstudirenden gekommen, die auf die vorherige Überfüllung folgte. In den Specialvorlesungen, die er über seine eigenen Sachen hielt, bekam er zwar immer noch eine einigermafsen befriedigende Zahl von Zuhörern, aber in seinen anderen Vorlesungen nahm die Zahl der Zuhörer mit jedem Halbjahre weiter ab, und das wirkte niederdrückend auf sein Gemüt.

Auch über den Mangel an Anerkennung von Seiten der Mathematiker glaubte er nicht mit Unrecht sich beklagen zu müssen. Dazu kam, dafs die jahrelang fortgesetzte, geistige Anstrengung auch an seiner Riesennatur nicht spurlos vorübergegangen war. Die ungewohnten Verhältnisse in Leipzig und das ungewohnte Klima wirkten ebenfalls mit. Er fing an, empfindlich und mifstrauisch zu werden. Das fühlte er auch selbst und äufserte einmal zu mir, wenn erst das grofse Werk über Transformationsgruppen fertig wäre, würde er ein ganz anderer Mensch werden.

Leider kam es anders. Nach den Herbstferien von 1889 erfolgte ein vollständiger Zusammenbruch. Er konnte gar keinen Schlaf mehr finden und glaubte, alles sei zu Ende, er werde niemals seine alte Geisteskraft wiedergewinnen. Ein längerer Aufenthalt in einer Nervenheilanstalt bei Hannover hatte jedoch die beste Wirkung auf sein Befinden. Allmählich stellte sich der Schlaf wieder ein, er fafste neuen Mut, und schon im Frühjahr 1890 begann er wieder wissenschaftlich zu arbeiten. Es waren seine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie und über die unendlichen Gruppen, die er dort ausführlich zu Papier brachte.

Im Winterhalbjahre 1890—91 konnte er seine Vorlesungen wieder aufnehmen. Seine wissenschaftliche Leistungsfähigkeit und seine Erfinderkraft waren wieder ganz die alten, wenigstens war da kein Unterschied gegen früher zu bemerken. Aber als Mensch war er nicht mehr der alte und wurde es auch nicht wieder. Seine Empfindlichkeit und sein Mifstrauen steigerten sich allmählich immer mehr, und er machte dadurch sich selbst und seinen besten Freunden das Leben immer schwerer. Die äufsere Anerkennung, die er früher so schmerzlich vermifst hatte, fand er zwar jetzt in reichstem Mafse: die bedeutendsten Akademien wählten ihn eine nach der andern zu ihrem Mitgliede, bezeichnender Weise fehlte darunter nur die Berliner Akademie. Aber auch diese äufseren Erfolge waren nicht genügend, sein pessimistisches Urteil über die Menschen im allgemeinen und über die Mathematiker im besonderen freundlicher zu gestalten.

Ich will nicht länger bei der Schilderung des Gemütszustandes verweilen, in dem er sich in den letzten Jahren seines Lebens befand, und der zum Teil eine Nachwirkung jener früheren nervösen Erkrankung war, zum Teil ein Vorbote der Krankheit, die sein Ende herbeiführen sollte. Für alle seine Freunde ist die Erinnerung daran höchst schmerzlich. Lassen wir daher einen Schleier darüber fallen.

In Norwegen war unterdessen im Jahre 1896 eine Bewegung in Gang gesetzt worden, um Lie für sein Vaterland zurückzugewinnen. Elling Holst hatte sich mit Björnson in Verbindung gesetzt und einen Antrag an das Storthing ausgearbeitet, dafs Lie nach

Christiania zurückberufen werden sollte. Da dieser Antrag die Unterschriften der hervorragendsten Männer Norwegens gefunden hatte, so gab das Storthing ihm Folge und beschlofs, für Lie unter ganz ausnahmsweise glänzenden Bedingungen die Stelle eines Professors „i Transformationsgruppernes Theori“ zu schaffen. Immerhin dauerte es noch längere Zeit, bis Lie dem ehrenvollen Rufe Folge leistete; er konnte sich doch nicht so schnell von Leipzig losreifsen, obwohl er immer die Rückkehr nach Christiania im Auge gehabt und keineswegs daran gedacht hatte, sein Leben in Leipzig zu beschliefsen. Endlich im September 1898 siedelte er wieder nach Christiania über, aber nur um dort zu sterben. Zuerst konnte er noch wenigstens auf seiner Wohnung einigen amerikanischen Studenten, die ihm von Leipzig gefolgt waren, eine Vorlesung über Differentialgleichungen halten, aber bald mufste er auch das aufgeben. Eine perniciöse Anämie verzehrte langsam seine Kräfte, und am 18. Februar 1899 entschlief er sanft und ruhig.

Leider hatte er bei seiner Rückkehr unterlassen, die Seinigen für den Fall seines Todes sicherzustellen, und seine Freunde mufsten daher noch einmal einen Antrag an das Storthing richten, damit seine Familie vor Not gesichert würde, woran es das Storthing selbstverständlich nicht fehlen liefs.

Der wahrhaft unersetzliche Verlust, den die Wissenschaft durch Lies Tod erlitten hat, wird noch lange fühlbar sein. An uns Mathematikern ist es jetzt, das Vermächtnis, das er uns hinterlassen hat, zu verwalten und die Wege, die er gebahnt hat, weiter zu verfolgen. Wir deutschen Mathematiker sollten da in erster Linie stehen, hat doch Lie mit verschwindenden Ausnahmen alle seine Werke in deutscher Sprache geschrieben, und ist er doch fünfundzwanzig Semester lang eine Zierde einer der ältesten deutschen Hochschulen gewesen.

In einer von Henrik Jäger herausgegebenen norwegischen Literaturgeschichte hat Elling Holst seinen ehemaligen Lehrer Lie als den Napoleon der Mathematik bezeichnet. Mir scheint der Vergleich unglücklich: Napoleon, dieser unübertroffene Organisator, und Lie, bei dem gerade die Gabe zu organisiren am schwächsten ausgebildet war! Ich wüfste überhaupt in Wissenschaft, Kunst und Geschichte niemanden, mit dem Lie verglichen werden könnte: er ist eben einzig in seiner Art und unvergleichlich.

Eugen von Lommel.

Von **Ludwig Boltzmann** in Wien.

Ein arbeitsreiches Leben, in der Jugend nicht ohne Entbehrungen und Mühsale, später aber reich an Erfolgen und köstlichen Früchten, durchschnitt der Tod, als am 19. Juni 1899 Professor Dr. Eugen von Lommel starb. Obwohl der Verfasser dieser Zeilen mit ihm vier Jahre lang als engster Fachcollege zusammenwirkte und in vertrautester freundschaftlicher Beziehung stand, so sprach er mit ihm doch fast ausschliefslich über Wissenschaft und Berufsthätigkeit. Die nachfolgenden biographischen Notizen und Charakterschilderungen verdankt er der Güte der Witwe des Verewigten, teilweise entnimmt er sie auch einem Aufsatze Professor Günther's. So mufste also Lommel sterben, bis der Verfasser in die Eigentümlichkeiten seines Gemütes und Herzens nähern Einblick gewann.



Lommel's Grofsvater mütterlicherseits war Apotheker, väterlicherseits Verwalter in Aschaffenburg, sein Vater war Arzt in Edenkoben, später Bezirksarzt in Hornbach.

In Edenkoben wurde Eugen v. Lommel als der älteste von vier Brüdern am 19. März 1837 geboren, dort absolvirte er auch die Lateinschule, mufste dann aber das elterliche Haus verlassen, um in Speyer das Gymnasium zu besuchen. Diese Zeit war für Lommel reich an Entbehrungen und harter Arbeit, trug aber doch viel dazu bei, nicht nur scharfe realistische Beobachtung und idealistische Weltanschauung gleichmäfsig in ihm zu entwickeln, sondern auch seinen Charakter für die späteren Kämpfe des Lebens zu stählen. Er mufste nicht nur ganz selbständig für sich, sondern bald auch für seinen jüngeren Bruder sorgen, mit dem er längere Zeit sogar in einem Bette schlief. Aufser den ohnehin nicht karg

bemessenen Obligatstunden lernte er noch mit grofsem Erfolge zeichnen und malen und besuchte nebstdem abends die Realschule, um seinen Durst nach naturwissenschaftlichen Kenntnissen zu stillen. Letzterer wird uns recht anschaulich durch die Lebhaftigkeit, mit der er in der Erlanger Rectoratsrede das Entzücken schildert, das er empfand, als er zum ersten Male tiefern Einblick in die Gesetze des Verbrennens, des Blutumlaufs, der Wirksamkeit einer galvanischen Batterie u. s. w. gewann.

Ein geradezu staunenswertes Zeichen seines damaligen Fleifses liegt noch heute vor, nämlich 116 grofse zoologische Tafeln, welche er nach Oken's Atlas, den anzuschaffen ihm die Mittel fehlten, in so vollendeter Weise nachzeichnete und malte, dafs man sie erst bei genauerer Ansicht von den Kupferstichen des Originales unterscheidet; ferner zwei grofse Pflanzenbücher, nach der Natur reizend gemalt.

Obwohl ihn seine Kameraden gern leiden mochten, war doch seine Lebensführung damals, wie es bei den vielen Arbeiten, die Pflicht und Neigung ihm auferlegten, nicht anders möglich war, eine mehr ernste und zurückgezogene. Eine Geldsumme, welche er von der Grofsmutter behufs Erlernung der Tanzkunst erhalten hatte, verwendete er auf Büchereinkäufe; aber als im Jahre 1848 auch in der Pfalz die Revolution ausbrach, schlofs er sich, elf Jahre alt, einem Haufen von Aufrührern an, der gegen die Festung Germersheim marschirte. Allerdings zog dieser bald mit einem einzigen Verwundeten, der von seinem Hintermanne getroffen worden war, wieder ab, und auch Lommel mufste gleich vielen anderen später in diesen Bestrebungen, wie Karl Moor sagt, Bubengedanken erblicken.

Unter seinen Lehrern am Gymnasium zu Speyer, übte Schwerdt, der Verfasser der bekannten Monographie über die Beugung des Lichtes, einen nicht nur grofsen, sondern geradezu für das ganze Leben entscheidenden Einflufs auf Lommel aus; denn die Interferenz und Beugung des Lichtes blieb zeitlebens auch eines der Lieblingsthemen des letzteren.

Im Jahre 1854, erst $17\frac{1}{2}$ Jahre alt, inscribirte sich Lommel an der Universität München, wo Jolly, Seydel, Lamont, Liebig, Kobell u. s. w. seine Lehrer wurden. Die Zeit der Universitätsstudien war für ihn eine sehr glückliche. Neben seinem speciellen Fache studirte er so manches andere, wie Philosophie, Ästhetik und moderne Sprachen. Er besuchte auch fleifsig das Schauspielhaus, Opernhaus und die reichen Kunstsammlungen Münchens und pflegte heitere Geselligkeit im Kreise gleichgesinnter junger Männer.

1858 bestand er in München die Prüfung für das Gymnasiallehramt mit der Note sehr gut, ein Jahr darauf nahm er eine angenehme Hofmeisterstelle beim Landtagsabgeordneten und Weingutbesitzer Herrn Buhl in Deidesheim an. Im Jahre 1860 erhielt er eine Lehrerstelle für Mathematik und Physik an der Kantonschule

zu Schwyz, die er fünf Jahre darauf mit einer Oberlehrerstelle des gleichen Faches an einer analogen Anstalt zu Zürich vertauschte. In letzterer Stadt habilitirte er sich auch für Physik an der Universität und am eidgenössischen Polytechnicum.

Seinen Aufenthalt in der Schweiz benutzte er zu zahlreichen Ausflügen und Gebirgstouren, welche sich auch in das benachbarte Italien erstreckten. In Zürich verkehrte er mit Gottfried Keller, Vischer, Wislicenus, Prym, Ebert, Fick, Rose und anderen. Im Herbste 1867 kehrte er wieder nach Deutschland im engeren Sinne zurück, indem er zunächst die Lehrkanzel für Mathematik und Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Hohenheim annahm, wo vor und nach ihm noch so viele bedeutende Männer lehrten. Als charakteristischer Zug mag erwähnt werden, daſs er sich damals, obwohl er über eine groſse Amtswohnung in Hohenheim verfügte, dazu noch in Stuttgart ein Absteigequartier mietete, wo er fast jeden Sonntag zubrachte, Theater und Concerte besuchte und sich besonders mit der Familie des Physikers P. Zech innig befreundete.

Schon ein Jahr darauf nahm er jedoch einen Ruf als Professor der Physik an die Universität Erlangen an, wo er der Nachfolger des an das neugegründete Polytechnicum zu München berufenen Professors Beetz wurde. Hiemit hatte sich der Traum seiner Jugend erfüllt, und dort war es auch, wo er sich mit Fräulein Louise Hegel, der Tochter des berühmten Philosophen, vermählte, mit der er bis an sein Ende in glücklichster Ehe lebte.

Als Universitätslehrer fand er erst die volle Gelegenheit zur Entfaltung seiner Kräfte. Seine Experimentalvorlesungen fanden allgemeinen Beifall, der Kreis seiner Schüler, von denen viele interessante Experimentaluntersuchungen ausarbeiteten, erweiterte sich von Jahr zu Jahr. Dort entstanden auch viele seiner bedeutendsten wissenschaftlichen Arbeiten. Er war einmal Prorector und mehrmals Decan der philosophischen Facultät der Friedrich-Alexander-Universität. 1869 erhielt er von dort einen Ruf an das eidgenössische Polytechnicum zu Zürich, den er jedoch ablehnte.

Nach 17-jähriger Lehrthätigkeit in Erlangen wurde er 1886 zu gleich erfolgreicher Thätigkeit als der Nachfolger Professor Jolly's auf die Lehrkanzel für allgemeine Physik an die Universität München berufen, wo er zugleich die Conservatorstelle für die Normalmaſse und Gewichte des bayrischen Staates übernahm. 1876 wurde er zum correspondirenden, 1884 zum auſserordentlichen und 1886 zum ordentlichen Mitgliede der bayrischen Akademie der Wissenschaften gewählt.

In München war er vor allem bemüht, den Bau eines den neueren Anforderungen der Wissenschaft entsprechenden physikalischen Institutes für die Universität zu ermöglichen. Die gröſsten Schwierigkeiten stellten sich diesem Unternehmen anfänglich entgegen, welche

er aber endlich alle durch seine mit diplomatischer Klugheit gepaarte Energie und Arbeitsamkeit überwand. Im Jahre 1894 wurde das neue physikalische Institut der Münchener Universität eröffnet, aber nur wenige Jahre sollte Lommel an demselben wirken. Für das Studienjahr 1898/99 hatte ihn die Ludwig-Maximilians-Universität zu München zum Rector gewählt, und noch im Verlaufe desselben, mit der höchsten akademischen Würde bekleidet, starb er am 19. Juni 1899 an einer Krankheit, welche er schon lange mit sich herumtrug, deren plötzliche Verschlimmerung bis zum letalen Ausgange aber doch nicht erwartet wurde.

Professor Lommel ist vor allem charakterisirt durch ungewöhnliche Gedächtniskraft, Arbeitsamkeit und Allseitigkeit. Das fünfstündige Hauptcolleg über Experimentalphysik las er Jahr für Jahr in unübertrefflicher Weise unter aufserordentlichem Andrange der Studirenden, leitete dabei die praktischen Übungen für Anfänger und ging den in seinem Laboratorium selbständig Arbeitenden an die Hand, so dafs zahlreiche unter seiner Leitung ausgeführte Dissertationen und sonstige wissenschaftliche Experimentaluntersuchungen Jahr für Jahr aus demselben hervorgingen. Jeder mit den Verhältnissen Vertraute weifs, dafs diese Thätigkeit an einer Hochschule von der Frequenz der Münchener Universität mit den damit verbundenen Prüfungen der Mediciner, Apotheker, Lehramtscandidaten und Doctoranden der Philosophie in der Hand eines einzigen vereint, schon der Grenze der Leistungsfähigkeit eines Menschen sehr nahe liegt. Lommel hielt aber obendrein noch regelmäfsig Specialvorlesungen aus dem Gebiete der mathematischen Physik und das mathematisch-physikalische Seminar ab und war dabei fortwährend auf dem Gebiete der Wissenschaft durch eigene Forschung und literarische Publication thätig. Er hat manche neue wissenschaftliche Thatsache durch Experiment oder Rechnung gefunden und in seinen Abhandlungen mit ruhiger Einfachheit und bestimmter Klarheit dargestellt. Diese tritt ebenso in den von ihm geschriebenen Lehrbüchern und populären Schriften zu Tage, ja in letzteren (ich erwähne nur seinen kurzen Aufsatz über Spectralanalyse) zeigt er sich geradezu als Meister populärer Darstellung.

Dabei mangelt es ihm nicht an dem bei Physikern manchesmal vermifsten Sinn und Interesse für das Historische. Er ist ferner nicht nur in Mathematik und Physik gleich bewandert, sondern hat auch feines Verständnis für die technischen Anwendungen, wie er theoretisch in seinem Vortrage über die moderne Entwickelung der Physik, praktisch bei Anordnung der elektrotechnischen Einrichtungen des neuen physikalischen Institutes der Universität München zeigte.

Obwohl er sich seiner Specialwissenschaft mit solcher Liebe hingab, dafs er einmal sagte, wenn er nochmals zur Welt käme, würde er wieder Physiker werden, so beschränkte sich sein Interesse

doch keineswegs auf dasselbe. Die Studien auf dem Gebiete der beschreibenden Naturwissenschaften, die er in seiner Jugend gemacht hatte, entschwanden seinem Gedächtnisse niemals, und er wufste nicht nur die Namen der meisten gewöhnlicheren Tiere und Pflanzen, sondern auch deren Stellung im Systeme, Lebensbedingungen und Eigenschaften anzugeben. Dafs er die Zeichen- und Malkunst nicht nur schätzte, sondern auch selbst mit einer für Dilettanten nicht gewöhnlichen Fertigkeit ausübte, wurde bereits erwähnt. Auch für Musik und Poesie besafs er feines Verständnis; in der ersteren zog er die alten Classiker der neueren Musik vor, in der letzteren schätzte er besonders die formvollendeten Dichtungen, wie die von Rückert, Platen und Bodenstedt. Von Goethe kannte er nicht blofs die poetischen, sondern auch die naturwissenschaftlichen Werke aufs genaueste und kommt auf letztere in seinen Abhandlungen manchmal zurück.

Wie der Schreiber dieser Zeilen und der von ihm vor wenigen Tagen gefeierte Loschmidt gehörte auch Lommel zu jenen Nichtphilologen, die ihren Homer noch im Mannesalter immer und immer wieder lasen. Wie kommt es, dafs diese Menschengattung nun auszusterben scheint? Beim helläugigen Kinde des Ägisträgers! der Sinn für Schönes und Grofses ist unseren Söhnen nicht abhanden gekommen; diese lauschen doch Shakespeare's Worten, Beethoven's Tönen mit der gleichen Begeisterung wie einst wir. Beginnt etwa der Stern Homer's zu erbleichen in der Morgenröte des 20. Jahrhunderts, oder treffen die wissenschaftlich doch weit besser geschulten Philologen von heute Herz und Gemüt der Jugend nicht mehr so wie unsere Lehrer? Würde wohl gar, wenn sie heute lebten, Achill dem Gymnasium mit seiner ganzen Schnellfüfsigkeit entlaufen und Sokrates an die Spitze des Vereines für Mittelschulreform treten?

Jedenfalls scheint mir Lommel den Wert der classischen Studien einseitig aufgefafst zu haben, wenn er in seiner Erlanger Prorectoratsrede den bei einem Physiker befremdenden, für Österreicher geradezu unverständlichen Wunsch ausspricht, die Physik möge an Gymnasien nicht gelehrt werden, um die Arbeitszeit für die classischen Sprachen nicht einzuschränken.

Obwohl der Schreiber dieser Zeilen, wie schon bemerkt, mit Lommel selten über anderes als über Wissenschaft und Amt zu sprechen Gelegenheit hatte, so empfand er doch deutlich, dafs er Lommel zu den Ausnahmen zählen konnte, an die heranzutreten er ungescheut gewagt hätte, wenn er uneigennützigen Rates oder freundschaftlicher That bedurft hätte, und dafs die edle biedere Gesinnung, die Lommel in allen Lebenslagen bewährte, kein äufserer Anstrich war.

Wenn nun noch einiges zur Charakterisirung der wissenschaftlichen Werke Lommel's gesagt werden soll, so fallen an dieser

Stelle natürlich zunächst diejenigen ins Gewicht, welche sich auf mathematischem Gebiete bewegen. Lommel hatte bis zu seiner Ernennung zum Universitätsprofessor immer neben der Physik auch Mathematik gelehrt und verfaſste eine nicht geringe Anzahl von Schriften rein mathematischen Inhaltes. Vor allen ist da sein kleines Buch über die Bessel'schen Functionen zu nennen. Die Theorie dieser für den reinen Mathematiker wie für den Physiker ebenso wichtigen transcendenten Functionen wird dort in origineller, leicht faſslicher und doch gründlicher Weise dargestellt. Sie werden durch zwei einer einzigen linearen Differentialgleichung äquivalente Gleichungen definirt, aus denen alle ihre Eigenschaften abgeleitet werden. Ihr Begriff wird auch durch Einführung gebrochener Indices erweitert, und die einschlägigen Reihenentwicklungen werden besonders elementar und übersichtlich abgeleitet. Zum Schlusse wird die Integration von Differentialgleichungen, besonders der Riccati'schen durch Bessel'sche Functionen gelehrt und die Rechnung mit denselben durch eine beigegebene Tafel erleichtert.

Auſserdem veröffentlichte Lommel noch zahlreiche Abhandlungen rein mathematischen Inhaltes, hauptsächlich in Grunert's Archiv, Schlömilch's Zeitschrift und den mathematischen Annalen. Dieselben behandeln immer Gebiete der Mathematik, welche in der Physik Anwendung finden; hauptsächlich die Integration von Differentialgleichungen, Berechnung bestimmter Integrale und transcendenter Functionen, besonders der Bessel'schen und deren Anwendungen in mathematischen und physikalischen Aufgaben, dann auch Probleme der analytischen Geometrie.

Hieran schlieſsen sich die mathematisch-physikalischen Abhandlungen Lommel's. Dieselben betreffen vorwiegend Gegenstände der Optik, einige in Wiedemann's Annalen publicirte die Fundamente der Theorie des Lichtes, besonders der Dispersion, Polarisation und Doppelbrechung. In diesen verwickelte er sich mit mehreren Physikern, besonders Voigt, in eine heftige Polemik, und es war dies einer der wenigen Punkte, bei deren Berührung der sonst so Gleichmütige und Objective empfindlich werden konnte. Von diesem Streite gilt wohl auch Schiller's Wort: „Aber es bleichet indes Dir wie mir sich das Haar"; nicht im buchstäblichen Sinne, denn während der eine der Streitenden nun dort weilt, wo Helmholtz und Zöllner Arm in Arm lustwandeln, so ist der andere noch in voller Kraft eine der immer seltener werdenden Ecksäulen der mathematischen Physik. Schiller's Wort gilt vielmehr bezüglich der streitenden Theorien selbst, da unter dem Einflusse der elektromagnetischen Lichttheorie über beide zur Tagesordnung übergegangen wurde.

Die übrigen Abhandlungen Lommel's über Theorie der Optik betreffen specielle Probleme derselben; die isochromatischen Flächen, die Isogyren, Curven gleicher Lichtintensität u. s. w., bei der Inter-

ferenz des polarisirten Lichtes in doppeltbrechenden Krystallflächen; die Berechnung von Beugungs- und anderen Interferenzerscheinungen, die Theorie der Fluorescenz, Phosphorescenz, Spectralanalyse, Drehung der Polarisationsebene u. s. w. Aufserdem hat Lommel einige theoretische Abhandlungen über Wärme und Elektricitätstheorie geschrieben, wovon die über den Zusammenhang der Äquipotentiallinien und magnetischen Kraftlinien erwähnt werden mögen. Letztere stellte er auf stromdurchflossenen Platten in sehr schöner Weise mittelst Eisenfeile dar, was uns zu den rein experimentellen Arbeiten Lommel's überleitet.

Einige von diesen behandeln ebenfalls Fluorescenz und Phosphorescenz, besonders dichroitische Fluorescenz, und erörtern ihren Zusammenhang mit der Frage nach der Schwingungsrichtung der Ätherteilchen im polarisirten Lichte, welche Frage freilich heutzutage durch die elektromagnetische Lichttheorie ebenfalls in ein ganz anderes Licht gerückt wurde. In einer anderen Abhandlung wird gezeigt, dafs durch die Wirkung von rotem und ultrarotem Licht fluorescirende Substanzen für die Wirkung des Fluorescenz erregenden Lichtes gewissermafsen abgestumpft werden können, und darauf wird eine experimentelle Methode gegründet, helle oder dunkle Linien im Ultrarot sichtbar zu machen.

Dann seien noch erwähnt die Abhandlungen Lommel's über die Lichtenberg'schen Figuren, als räumliche Erscheinung aufgefafst, über das Leuchten der Wasserhämmer, über die als Heiligenschein bezeichnete optische Erscheinung, ferner über zwei von ihm construirte optisch-physiologische Apparate, das Erythroskop und Melanoskop, über die experimentelle Demonstration der Zusammensetzbarkeit aller Farben aus drei Grundfarben, endlich noch einige Abhandlungen pflanzenphysiologischen und meteorologischen Inhaltes.

Unter den populären Schriften Lommel's nimmt die erste Stelle ein das elementare Lehrbuch der Physik; daran reiht sich das Buch: „Wind und Wetter“, das über das Wesen des Lichtes, das Lexikon der Physik und Meteorologie, sowie mehrere Reden und populärwissenschaftliche Zeitungsartikel. In der Monographie über die Interferenz des gebeugten Lichtes wird eine neue, sowohl experimentelle als auch mathematische Behandlung dieses Problemes in streng wissenschaftlicher Form gezeigt.

Ich lasse noch ein Verzeichnis sämtlicher Publicationen Lommel's folgen, welches um so eher willkommen sein dürfte, als das im dritten Bande von Poggendorff's biographisch-literarischem Handwörterbuche gegebene manche Lücken aufweist.

1. 1860. Lehrsatz über den Flächeninhalt eines geraden Cylindermantels, welcher von einem anderen senkrecht geschnitten wird. Grun. Arch. 34, p. 286.

2. 1861. Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichtes. Grun. Arch. XXXVI, p. 385.
3. 1861. Methode zur Berechnung einer Transcendenten. Ibid. XXXVII, p. 349.
4. 1861. Über einige allgemeine Formeln zur Auswertung bestimmter Integrale. Ibid. XXXVII, p. 433.
5. 1862. Versuch einer Theorie der Fluorescenz. Pogg. Ann. 117, p. 642.
6. 1862. Lehrsatz von den kürzesten Linien auf Rotationsflächen. Grun. Arch. XXXVIII, p. 201.
7. 1862. Einfachste Herleitung zweier bekannter Integralformeln. Ibid. XXXVIII, p. 206.
8. 1862. Über die Beugung des polarisirten Lichtes. Ibid. XXXVIII, p. 209.
9. 1863. Zur Integration linearer Differentialgleichungen; die Riccati'sche Gleichung. Ibid. XL, p. 101
10. 1863. Die Interferenzerscheinungen zweiaxiger senkr. zur ersten Mittellinie geschnitt. Krystallplatten in homog. pol. Licht. Pogg. Ann. 120, p. 69.
11. 1865. Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnittes. Grun. Archiv. XLIII, p. 231.
12. 1867. Über Lemniscatische Coordinaten. Schlöm. Zeitschr. XII, p. 45.
13. 1867. Bemerkung hinsichtlich der Priorität einiger Sätze über confocale Kegelschnitte. Ibid., p. 276.
14. 1867. Theorie der Abendröte und verwandter Erscheinungen. Pogg. Ann. 131, p. 105.
15. 1867. Über die Lichtmenge, welche im Polarisationsapparat durch eine zur optischen Axe oder zur ersten Mittellinie senkrecht geschnittene Krystallplatte hindurchgeht. Schlöm. Zeitschr. XII, p. 514.
16. 1868. Die Fraunhöfer'schen Beugungserscheinungen in elementarer Darstellung. Progr. Dresden 1868; Schlöm. Zeitschr. 14, p. 1. 1869.
17. 1868. Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig, Teubner.
18. 1869. Integration der Gleichung $x^{m+\frac{1}{2}} \frac{\partial^{2m+1} y}{\partial x^{2m+1}} \mp y = 0$ durch Bessel'sche Functionen. Math. Ann. II, p. 624.
19. 1869. Über die mechanische Theorie der Wärme. Zöll. ök. Fortschr.
20. 1869. Der Föhn. Ibid. III, p. 300.
21. 1870. Über Spectralanalyse. Ibid.

22. 1870. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Math. Ann. III, p. 475.
23. 1870. Über die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung. Schlöm. Zeitschr. XV, p. 141.
24. 1870. Das Leuchten der Wasserhämmer. Pogg. Ann. 141, p. 460.
25. 1871. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Math. Ann. IV, p. 103.
26. 1871. Über das Verhalten des Chlorophylls zum Licht. Pogg. Ann. 143, p. 568.
27. 1871. Erythroskop und Melanoskop. Ibid. 143; Erl. Ber. 3, p. 102.
28. 1871. Zur Frage über die Wirkung farbigen Lichtes auf die Assimilationsthätigkeit der Pflanzen. Pogg. Ann. 145, p. 442.
29. 1871. Über Fluorescenz. Ibid. 143, p. 26; Erl. Ber. 3, p. 39; Carl's Rep. VII, p. 65.
30. 1871. Gefärbte Gelatineblättchen als Objecte für das Spectroskop. Pogg. Ann. 143, p. 656; Erl. Ber. 3, p. 105; Carl's Rep. VII.
31. 1873/74. Über den Lichtschein um den Schatten des Kopfes. Pogg. Ann. I, p. 10; Erl. Ber. 5, p. 72.
32. 1875. Elementare Behandlung einiger optischer Probleme. Schlöm. Zeitschr. XX, p. 212.
33. 1875. Über eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function. Math. Ann. IX, p. 425.
34. 1875/76. Über die Interferenz des gebeugten Lichtes. Pogg. Ann. Erg. 8, p. 82, 225; Erl. Ber. 7, p. 106; 8, p. 1. 56. 121. Carl's Rep. XII, p. 226.
35. 1876. Über die Intensität des Fluorescenzlichtes. Pogg. Ann. 160, p. 75; Carl's Rep. VIII, p. 610; Erl. Ber. 9, p. 1.
36. 1876. Elektrische Staubfiguren im Raum. Carl's Rep. XII, p. 313; Pogg. Ann. Erg. 8, p. 506; Erl. Ber. 8, p. 142.
37. 1876. Über Fluorescenz. Pogg. Ann.; Erl. Ber. 8, p. 188; Carl's Rep. VIII, p. 591.
38. 1876. Über die kleinste Ablenkung im Prisma. Pogg. Ann.; Erl. Ber. 9, p. 14.
39. 1877. Bemerkungen über die Polarisation des Regenbogens.
40. 1877. Über Fluorescenz. Wied. Ann. III, p. 113; Erl. Ber. 9, p. 196.
41. 1877. Theorie der Absorption und Fluorescenz. W. Ann. III, p. 251; Erl. Ber. 10, p. 20.
42. 1878. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Math. Ann. XIV, p. 510.
43. 1878. Theorie der normalen und anormalen Dispersion. W. Ann. III, p. 339; Erl. Ber. 10, p. 65.

44. 1878. Theorie der Doppelbrechung. W. Ann. IV, p. 55; Erl. Ber. 10, p. 98.
45. 1878. Über zwei neue fluorescirende Substanzen. W. Ann. VI, p. 115; Erl. Ber. 10, p. 210.
46. 1879. Über die Newton'schen Staubringe. W. Ann. VIII, p. 193.
47. 1879. Über das Stokes'sche Gesetz. Ibid. VIII, p. 244; Erl. Ber. II, p. 183.
48. 1879. Über eine zweiconstantige Dispersionsformel. Erl. Ber. II, p. 191; W. Ann. VIII, p. 628.
49. 1879. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Math. Ann. XVI, p. 183.
50. 1873. Wind und Wetter. München.
51. 1880. Zweite Auflage. Ibid.
52. 1874. Das Wesen des Lichtes. Leipzig.
53. 1880. Über die dichroitische Fluorescenz des Magnesiumplatincyanürs. Experimenteller Beweis der Perpendicularität der Lichtschwingungen zur Polarisationsebene. W. Ann. VIII, 635; Erl. Ber.
54. 1880. Über die Erscheinungen, welche eine senkr. zur optischen Axe geschnittene Platte von Magnesiumplatincyanür im polarisirten Lichte zeigt. W. Ann. IX, p. 108; Erl. Ber.
55. 1880. Über Fluorescenz. W. Ann. X, p. 449 u. 631.
56. 1880. Über einige einfache Interferenzversuche. C. Rep. XVI, p. 455.
57. 1881. Über Universitätsbildung. Rede.
58. 1881. Einfaches Verfahren, die stroboskopischen Erscheinungen für viele gleichzeitig sichtbar zu machen. Carl's Rep. XVII, p. 463.
59. 1881. Ein Polarisationsapparat aus Magnesiumplatincyanür. W. Ann. XIII, p. 347.
60. 1881. Über das Dispersionsgesetz. W. Ann. XIII, p. 353.
61. 1881. Theorie der elliptischen Doppelbrechung. Münch. Ak. XII, p. 39; W. Ann. XV, p. 378; Erl. Ber.
62. 1881. Theorie der Drehung der Polarisationsebene. Sitzber. d. Münch. Ak. XI, p. 454; W. Ann. XIV, p. 523; Erl. Ber.
63. 1882. Zur Theorie des Lichtes. Erl. Ber.; W. Ann. 16, p. 427.
64. 1882. Lexikon der Physik und Meteorologie. Leipzig.
65. 1882. Die Isogyrenfläche der doppelbrechenden Krystalle; allgemeine Theorie der Curven gleicher Schwingungsrichtung. Erl. Ber.; W. Ann. 18, p. 56.
66. 1882. Zur Integration der lin. Differentialgleichungen. Recension. Schlöm. Zeitschr.
67. 1883. Über die Newton'schen Staubringe. W. Ann. 18, p. 613.
68. 1883. Die Fluorescenz des Joddampfes. W. Ann. 19, p. 356.
69. 1883. Zur Theorie des Lichtes. Wied. Ann. 19, p. 908.

70. 1883. Das Gesetz der Rotationsdispersion. W. Ann. 20, p. 578.
71. 1883. Spectroskop mit phosphorescirendem Ocular. Beobachtungen über Phosphorescenz. W. Ann. 20, p. 847; Erl. Ber.; Münch. Ak.
72. 1884. Die Fluorescenz des Kalkspates. W. Ann. 21, p. 422.
73. 1884. Sichtbare Darstellung d. ultraroten Strahlen. Humboldt.
74. 1884. Spectrum und Spectralanalyse. Krebs, die Physik etc. Stuttgart.
75. 1884. Über einen Gefrierapparat. W. Ann. 22, p. 614.
76. 1884. Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung und eines kreisrunden Schirmchens. Abh. d. k. b. Ak. d. W. II, 15.
77. 1884. Die Beugungserscheinungen etc. Referat. Sitzber. d. Erl. Soc. 8. Ber. Beiblätter.
78. 1884. Beobachtungen über Fluorescenz. Münch. Sitzber.; Wied. Ann. 24, p. 288.
79. 1885. Über einige optische Methoden und Instrumente. Zeitschr. f. Instrumentenk. V, p. 124.
80. 1885. Zur Theorie der Fluorescenz. Wied. Ann. 25, p. 643.
81. 1885. Abänderung der Influenzmaschine. W. Ann. 25, p. 678.
82. 1885. Projection der Interferenz von Flüssigkeitswellen. Wied. Ann. 26, p. 156.
83. 1885. Sichtbare Darstellung der ultraroten Strahlen durch Phosphorescenz. W. Ann. 26, p. 157.
84. 1886. Aerostatische Wage zur Bestimmung des spec. Gewichtes der Gase. Ibid. 27.
85. 1886. Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. d. k. b. Ak. d. W. II. Cl., XV. Bd., III. Abt., p. 529.
86. 1886. Auszug davon. Sitzungsber. 1886, p. 84. Beibl. 1887.
87. 1886. Beobachtungen über Phosphorescenz. Sitzungsber. d. k. b. Ak. XVI, 283—298; Wied. Ann. 30, p. 473—487.
88. 1887. Die Photometrie der diffusen Zurückwerfung. Sitzungsber.; Wied. Ann. 36, 473—502.
89. 1887. Die Entwickelung der elektromagnetischen Telegraphie. Deutsche Revue.
90. 1888. Subjective Interferenzstreifen im objectiven Spectrum. Sitzungsber. 319—320.
91. 1888. Neue Methode zur Messung der Drehung der Polarisationsebene. Sitzungsber. 321—324.
92. 1888. Interferenz durch circulare Doppelbrechung. Sitzungsber. 325—336.
93. 1888. Fraunhofer's Schriften.
94. 1888. Phosphorophotographie des ultraroten Spectrums. Sitzber. 397—403.
95. 1889. G. S. Ohm's wissenschaftliche Leistungen. Akad. Festrede. München.

96. 1889. Die Curven gleicher Lichtstärke in den Axenbildern doppeltbrechender Krystalle. Sitzber.; W. Ann. 39.
97. 1890. Selbstschatten einer Flamme. Sitzber.
98. 1890. Phosphorophotographie des ultraroten Gitterspectrums. Sitzber.
99. 1890. Huyghens, Abhandl. ü. d. Licht. Leipzig, Engelmann.
100. 1891. Berechnung von Mischfarben. W. Ann. 43.
101. 1891. Über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes. Sitzber.
102. 1892. G. S. Ohm, Gesammelte Abhandl. Leipzig.
103. 1892. Sichtbare Darstellung der Äquipotentiallinien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens. Sitzber., p. 371.
104. 1893. Lehrbuch der Experimentalphysik. Leipzig.
105. 1893. Äquipotential- und Magnetkraftlinien. Sitzber., p. 103; Wied. Ann. 49, p. 539.
106. 1893. Äquipotential- und Magnetkraftlinien, Nachtrag. Sitzber.
107. 1893. Objective Darstellung von Interferenzerscheinungen in Spectralfarben. Sitzber. XXIII.
108. 1893. Äquipotential- und Magnetkraftlinien. Zum Hall'schen Phänomen. Ibid.
109. 1893. Modell der Intensitätsfläche der Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung. Katalog math. u. phys.-math. Modelle etc. Herausgegeben von W. Dyck. München.
110. 1894. Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Aufl. Leipzig.
111. 1894. Das neue physikalische Institut d. Universität München. Akad. Verlag.
112. 1895. Eine optische Reliquie von Goethe. Deutsche Revue XX.
113. 1895. Verbreiterung der Spectrallinien, continuirliches Spectrum, Dämpfungsconstante. W. Ann. 56, p. 741.
114. 1896. Lehrbuch der Experimentalphysik. 3. Aufl. Leipzig.
115. 1897. dto. 4. Aufl. "
116. 1897. Theorie der Dämmerungsfarben. Abh. d. k. b. Ak. d. W. Bd. XIX.
117. 1898. Über aus Kalkspat und Glas zusammengesetzte Nicolsche Prismen. Sitzber. Bd. 38.
118. 1898. Die Entwicklung der Physik im 19. Jahrhundert. Rede.
119. 1899. Theorie der Dämmerungsfarben. Nachtrag. Abh. d. k. b. Ak. d. W.

Friedrich Meyer.

Von **G. Riehm** in Halle a. S.

Am 5. December 1898 schied ein Mann aus dem Leben, dessen Name in den Kreisen der Mathematiker einen guten Klang hatte, Prof. Dr. Friedrich Meyer, Oberlehrer am Stadtgymnasium zu Halle a. S. — Er stammte aus einer altangesessenen Gutsbesitzerfamilie Westpreufsens und war geboren am 5. März 1842 zu Mlinsk in Westpreufsen. Arbeitsamkeit und strenge Zucht bildeten den Grundton im väterlichen Hause, fast eine gewisse Härte; jedenfalls bestand die Forderung unweigerlicher und sofortiger Erfüllung des väterlichen Willens. Die Wirkung dieser Zucht war am Sohne unverkennbar. Furchtlose Wahrhaftigkeit, rastlosen Fleifs, unbedingte Erfüllung der Pflicht bis an die äufserste Grenze hin hatte er zu Hause gelernt.



Er besuchte das Gymnasium in Kulm, absolvirte im Herbst 1861 das Abiturientenexamen und studirte in Breslau, Berlin und Halle Mathematik und Physik. In Halle bestand er im November 1865 mit Auszeichnung seine Staatsprüfung, trat Ostern 1866 als Hilfslehrer am Gymnasium in Halberstadt ein und wurde Ostern 1868 als ordentlicher Lehrer für Mathematik und Physik an das neugegründete Stadtgymnasium nach Halle berufen. Dieser Anstalt hat er bis an sein Lebensende, fast 31 Jahre lang, mit seinen hohen Geistesgaben, seinem pädagogischen Geschick, seiner hinreifsenden Persönlichkeit gedient.

Zwischenhinein fielen seine militärischen Übungen. Im Feldzuge gegen Schleswig stand er als Einjährig-Freiwilliger des Garde-Füsilier-Regiments mit in Rügen. 1866 kam er als Unterofficier des 27. Regiments bei Münchengrätz und Königgrätz ins Feuer, und auch den französischen Krieg machte er bei diesem Regiment mit, erst als Vicefeldwebel, dann als Lieutenant. 1878 erfolgte seine ehrenvolle Entlassung aus der Armee mit dem Charakter als Premierlieutenant und der Berechtigung zum Tragen der Uniform.

Das Hallische Stadtgymnasium verdankt ihm aufserordentlich viel. Ein Schüler F. Meyer's gewesen zu sein, war ein guter Empfehlungsbrief, nicht nur für den angehenden Mathematikstudirenden. Mit innerlicher Freude und mit Stolz blickten Director und Schulrat auf den kenntnisreichen, talentvollen, energischen Mann. Sie wufsten, dafs sein Streben, selbstlos, weit ausschauend und auf das Ideale gerichtet, nur das Beste seiner Schüler im Auge hatte. Neidlos sahen sie, wie der jugendlich temperamentvolle Mann diese zu glühender Begeisterung für seine Person und seine Wissenschaft hinrifs; was kam's denn darauf an, ob sie das Studiren mehr an den Sprachen oder mehr an der Mathematik lernten, wenn sie es nur lernten. — Dafs seine Forderung beständiger Pflichttreue und sein starres Festhalten an der Erfüllung einer gewissen selbständigen Mindestleistung manchem Schüler unbequem war, ist natürlich; aber auch solche liebten ihn und verehrten in ihm den Mann, der die Willenskraft besafs, welche sie bei sich selbst vermifsten. Denn seine Pflichttreue war staunenerregend, sie konnte auch den Schülern nicht verborgen bleiben; z. B. wenn sie von ihm corrigirte Arbeiten in Händen hielten, oder wenn sie den Mann nachmittags zur Schule eilen sahen, um physikalische Experimente nochmals durchzuproben und sich von dem Zustand und der Leistungsfähigkeit der Apparate neu zu überzeugen. Wie viele Lehrer mögen das wohl nach 30-jähriger Übung noch thun? Ihm galt das für selbstverständlich. Und dabei wurde das von ihm angelegte und verwaltete Cabinet, was Zweckmäfsigkeit der Apparatenwahl und Sauberkeit der Haltung anlangt, von auswärtigen Besuchern immer bewundert.

Zu eigentlich wissenschaftlicher Arbeit fehlte es ihm an Mufse; seine Zeit gehörte ausschliefslich seiner Pflicht. Dafür aber leistete er Hervorragendes in der mathematischen Didaktik. Wer seine Programmabhandlung: „Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplan des Stadtgymnasiums" gelesen hat oder seine „Elemente der Arithmetik und Algebra" kennt, der weifs, wie er die Heine'schen und besonders die Cantor'schen Ideen für Schüler nutzbringend zu gestalten wufste. Grofsartig ist die Klarheit und Knappheit der Darstellung, die Anschaulichkeit der Ausdrucksweise; man empfindet beim Lesen seiner Aufsätze: „Auch die Mathematik hat ihre Ästhetik."

Diese Leistungen auf dem Gebiete praktischer und theoretischer mathematischer Didaktik hatte zweifellos die Universität Halle-Wittenberg im Auge, als sie ihn 1894 bei Gelegenheit ihrer Jubelfeier zu ihrem Ehrendoctor ernannte.

Ob er für die Schule zu schade war? Manche sind der Ansicht. Jedenfalls kann das Stadtgymnasium zu Halle a. S. ihm nicht dankbar genug sein für das Opfer seines Lebens; es hat viel an ihm besessen, es hat viel an ihm verloren. Seine Collegen vermissen

ihn sehr, denn sein reiches Wissen nötigte jedem Hochachtung ab, sein vornehmer Charakter, namentlich seine männliche Wahrhaftigkeit rifs zur Bewunderung hin, während seine Bescheidenheit und Freundlichkeit ihm die Liebe aller derer verschaffte, die ihm näher traten. Wie eine gerade Linie, aus dem Unendlichen kommend und dem Unendlichen zustrebend, immer die gleiche Richtung einhält, so war das Leben dieses Mannes. Have pia anima!

Aus seiner Feder erschien:

1. Über Flächensysteme II. Ordnung. Programm d. St. G. zu Halle 1875.
2. Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplan des Stadtgymnasiums. Progr. d. St. G. zu Halle 1891.
3. Elemente der Arithmetik und Algebra. Halle. H. W. Schmidt. II. Aufl. 1885.
4. Dritter Cursus der Planimetrie zugleich als Vorbereitung für die neuere Geometrie. Halle. H. W. Schmidt. 1885.
5. Wiederholte Bearbeitung und Umarbeitung der Lehrbücher von Wiegand für Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie, Arithmetik und mathematische Geographie.
6. Eine Folge mathematisch-didaktischer Abhandlungen in Hoffmann's Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht; nämlich:

Bd. 13, S. 114. Einteilung der Zahlen.
Bd. 15, S. 414. Definition und Symbolisirung der Wurzel.
Bd. 16, S. 91. Behandlung planimetrischer Aufgaben durch Schüler.
Bd. 17, S. 506. 2 Artikel: { Theorie des regulären Polygons, 5. Fundamentalaufgabe der Trigonometrie.
Bd. 18, S. 265. Die 3. Fundamentalaufgabe der Trigonometrie.
S. 108. Die Gleichung $l \cdot \sin x + m \cdot \cos x = n$ construirt mittels des Kreisvierecks*).
Bd. 13, S. 118.; Bd. 18, S. 188 (Antw. auf Bd. 18, S. 112) und S. 608 ergreift M. im Sprechsaal das Wort.

Hermann Schapira.

Von **C. Koehler** in Heidelberg.

Am 8. Mai 1898 fand ein an Arbeit und Mühen, an Kampf und Entsagung reiches Leben unerwartet schnell seinen Abschlufs: an diesem Tage starb nach kurzer Krankheit auf einer Reise in Köln Hermann Schapira.

*) Von der Kritik besonders geschätzt und als „kleines Cabinetstück" bezeichnet.

Geboren am 16. August 1840 in Erswilken bei Tauroggen in Rufsland mufste Schapira, obgleich ihn schon in frühester Jugend Neigung und Begabung zu den mathematischen Wissenschaften hinzog, einem Wunsche seines Vaters folgen und jüdische Theologie studiren. Dieses nicht in freier Entschliefsung begonnene Studium fesselte ihn nun zwar in solchem Grade, dafs er es niemals wieder ganz aufgab und auf dem Gebiete der hebräisch-jüdischen Wissenschaft bis zuletzt litterarisch thätig blieb, es konnte ihn aber doch seiner ersten Neigung nicht abwendig machen. Nachdem er ein Jahr hindurch den Beruf eines Rabbiners ausgeübt und dadurch ein seinem Vater gegebenes Versprechen eingelöst hatte, wandte er sich ganz der Mathematik zu und ging im Jahre 1868 auf die Gewerbeakademie in Berlin. Dort empfing er von Aronhold, dessen eifriger Schüler er wurde, die Grundlagen seiner mathematischen Bildung und erwarb sich zugleich, ganz auf seine eigene Kraft angewiesen, die Mittel zu seinem Studium in angestrengtester Thätigkeit dadurch, dafs er zahlreiche Privatstunden erteilte. Es sollte ihm aber nicht vergönnt sein, seine Studien ohne Unterbrechung zum Abschlufs zu bringen: eine durch Überanstrengung hervorgerufene Krankheit zwang ihn, im Jahre 1871 Berlin zu verlassen und nach Rufsland zurückzukehren.



Schapira nahm nun eine kaufmännische Stellung in einem Bankgeschäft in Odessa an, aber nicht etwa, um in diesem Berufe zu bleiben, sondern einzig in der Absicht und festen Hoffnung, durch die neue Thätigkeit die Mittel zur Fortsetzung seines Studiums zu erlangen. Die Erlebnisse Schapira's während der nun folgenden Zeit gehören nicht in diesen Bericht. Nur dafs er 1877 von seinem Bankhaus mit einer verantwortungsvollen Mission im russisch-türkischen Kriege betraut war, darf nicht unerwähnt bleiben, weil die grofsen Anstrengungen und Beschwerden, denen er sich damals

unterziehen mufste, seine Gesundheit so sehr erschütterten, dafs sie von da an immer eine schwankende blieb.

Mit seiner durch nichts zu beugenden Energie hatte es Schapira im Jahre 1878 endlich so weit gebracht, dafs er seine Studien wieder aufnehmen konnte. Er bezog nun als verheirateter Mann von neuem die Hochschule und ging nach Heidelberg. Dort beteiligte er sich mit nie ermattendem Eifer und immer gleicher Begeisterung an allen Vorlesungen und Übungen von Fuchs, um dessentwillen er nach Heidelberg gekommen war, und dem er bis an das Ende seines Lebens die gröfste Verehrung, Liebe und Dankbarkeit bewahrte. Dort gewann er auch in Moritz Cantor einen Lehrer und Freund, auf dessen Rat und Beistand er fortan in jeder Lebenslage zählen konnte.

Nachdem Schapira im Jahre 1880 in Heidelberg promovirt hatte, erging, veranlafst durch seine Promotionsschrift, die Aufforderung an ihn, eine Stellung an der Universität Kasan zu übernehmen; er konnte sich aber nicht entschliefsen, Deutschland, das er als sein zweites Vaterland liebgewonnen hatte, zu verlassen. Er blieb in Heidelberg, habilitirte sich dort im Jahre 1883 und wurde 1887 zum aufserordentlichen Professor ernannt. Seine Vorlesungen, die sich über den gröfsten Teil der mathematischen Disciplinen erstreckten, waren besonders fördernd für diejenigen unter den Studirenden, für welche das Studium mehr als die Vorbereitung auf ein Examen bedeutet, und wurden von diesen immer gerne gehört. Denn Schapira liebte es, auch in den viel begangenen Gebieten der Wissenschaft gebahnte Wege zu vermeiden, seine Themen durchaus originell zu behandeln und dadurch seine Zuhörer zu nachschaffender Arbeit anzuregen. Wiederholt las Schapira auch über seine eigenen Untersuchungen, und zwar zum ersten Mal im Winter 1883/84 über Cofunctionen, im Sommer 1889 über algebraische und analytische Iterationen: die beiden Themen, die — abgesehen von Nr. 2: einer mathematisch-historischen Abhandlung, Nr. 10: der durch Zusätze und Tabellen vermehrten Übersetzung eines Lehrbuchs, und Nr. 15: einer Notiz über nichtlineare Differentialgleichungen — den Gegenstand aller von ihm veröffentlichten, unten in chronologischer Folge genannten und jetzt noch kurz zu besprechenden Arbeiten bilden.

Die Beziehungen, welche zwischen der Exponentialfunction und den trigonometrischen Functionen existiren, führten Schapira auf den Gedanken, allgemeinere Functionen zu bilden, zwischen denen ähnliche Beziehungen bestehen. Er verwirklicht denselben, indem er aus einer beliebig gegebenen, in der Umgebung des Nullpunktes convergenten Potenzreihe $f(x)$ — „der Hauptfunction" — einerseits alle Glieder, deren Exponent $\lambda \equiv i \bmod n$ $(i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$ ist, zur „i^{ten} Partialfunction n^{ter} Classe von $f(x)$" vereinigt,

andererseits aus derselben Hauptfunction $f(x)$ durch Substitution von $r_n^h x$ für x (r_n = einer primitiven n^{ten} Einheitswurzel, $h = 0, 1, 2 \ldots n-1$) die „h^{te} circumplexe Function n^{ter} Classe von $f(x)$“ gewinnt. Eine kurze Darstellung der Eigenschaften und des gegenseitigen Zusammenhangs beider Arten von Functionen, die er unter dem Namen „Cofunctionen von $f(x)$“ zusammenfafst, gab Schapira zuerst im Jahre 1879 auf der Naturforscher-Versammlung in Baden-Baden (Nr. 1) und führte diese dann weiter aus in seiner nur in russischer Sprache gedruckten Dissertation (Nr. 3), deren Inhalt deutschen Lesern durch ein eingehendes und sehr günstig urteilendes Referat (Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 27, histor.-lit. Abt., pag. 21—26) zugänglich gemacht ist. Mit Erweiterungen der Definition der Cofunctionen nach verschiedenen Richtungen hin und mit ihrer Anwendung auf Probleme der Algebra, der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der Zahlentheorie befassen sich die unten unter Nr. 4—7, 11 und 16 genannten Vorträge und Abhandlungen.

In seinen übrigen Publicationen (Nr. 8, 9, 12, 13, 14) begründet und entwickelt Schapira von 1887 an die Methode einer algebraischen Iteration. Er geht dabei aus von den Gaufs'schen Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel, zeigt deren Erweiterungsfähigkeit zuerst auf dem von Gaufs selbst eingeschlagenen Wege, verläfst diesen aber dann und gelangt durchaus selbständig zu dem in Kürze etwa folgendermafsen auszusprechenden Fundamentalsatz: Wenn man die Wurzeln einer beliebig gegebenen algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit variablen Coefficienten, die noch einigen, hier nicht anzuführenden, Bedingungen unterworfen sind, in eine zweite solche Gleichung als Coefficienten eintreten läfst und dieses Verfahren q mal wiederholt, so convergiren die Coefficienten „der $(q+1)^{ten}$ iterirten Gleichung“ für $q = \infty$ alle gegen dieselbe Grenzfunction.

Trotzdem Schapira Anwendungen seiner Iterationsmethode nach verschiedenen Richtungen hin in Angriff genommen hatte, hat er doch nur über eine einzige solche zwei Notizen (Nr. 12 u. 14) veröffentlicht. Der Grund davon findet sich in der Art seiner Veranlagung, die der Tragik nicht entbehrte. Ein an vielversprechenden Ideen ungewöhnlich reicher Kopf — wurde es ihm unsäglich schwer, sich auf die Durchführung von einer derselben unter Zurückstellung der übrigen zu beschränken, und daher kommt es, dafs seine weit über das Durchschnittsmafs hinausgehende Arbeitskraft und Begabung nicht die entsprechenden Resultate erzielt hat. So erklärt es sich auch, dafs Schapira eine ganze Reihe unvollendeter Manuscripte hinterlassen hat, und dafs auch die von ihm veröffentlichten Arbeiten zwar oft Ansätze zu Bedeutendem bringen, die nötige Aus-

führung und Abrundung jedoch leider vermissen lassen. Aber wenn man dies auch nicht verschweigen darf, bestehen bleibt das Verdienst Schapira's, der Wissenschaft in den zwei oben skizzirten Richtungen entwicklungsfähige Gedanken zugeführt zu haben, die, wenn auch von anderen Forschern schon früher gestreift, doch im wesentlichen als sein Eigentum zu betrachten sind. Und immer wird man bewundern müssen, wie ihn kein Hindernis, das das Leben vor ihm auftürmte, davon zurückschrecken konnte, sich mit selbstlosestem Interesse und nie erlahmender Arbeitsfreudigkeit in den Dienst der Wissenschaft zu stellen.

Dieselbe ideale Gesinnung, mit der Schapira der Wissenschaft diente, war ihm aber auch im Leben eigen. Schon an der Grenze des Alters angelangt blieb er im Herzen jung und vereinigte mit der Milde eines gereiften Urteils jugendliche Begeisterungsfähigkeit in schönem Zusammenklang. Seinen Freunden ein treuer, zu jeder Aufopferung fähiger Freund, war er zugleich gegen alle Menschen wohlgesinnt und hülfsbereit, und wer auch nur immer seiner Unterstützung bedurfte, konnte auf seinen thatkräftigen Beistand mit Sicherheit zählen. Darum wird auch, wie das ernste wissenschaftliche Streben, die lautere und liebenswerte Persönlichkeit Hermann Schapira's allen, die ihm einmal nahe getreten, in unvergänglicher Erinnerung bleiben.

Schapira's Veröffentlichungen.

1. Gegenseitigkeit von Partial- und circumplexen Functionen und Reihen. Tagbl. der 52. Vers. Deutscher Naturf. u. Ärzte, p. 171—174. Baden-Baden 1879.
2. Übersetzung und Erläuterung der Mischnath Ha-MMiddoth (die Lehre von den Maſsen), der ersten geometrischen Schrift in hebräischer Sprache. Suppl. zu Bd. 25 der Zeitschr. für Math. u. Phys., p. 1—56. 1880.
3. Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen und ihren Anwendungen. Inaugural-Dissertation (in russischer Sprache). Odessa 1881.
4. Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen. Tagbl. der 54. Vers. Deutscher Naturf. u. Ärzte, p. 1—20. Salzburg 1881.
5. Erweiterung der Begriffe der arithmetischen Grundoperationen und der allgemeinen Cofunctionen. Tagbl. der 55. Vers. Deutsch. Naturf. u. Ärzte, p. 128—146. Eisenach 1882.
6. Darstellung der Wurzeln einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades mit Hilfe von Cofunctionen aus Potenzreihen. Habilitationsschrift. Leipzig 1883. (Die Schrift ist als einziger Teil eines geplanten gröſseren Werkes: „Theorie allgemeiner Cofunctionen und einige ihrer Anwendungen“ 1892 nochmals erschienen.)

7. Anwendung der Cofunctionen auf die Integration linearer Differentialgleichungen. Tagbl. der 57. Vers. Deutscher Naturf. u. Ärzte, p. 57—66. Magdeburg 1884.
8. Über ein allgemeines Princip algebraischer Iterationen. Verh. des Naturhistorisch-medic. Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. IV. Bd. Erstes Heft, p. 25—46. Heidelberg 1887.
9. Bemerkungen zu der Grenzfunction algebraischer Iterationen. Zeitschr. für Math. u. Phys. Bd. 32, p. 310—314. 1887.
10. Deutsche Übersetzung von Tschebyscheff's Lehrbuch: „Theorie der Congruenzen (Elemente der Zahlentheorie)". Berlin 1889.
11. Bemerkung zur Invariantentheorie binärer Formen. Jahresb. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 2, p. 63—66. 1893.
12. Die Iteration als Fundamentalprocefs mathematischer Operationen. Ebenda. Bd. 3, p. 88—93. 1894.
13. Über symmetrische quadratische Formen. Ebenda. Bd. 3, p. 99—102. 1894.
14. Die Iteration als Fundamentalprocefs mathematischer Operationen (Fortsetzung von Nr. 12). Verh. der Gesellsch. Deutscher Naturf. u. Ärzte. Bd. 65, II[1], p. 8—9. 1894.
15. Zur Integration einer Classe nichtlinearer Differentialgleichungen. Ebenda. Bd. 65, II[1], p. 15—17. 1894.
16. Cribrum algebraicum oder die cofunctionale Entstehung der Primzahlen. Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 5, p. 69—72. 1897.

Karl Schober.

Von **W. Wirtinger** in Innsbruck.

Am 4. September 1899 starb nach längerem Leiden Karl Schober, Professor an der k. k. Staatsoberrealschule und Docent für darstellende Geometrie an der Universität Innsbruck. Er war am 8. October 1859 zu Sternberg in Mähren geboren, studirte 1871—78 an den Realschulen zu Sternberg und Troppau und von 1878—82 an der Technischen Hochschule und der Universität in Wien. Im Jahre 1882 legte er in Wien die Lehramtsprüfung für Mathematik und darstellende Geometrie mit gutem Erfolg ab und erwarb später noch die Lehrbefähigung in der Physik für Unterklassen und in der Stenographie. Er war hierauf als Supplent in Wien thätig, wurde in Triest 1887 wirklicher Lehrer und trat 1888 seine Stelle in Innsbruck an, wo er nun verschied.

Von allgemeinerem Interesse sind vielleicht die Umstände, unter denen seine Bestellung als Docent der darstellenden Geometrie an der Universität erfolgte. Er strebte zunächst die Habilitation an,

wurde aber vom Ministerium mit dem Hinweis auf den Mangel des Doctorates abgewiesen, jedoch (1893) auf neuerlichen Antrag der Facultät als Docent mit dem Auftrag für darstellende Geometrie und mit Honorar ausdrücklich bestellt. Dadurch war von Seite der Unterrichtsbehörde das Bedürfnis nach Vorlesungen über diesen Gegenstand an der Universität anerkannt. Seinem Lehrberuf widmete er sich mit aller Pflichttreue und Begeisterung, die Zuneigung seiner Hörer wufste er in hohem Grade zu erwerben und das Interesse für die Ausbildung des räumlichen Vorstellungsvermögens zu erwecken und festzuhalten. Dies gilt in gleicher Weise von der Universität wie von der Realschule.



Seit 1891 war er Mitglied der Prüfungscommission für das Lehramt der Stenographie, und seit 1893 der wissenschaftlichen Prüfungscommission für das Lehramt an Gymnasien und Realschulen für das Fach der darstellenden Geometrie. Im W. S. 1894/95 war er überdies mit der Abhaltung von Vorlesungen über synthetische Geometrie an der Universität betraut. Im Zusammenhang mit seinem Lehrberuf steht die Neubearbeitung des Lehrbuches von Rossmanith, welche er 1890 übernahm, und dessen 6. Auflage seine letzte Arbeit war.

Seine wissenschaftliche Thätigkeit war auf die constructive Theorie der Kegelschnitte gerichtet und geht aus dem nachfolgenden Verzeichnis seiner Schriften hervor, welches sich in seinem Nachlafs vorfand. Sein Charakter und sein Wesen erwarb ihm die Sympathien aller, die ihn als Lehrer oder Collegen kannten.

Schober's Schriften.

1. Über die Construction von Halbschattengrenzen der Flächen zweiter Ordnung unter Voraussetzung von Kugelbeleuchtung. Wien, 1885.

2. Constructionen von Kegelschnitten als Corrolarien der Sätze von Pascal und Brianchon. Zeitschrift für Realschulwesen XII, 1887; XIII, 1888.
3. Constructionen von Kegelschnitten im Sinne der neueren Geometrie. Programm der Oberrealschule in Sechshaus bei Wien, 1887.
4. Rossmanith-Schober, Elemente der Geometrie in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen, zweite Auflage, Wien, 1890.
(Hiervon erschienen sechs Auflagen, die sechste unter dem Titel: Grundriſs d. G. u. d. g. Z. 1899.)
5. Zur Polarentheorie der Kegelschnitte. Monatshefte f. Math. u. Phys. II, 1891.
6. Constructionen von Kegelschnitten aus imaginären Elementen auf Grund neuer Sätze der Polarentheorie. Programm der Oberrealschule Innsbruck, 1892.
7. Über das Kreisbüschel mit imaginären Scheiteln. Monatshefte f. Math. u. Phys. V, 1894.
8. Über die Construction der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades. Monatsh. f. Math. u. Phys. VII, 1896.
9. Über besondere symmetrische Punktsysteme zweiten Grades und Poncelet'sche Vierecke, ebenda IX, 1898.
10. Über solche Hyperbelschnitte von Flächen zweiten Grades, deren Projectionen auf einer gegebenen Ebene gleichseitig sind, ebenda IX, 1898.

Auſserdem einige kleinere Notizen in Hoffmann's Zeitschrift f. d. math. Unterricht, Hoppe's Archiv und in der Zeitschrift für Realschulwesen.

Die auf der Jahresversammlung zu München gehaltenen Vorträge.

Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit.

Von **Ludwig Boltzmann** in Wien.

Hochansehnliche Versammlung!

In den früheren Jahrhunderten schritt die Wissenschaft durch die Arbeit der erlesensten Geister stetig, aber langsam fort, wie eine alte Stadt durch Neubauten betriebsamer und unternehmender Bürger in stetem Wachstume begriffen ist. Dagegen hat das gegenwärtige Jahrhundert des Dampfes und Telegraphen sein Gepräge nervöser, überhastender Thätigkeit auch dem Fortschritte der Wissenschaft aufgeprägt. Namentlich die Entwicklung der Naturwissenschaft in neuerer Zeit gleicht mehr der einer modernsten amerikanischen Stadt, die in wenigen Decennien vom Dorfe zur Millionenstadt wird.

Man hat wohl mit Recht Leibniz als den letzten bezeichnet, der noch imstande war, das gesamte Wissen seiner Zeit in einem einzigen Menschenkopfe zu vereinigen. Allerdings hat es auch in neuerer Zeit nicht an Männern gefehlt, welche durch den enormen Umfang ihrer Kenntnisse in Staunen setzten. Ich erwähne da nur Helmholtz, welcher 4 verschiedene Wissenszweige, die Philosophie, Mathematik, Physik und Physiologie, mit gleicher Meisterschaft beherrschte. Allein das waren doch nur einzelne, mehr oder minder verwandte Zweige des gesamten menschlichen Wissens; dieses reicht viel, viel weiter.

Die Folge dieser enormen, in rapidem Wachstume begriffenen Ausdehnung unserer positiven Kenntnisse war eine bis ins kleinste Detail gehende Arbeitsteilung in der Wissenschaft, welche fast schon an die in einer modernen Fabrik erinnert, wo der eine nichts als das Abmessen, der zweite das Schneiden, der dritte das Einschmelzen der Kohlenfäden zu besorgen hat etc. Gewiss ist eine derartige Arbeitsteilung dem raschen Fortschritte der Wissenschaft enorm förderlich, ja für denselben geradezu unentbehrlich; aber ebenso gewifs birgt sie auch grofse Gefahren. Der für jede ideale, auf die Entdeckung von wesentlich Neuem, ja nur wesentlich neuen Verbindungen der alten Gedanken gerichtete Thätigkeit unerläfsliche Über-

blick über das Ganze geht dabei verloren. Um diesem Übelstande nach Möglichkeit zu begegnen, ist es wohl nützlich, wenn von Zeit zu Zeit ein einzelner mit dieser wissenschaftlichen Detailarbeit Beschäftigter einem gröfseren, wissenschaftlich gebildeten Publicum einen Überblick über die Entwicklung desjenigen Wissenszweiges zu geben sucht, den er bearbeitet.

Es ist dies mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden. Die schier endlos lange Reihe von Schlüssen oder Einzelversuchen, deren Ziel irgend ein Resultat bildet, ist nur für denjenigen übersichtlich und leicht verständlich, der sich das Durchwandern gerade dieser Vorstellungsreihen zur Lebensaufgabe gemacht hat. Dazu kommt noch, dafs sich zur Abkürzung der Ausdrucksweise und Erleichterung der Übersicht überall die Einführung einer sehr grofsen Zahl neuer Bezeichnungen und gelehrter Wörter als nützlich erwies. Der Vortragende kann nun einerseits nicht durch Erklärung aller dieser neuen Begriffe die Geduld seiner Zuhörer schon erschöpfen, bevor er zu seinem eigentlichen Gegenstande kommt, und andererseits ohne dieselben sich nur schwer und unbehilflich verständlich machen. Auch darf die populäre Darstellung nie als Hauptsache betrachtet werden. Dies würde zu einer Verflachung der Strenge der Schlüsse und zum Aufgeben jener Exactheit führen, welche zum Epitheton der Naturwissenschaft, und zwar zu ihrem nicht geringen Stolze geworden ist. Wenn ich daher zum Thema meines gegenwärtigen Vortrages eine populäre Darstellung des Entwicklungsganges der theoretischen Physik in der neueren Zeit gewählt habe, so war ich mir wohl bewufst, dafs mein Ziel in der Vollkommenheit, in der es meinem Geiste vorschwebt, nicht erreichbar ist, und dafs ich nur das allgemein Wichtigste in rohen Umrissen werde zeichnen können, während ich hie und da wieder durch den der Vollständigkeit halber nötigen Vortrag von allzu Bekanntem werde Anstofs erregen müssen.

Die Hauptursache des rapiden Fortschrittes der Naturwissenschaft in der letzten Zeit liegt unzweifelhaft in der Auffindung und Vervollkommnung einer besonders geeigneten Forschungsmethode. Auf experimentellem Gebiete arbeitet dieselbe oft geradezu automatisch weiter, und der Forscher braucht nur gewissermafsen stets neues Material aufzulegen, wie der Weber neues Garn auf den mechanischen Webstuhl. So braucht der Physiker nur immer neue Substanzen auf ihre Zähigkeit, ihren elektrischen Widerstand etc. zu untersuchen, dann dieselben Bestimmungen bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffes, dann wieder des Moissan'schen Ofens zu wiederholen, und ähnlich geht es bei manchen Aufgaben der Chemie. Freilich gehört immer noch genug Scharfsinn dazu, immer gerade die Versuchsbedingungen zu finden, unter denen die Sache geht.

Nicht ganz so einfach steht es mit den Methoden der theoretischen Physik; doch kann auch da in gewissem Sinne von einem automatischen Fortarbeiten gesprochen werden.

Diese hohe Bedeutung der richtigen Methode erklärt es, dafs man bald nicht blofs über die Dinge nachdachte, sondern auch über die Methode unseres Nachdenkens selbst; es entstand die sogenannte Erkenntnistheorie, welche trotz eines gewissen Beigeschmacks der alten, nun verpönten Metaphysik für die Wissenschaft von gröfster Bedeutung ist.

Die Fortentwicklung der wissenschaftlichen Methode ist so zu sagen das Skelett, das den Fortschritt der gesamten Wissenschaft trägt; deshalb will ich im folgenden die Entwicklung der Methoden in den Vordergrund stellen und gewissermafsen blofs zu ihrer Erläuterung die erzielten wissenschaftlichen Resultate einflechten. Letztere sind ja ihrer Natur nach leichter verständlich und allgemeiner bekannt, während gerade der methodische Zusammenhang am meisten der Erläuterung bedarf.

Einen besonderen Reiz gewährt es, an die historische Darstellung einen Ausblick auf die Entwicklung der Wissenschaft in einer Zukunft zu knüpfen, welche zu erleben uns kraft der Kürze des Menschendaseins versagt ist. In dieser Beziehung will ich schon im voraus gestehen, dafs ich nur Negatives bieten werde. Ich werde mich nicht vermessen, den Schleier zu heben, der die Zukunft umhüllt; dagegen will ich Gründe darlegen, welche wohl geeignet sein dürften, vor gewissen, allzu raschen Schlüssen auf die zukünftige Entwicklung der Wissenschaft zu warnen.

Betrachten wir den Entwicklungsgang der Theorie näher, so fällt zunächst auf, dafs derselbe keineswegs so stetig erfolgt, als man wohl erwarten würde, dafs er vielmehr voll von Discontinuitäten ist und wenigstens scheinbar nicht auf dem einfachsten, logisch gegebenen Wege erfolgt. Gewisse Methoden ergaben oft noch soeben die schönsten Resultate, und mancher glaubte wohl, dafs die Entwicklung der Wissenschaft bis ins Unendliche in nichts anderem, als ihrer stetigen Anwendung bestehen würde. Im Gegensatze hierzu zeigen sie sich plötzlich erschöpft, und man ist bestrebt, ganz neue, disparate aufzusuchen. Es entwickelt sich dann wohl ein Kampf zwischen den Anhängern der alten Methoden und den Neuerern. Der Standpunkt der ersteren wird von ihren Gegnern als ein veralteter, überwundener bezeichnet, während sie selbst wieder die Neuerer als Verderber der echten classischen Wissenschaft schmähen.

Es ist dies übrigens ein Procefs, der keineswegs auf die theoretische Physik beschränkt ist, vielmehr in der Entwicklungsgeschichte aller Zweige menschlicher Geistesthätigkeit wiederzukehren scheint.

So glaubte vielleicht mancher zu den Zeiten Lessing's, Schiller's und Goethe's, dafs durch stete Weiterentwicklung der von diesen Meistern gepflegten idealen Dichtungsweise für die dramatische Litteratur aller Zeiten gesorgt sei, während heutzutage total verschiedene Methoden dramatischer Dichtung gesucht werden und die rechte vielleicht noch gar nicht gefunden ist.

In ganz ähnlicher Weise stehen der alten Malschule die Impressionisten, Secessionisten, Pleine-airisten, steht der classischen Tonkunst die Zukunftsmusik gegenüber. Letztere ist doch nicht schon wieder veraltet? — Wir werden uns daher nicht mehr wundern, dafs die theoretische Physik keine Ausnahme von diesem allgemeinen Entwicklungsgesetze bildet.

Gestützt auf die Vorarbeiten zahlreicher genialer Naturphilosophen hatten Galilei und Newton ein Lehrgebäude geschaffen, welches als der eigentliche Anfang der theoretischen Physik bezeichnet werden mufs. Newton fügte demselben mit besonderem Erfolge die Theorie der Bewegung der Himmelskörper ein. Er betrachtete dabei jeden derselben als einen mathematischen Punkt, wie ja auch besonders die Fixsterne in der That in erster Annäherung der Beobachtung erscheinen. Zwischen je zweien sollte eine in die Richtung ihrer Verbindungslinie fallende, dem Quadrate ihres Abstandes verkehrt proportionale Anziehungskraft wirken. Indem er eine das gleiche Gesetz befolgende Kraft auch zwischen je zwei Massenteilchen eines beliebigen Körpers wirksam dachte und im übrigen die Bewegungsgesetze anwandte, welche er aus den Beobachtungen an irdischen Körpern abgeleitet hatte, gelang es ihm, die Bewegung sämtlicher Himmelskörper, die Schwere, Ebbe und Flut und alle einschlägigen Erscheinungen aus demselben Gesetze abzuleiten.

Im Hinblick auf diese grofsen Erfolge waren Newton's Nachfolger bestrebt, die übrigen Naturerscheinungen ganz nach der Methode Newton's lediglich unter passenden Modificationen und Erweiterungen zu erklären. Unter Benutzung einer alten, schon von Demokrit herrührenden Hypothese dachten sie sich die Körper als Aggregate sehr zahlreicher materieller Punkte, der Atome. Zwischen je zweien derselben sollte aufser der Newton'schen Anziehung noch eine Kraft wirken, welche man sich in gewissen Entfernungen abstofsend, in andern anziehend dachte, wie es eben zur Erklärung der Erscheinungen am geeignetsten schien.

Die Rechnung hatte nun das sogenannte Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft ergeben. Jedesmal, wenn eine gewisse Arbeit geleistet wird, d. h. wenn der Angriffspunkt einer Kraft eine bestimmte Strecke in der Richtung der Kraftwirkung zurücklegt, mufs eine bestimmte Menge von Bewegung entstehen, deren Quantität

durch einen mathematischen Ausdruck gemessen wird, den man lebendige Kraft nennt. Genau diese Bewegungsquantität kommt nun wirklich zum Vorschein, sobald die Kraft alle Teilchen eines Körpers gleichmäfsig angreift, z. B. beim freien Falle, dagegen immer weniger, wenn nur einige Teilchen von den Kräften afficirt werden, andere nicht, wie bei der Reibung, beim Stofse. Bei allen Processen der letzteren Art entsteht dafür Wärme. Man machte daher die Hypothese, dafs die Wärme, welche man früher für einen Stoff gehalten hatte, nichts anderes sei, als eine unregelmäfsige Relativbewegung der kleinsten Teilchen der Körper gegen einander, welche man nicht direct sehen kann, da man ja diese Teilchen selbst nicht sieht, welche sich aber den Teilchen unserer Nerven mitteilt und dadurch das Wärmegefühl erzeugt.

Die Consequenz der Theorie, dafs die erzeugte Wärme immer genau der verlorenen lebendigen Kraft proportional sein mufs, was man den Satz der Äquivalenz der lebendigen Kraft und Wärme nennt, bestätigte sich. Man setzte weiter voraus, dafs in den festen Körpern jedes Teilchen um eine bestimmte Ruhelage schwingt und die Configuration dieser Ruhelagen eben die feste Gestalt des Körpers bestimmt. In den tropfbaren Flüssigkeiten sind die Molecularbewegungen so lebhaft, dafs die Teilchen neben einander vorbeikriechen; die Verdampfung aber entsteht durch die gänzliche Lostrennung der Teilchen von der Oberfläche der Körper, so dafs in den Gasen und Dämpfen die Teilchen gröfstenteils geradlinig, wie abgeschossene Flintenkugeln, fortfliegen. So erklärte sich das Vorkommen der Körper in den drei Aggregatzuständen, sowie viele Thatsachen der Physik und Chemie ungezwungen. Aus zahlreichen Eigenschaften der Gase folgt freilich, dafs deren Molecüle keine materiellen Punkte sein können. Man setzte daher voraus, dafs sie Complexe solcher seien, vielleicht noch umgeben von Ätherhüllen.

Aufser den die Körper zusammensetzenden ponderablen Atomen nahm man nämlich noch das Vorhandensein eines zweiten, aus weit feineren Atomen bestehenden Stoffes, des Lichtäthers, an und konnte durch regelmäfsige Transversalwellen des letzteren fast alle Lichterscheinungen erklären, die früher Newton der Emanation besonderer Lichtteilchen zugeschrieben hatte. Einige Schwierigkeiten blieben freilich noch, wie das gänzliche Fehlen longitudinaler Wellen im Lichtäther, welche doch in allen ponderablen Körpern nicht nur vorkommen, sondern dort geradezu die Hauptrolle spielen.

Unsere Kenntnis von Thatsachen auf dem Gebiete der Elektricität und des Magnetismus war durch Galvani, Volta, Oerstedt, Ampère und viele andere enorm erweitert und durch Faraday zu einem gewissen Abschlusse gebracht worden. Letzterer hatte mit verhältnismäfsig geringen Mitteln eine solche Fülle neuer Thatsachen gefunden, dafs es lange schien, als ob sich die Zukunft

nur noch auf die Erklärung und praktische Anwendung aller dieser Entdeckungen werde beschränken müssen.

Als Ursache der Erscheinungen des Elektromagnetismus hatte man sich schon lange besondere elektrische und magnetische Flüssigkeiten gedacht. Ampère gelang die Erklärung des Magnetismus durch moleculare elektrische Ströme, wodurch die Annahme magnetischer Flüssigkeiten entbehrlich wurde, und Wilhelm Weber vollendete die Theorie der elektrischen Fluida, indem er sie so ergänzte, dafs alle bis dahin bekannten Erscheinungen des Elektromagnetismus daraus in einfacher Weise erklärbar waren. Er dachte sich zu diesem Behufe die elektrischen Fluida geradeso aus kleinsten Teilchen bestehend, wie die ponderablen Körper und den Lichtäther, und zwischen den Elektricitätsteilchen auch ganz analoge Kräfte wirkend, wie zwischen denen der übrigen Stoffe, nur mit der unwesentlichen Modification, dafs die zwischen je zwei Elektricitätsteilchen wirkenden Kräfte auch von ihrer relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängen sollten.

Während man daher in den ersten Zeiten aufser dem greifbaren Stoffe noch einen Wärmestoff, Lichtstoff, zwei magnetische, zwei elektrische Fluida etc. angenommen hatte, reichte man jetzt mit dem ponderablen Stoffe, dem Lichtäther und den elektrischen Flüssigkeiten aus. Jeden dieser Stoffe dachte man sich bestehend aus Atomen, und die Aufgabe der Physik schien sich für alle Zukunft darauf zu reduciren, das Wirkungsgesetz der zwischen je zwei Atomen thätigen Fernkraft festzustellen und dann die aus allen diesen Wechselwirkungen folgenden Gleichungen unter den entsprechenden Anfangsbedingungen zu integriren.

Dies war die Entwicklungsstufe der theoretischen Physik beim Beginne meiner Studien. Was hat sich seitdem alles verändert? Fürwahr, wenn ich auf alle diese Entwicklungen und Umwälzungen zurückschaue, so erscheine ich mir wie ein Greis an Erlebnissen auf wissenschaftlichem Gebiete! Ja, ich möchte sagen, ich bin allein übrig geblieben von denen, die das Alte noch mit voller Seele umfafsten, wenigstens bin ich der einzige, der noch dafür, soweit er es vermag, kämpft. Ich betrachte es als meine Lebensaufgabe, durch möglichst klare, logisch geordnete Ausarbeitung der Resultate der alten classischen Theorie, soweit es in meiner Kraft steht, dazu beizutragen, dafs das viele Gute und für immer Brauchbare, das meiner Überzeugung nach darin enthalten ist, nicht einst zum zweitenmale entdeckt werden mufs, was nicht der erste Fall dieser Art in der Wissenschaft wäre.

Ich stelle mich Ihnen daher vor als einen Reactionär, einen Zurückgebliebenen, der gegenüber den Neueren für das Alte,

Classische schwärmt; aber ich glaube, ich bin nicht bornirt, nicht blind gegen die Vorzüge des Neuen, dem im folgenden Teile meines Vortrages Gerechtigkeit widerfahren soll, soweit mir dies möglich ist; denn ich weifs wohl, dafs ich, wie jeder, die Dinge durch meine Brille subjectiv gefärbt sehe.

Der erste Angriff auf das geschilderte wissenschaftliche System erfolgte gegen dessen schwächste Seite, die Weber'sche Theorie der Elektrodynamik. Diese ist gewissermafsen die Blüte der Geistesarbeit dieses genialen Forschers, der sich durch seine zahlreichen, in den elektrodynamischen Mafsbestimmungen und anderwärts niedergelegten Ideen und experimentellen Resultate die unsterblichsten Verdienste um die Elektricitätslehre erworben hat. Sie trägt jedoch bei allem Scharfsinne und aller mathematischen Feinheit so sehr das Gepräge des Gekünstelten, dafs wohl stets nur wenige begeisterte Anhänger an ihre unbedingte Richtigkeit glaubten. Gegen sie wandte sich Maxwell unter rückhaltlosester Anerkennung der Verdienste Weber's.

Die Arbeiten Maxwell's kommen hier für uns in zweifacher Weise in Betracht: 1. der erkenntnistheoretische Teil derselben, 2. der speciell physikalische. In erster Beziehung warnte Maxwell davor, eine Naturanschauung blofs aus dem Grunde für die einzig richtige zu halten, weil sich eine Reihe von Consequenzen derselben in der Erfahrung bestätigt hat. Er zeigt an vielen Beispielen, wie sich oft eine Gruppe von Erscheinungen auf zwei total verschiedene Arten erklären läfst. Beide Erklärungsarten stellen die ganze Erscheinungsgruppe gleich gut dar. Erst wenn man neuere, bis dahin unbekannte Erscheinungen zuzieht, zeigt sich der Vorzug der einen vor der anderen Erklärungsart, welche erstere aber vielleicht nach Entdeckung weiterer Thatsachen einer dritten wird weichen müssen.

Während vielleicht weniger die Schöpfer, als besonders die späteren Vertreter der alten classischen Physik prätendirten, durch diese die wahre Natur der Dinge erkannt zu haben, so wollte Maxwell seine Theorie als ein blofses Bild der Natur aufgefafst wissen, als eine mechanische Analogie, wie er sagte, welche im gegenwärtigen Augenblicke die Gesamtheit der Erscheinungen am einheitlichsten zusammenzufassen gestattet. Wir werden sehen, wie einflufsreich diese Stellungsnahme Maxwell's auf die weitere Entwicklung der Theorie wurde. Maxwell verhalf diesen theoretischen Ideen sofort zum Siege durch seine praktischen Erfolge.

Wir sahen, dafs alle damals bekannten elektromagnetischen Erscheinungen erklärt waren durch die Weber'sche Theorie, welche die Elektricität aus Teilchen bestehen liefs, die ohne alle Vermittlung direct in beliebige Entfernungen auf einander wirken. Angeregt

durch die Ideen Faraday's, entwickelte nun Maxwell eine vom entgegengesetzten Standpunkte ausgehende Theorie. Nach dieser wirkt jeder elektrische oder magnetische Körper nur auf die unmittelbar benachbarten Teilchen eines den ganzen Raum erfüllenden Mediums, diese dann wieder auf die anliegenden Teilchen des Mediums, bis sich die Wirkung zum nächsten Körper fortgepflanzt hat.

Die bisher bekannten Erscheinungen wurden von beiden Theorien gleich gut erklärt; aber die Maxwell'sche griff über die alte Theorie hinaus. Nach der ersteren mufsten, sobald es nur gelang, genügend rasch verlaufende Elektricitätsbewegungen zu erzeugen, durch diese im Medium Wellenbewegungen hervorgerufen werden, welche genau die Gesetze der Lichtwellenbewegung befolgen. Maxwell vermutete daher, dafs in den Teilchen leuchtender Körper beständig rapide Elektricitätsbewegungen vor sich gehen, und dafs die hierdurch im Medium erregten Schwingungen eben das Licht sind. Das die elektromagnetischen Wirkungen vermittelnde Medium wird dadurch identisch mit dem schon früher erforderlichen Lichtäther, und wir können ihm daher wohl wieder diesen Namen beilegen, obwohl es vielfach andere Eigenschaften haben mufs, um zur Vermittlung des Elektromagnetismus tauglich zu sein.

Warum man bei den bisherigen Versuchen über Elektricität keine derartigen Schwingungen bemerken konnte, läfst sich vielleicht in folgender Weise anschaulich machen. Wir wollen die flache Hand an ein ruhendes Pendel anlegen, sie langsam senkrecht zur Pendelstange, das Pendel hebend, nach derjenigen Seite bewegen, wo dieses anliegt, dann wieder zurück und schliesslich nach der anderen Seite ganz entfernen. Das Pendel macht, der Hand folgend, eine halbe Schwingung, aber es schwingt nicht weiter, weil die ihm erteilte Geschwindigkeit zu klein ist. Ein anderes Beispiel! Die Theorie nimmt an, dafs beim Zupfen einer Saite ein Punkt der Saite aus der Ruhelage entfernt und dann plötzlich die ganze Saite sich selbst überlassen wird. Ich glaubte das als Student nicht, sondern meinte, der Zupfende müsse der Saite noch einen besonderen Stofs erteilen; denn wenn ich die Saite zuerst mit dem Finger ausbog und dann diesen in der Richtung, in der die Saite schwingen sollte, rasch entfernte, blieb diese stumm. Ich übersah, dafs ich den Finger im Verhältnisse zur Raschheit der Saitenschwingungen viel zu langsam bewegte und so diese selbst aufhielt.

Gerade so wurden bei den bisherigen Versuchen die elektrischen Zustände im Vergleiche mit der enormen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität immer verhältnismäfsig viel zu langsam in andere übergeführt. Hertz fand nun nach mühevollen Vorversuchen, deren leitenden Gedankengang er selbst in der unbefangensten Weise schildert, gewisse Versuchsbedingungen, unter denen elektrische Zustände so rasch periodisch geändert werden, dafs beobachtbare Wellen

entstehen. Wie alles Geniale sind dieselben äufserst einfach. Trotzdem kann ich hier selbstverständlich auch auf diese einfachen experimentellen Einzelheiten nicht eingehen. Die so von Hertz unzweifelhaft durch elektrische Entladungen erzeugten Wellen unterscheiden sich, wie Maxwell vorausgesagt hatte, qualitativ nicht im mindesten von den Lichtwellen. Aber wie gross ist der quantitative Unterschied!

Wie beim Schalle die Tonhöhe, so wird beim Lichte bekanntlich die Farbe durch die Schwingungszahl bestimmt. Im sichtbaren Lichte sind etwa 400 Billionen Schwingungen in der Secunde im äussersten Rot, 800 Billionen im äufsersten Violett die extremsten Schwingungszahlen. Man hatte schon lange ganz gleichartige Ätherwellen entdeckt, wobei bis etwa 20mal weniger als im äufsersten Rot und bis etwa dreimal soviel Schwingungen in der Secunde als im äufsersten Violett erfolgen. Sie sind für das Auge unsichtbar; aber die ersteren, die sogenannten ultraroten, durch ihre Wärmewirkung —, die letzteren, die ultravioletten, durch chemische und phosphorescenzerzeugende Wirkung erkennbar. In den von Hertz durch wirkliche Entladung erzeugten Wellen erfolgten in der Secunde nicht mehr als etwa 1000 Millionen Schwingungen, und Hertz's Nachfolger kamen bis etwa auf das Hundertfache.

Dafs Schwingungen, die im Verhältnis zu den Lichtschwingungen so langsam geschehen, nicht direct mit dem Auge gesehen werden können, ist selbstverständlich. Hertz wies sie durch mikroskopisch kleine Fünkchen nach, die sie sogar in grofsen Entfernungen in passend geformten Leitern erzeugen. Letztere könnte man daher als Augen für Hertz'sche Schwingungen bezeichnen. Mit diesen Mitteln bestätigte Hertz die Maxwell'sche Theorie bis ins kleinste Detail, und wiewohl man versuchte, auch aus der Fernwirkungstheorie zu elektrischen Schwingungen zu gelangen, so war doch die Überlegenheit der Maxwell'schen Theorie bald niemandem mehr zweifelhaft; ja wie Pendel nach der entgegengesetzten Seite über die Ruhelage hinausgehen, so sprachen schliefslich die Extremsten von der Verfehltheit aller Anschauungen der alten classischen Theorie der Physik. Doch davon später! Vorher wollen wir noch ein wenig bei diesen glänzenden Entdeckungen verweilen.

Von den schon vor Hertz bekannten verschiedenen Ätherwellen gehen, wie man längst wufste, die einen durch diese, die anderen durch jene Körper leichter hindurch. So läfst wässerige Alaunlösung alle sichtbare, aber nur wenig ultrarote Strahlung hindurch, welche dafür eine für sichtbares Licht völlig undurchlässige Lösung von Jod in Schwefelkohlenstoff mit Leichtigkeit durchdringt. Die Hertz'schen Wellen durchdringen fast alle Körper mit Ausnahme der Metalle und Elektrolyte. Wenn daher Marconi an einem Orte sehr kurze Hertz'sche Wellen erregte und an einem viele Kilometer

entfernten mit einer passenden Modification des Apparates, den wir Auge für Hertz'sche Wellen genannt haben, in Morsezeichen umsetzte, so construirte er eigentlich nichts anderes als einen gewöhnlichen optischen Telegraphen; nur dafs er statt Wellen von etwa 500 Billionen solche von ungefähr dem zehnten Teil einer Billion von Schwingungen in der Secunde anwandte. Dies hat den Vorteil, dafs die letzteren Wellen durch Nebel, ja selbst Gestein fast ungeschwächt hindurchgehen. Einen Berg von gediegenem Metall oder einen Nebel von Quecksilbertröpfchen würden sie so wenig durchdringen, wie das sichtbare Licht einen gewöhnlichen Berg oder Nebel.

Die Mannigfaltigkeit der uns bekannten Strahlenarten wurde noch vermehrt durch die mit Recht so gefeierte Entdeckung der Röntgenstrahlen. Diese durchdringen alle Körper, auch die Metalle; letztere sowie metallhaltige Körper, wie die calciumhaltigen Knochen, aber unter erheblicher Schwächung. Die an allen früher besprochenen Strahlen nachgewiesenen Erscheinungen der Polarisation, Interferenz und Beugung konnten an ihnen noch nicht beobachtet werden. Wären sie wirklich jeder Polarisation unfähig, so müfsten es, wenn überhaupt Wellen, longitudinale sein; aber es mufs selbst die Möglichkeit offen gelassen werden, dafs sie auch der Interferenz unfähig, also überhaupt keine Wellen sind, weshalb man vorsichtig von Röntgenstrahlen, nicht von Röntgenwellen spricht. Würde einst ein sie polarisirender Körper entdeckt, so spräche dies dafür, dafs sie qualitativ dem Lichte gleich sind; sie müfsten aber noch viel, viel kleinere Schwingungsdauer haben, als selbst das äufserste Ultraviolett, oder vielleicht nur, wie einige Physiker glauben, aus rasch sich folgenden Stofswellen bestehen.

Im Hinblick auf diese enorme Mannigfaltigkeit von Strahlen möchten wir fast mit dem Schöpfer darüber rechten, dafs er unser Auge nur für einen so winzigen Bereich derselben empfindlich gemacht hat. Es geschähe dies hier wie immer mit Unrecht; denn überall wurde dem Menschen nur ein kleiner Bereich eines grofsen Naturganzen direct geoffenbart und dafür dessen Verstand befähigt, die Erkenntnis des Übrigen durch eigene Anstrengung zu erringen.

Wären die Röntgenstrahlen wirklich longitudinale Wellen des Lichtäthers, was zu glauben ihr Entdecker gleich anfangs sehr geneigt war, und was noch bis heute durch keine einzige Thatsache widerlegt ist, so läge uns da ein eigentümlicher, in der Wissenschaft nicht einzig dastehender Fall vor. Die classische theoretische Physik hatte ihre Ansicht über die Beschaffenheit des Lichtäthers vollkommen fertig. Nur eins fehlte noch, wie man glaubte, zur unumstöfslichen Bestätigung ihrer Richtigkeit, nämlich die longitudinalen Ätherwellen; diese aber konnte man um keinen Preis finden. Jetzt, da bewiesen ist, dafs der Lichtäther einen wesentlich anderen Bau haben mufs,

da er ja auch Vermittler der elektrischen und magnetischen Wirkungen ist, jetzt, da die alte Ansicht über die Beschaffenheit des Lichtäthers abgethan ist, kommt man post festum ihrer ersehnten Bestätigung, der Entdeckung von Longitudinalwellen im Äther so nahe.

Ähnlich ging es mit der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik. Diese basirt, wie wir sahen, auf der Annahme, dafs die Wirkung elektrischer Massen von deren Relativbewegung abhängt, und gerade zur Zeit, als die Unzulänglichkeit der Weber'schen Theorie definitiv bewiesen wurde, fand Rowland in Helmholtz's Laboratorium durch einen directen Versuch, dafs bewegte Elektricitäten anders als ruhende wirken. In früherer Zeit wäre man wohl geneigt gewesen, dies für einen directen Beweis der Richtigkeit der Weber'schen Theorie zu halten. Heute weifs man, dafs es kein Experimentum crucis ist, dafs es vielmehr ebenso aus der Maxwell'schen Theorie folgt.

Ferner folgt aus einer Modification der Weber'schen Theorie, dafs nicht blofs die stromführenden Leiter, sondern auch die Ströme in diesen selbst durch den Magneten abgelenkt werden müssen. Auch diese Erscheinung, welche man lange vergebens gesucht hatte, wurde von dem amerikanischen Physiker Hall zu einer Zeit aufgefunden, wo sich die Anhänger der Weber'schen Theorie wegen vorangegangener weit gröfserer Niederlagen längst des Triumphes nicht mehr freuen konnten.

Solche Erscheinungen beweisen, wie vorsichtig man sein mufs, wenn man in der Bestätigung einer Consequenz einen Beweis für die unbedingte Richtigkeit einer Theorie erblicken will. Nach Maxwell's Anschauung stimmen eben oft Bilder, welche in vielen Fällen der Natur angepafst wurden, automatisch auch noch in manchen anderen, woraus aber noch nicht die Übereinstimmung in allen folgt. Andererseits zeigen diese Erscheinungen, dafs auch eine falsche Theorie nützlich sein kann, wenn sie nur Anregung zu neuartigen Versuchen in sich birgt.

Durch die angeführten Entdeckungen von Hertz, Röntgen, Rowland, Hall war bewiesen, dafs Faraday doch auch seinen Nachfolgern noch etwas zu finden übrig gelassen hat. Hieran schliefsen sich noch manche andere Entdeckungen der neuesten Zeit, von denen hier nur die Zeeman's vom Einflusse des Magnetismus auf das ausgesandte Licht und die vom correspondirenden Einflusse auf die Lichtabsorption erwähnt werden mögen. Alle diese Erscheinungen, von denen viele von Faraday gesucht wurden, konnten mit den damaligen Mitteln absolut nicht beobachtet werden. Hat daher oft das Genie mit den kleinsten Mitteln das Gröfste geleistet, so sieht man hier umgekehrt, dafs zu manchen Leistungen der Menschengeist doch erst durch die gegenwärtige enorme Vervoll-

kommnung der Beobachtungsapparate und Experimentirtechnik befähigt wird.

Die meisten der geschilderten ganz neuartigen Erscheinungen sind bis jetzt erst in ihren ersten Grundzügen bekannt. Die Erforschung ihrer Einzelheiten, ihrer Beziehungen unter einander und zu allen anderen bekannten Erscheinungen, mit einiger Übertreibung möchte ich sagen, ihre Einlage in den mechanisch-physikalischen Webstuhl eröffnet für die Zukunft ein fast unermefslich scheinendes Arbeitsfeld. Die reichen, schon im Beginne erzielten praktischen Erfolge (Röntgenphotographie, Telegraphie ohne Draht, Radiotherapie) lassen die praktische Ausbeute ahnen, welche die sonst immer allein erst praktisch fruchtbare Detailforschung bringen wird. Die Theorie aber wurde aus ihrer Ruhe aufgeschreckt, in der sie schon fast alles erkannt zu haben glaubte, und es gelang bis heute noch nicht, die neuen Erscheinungen in ein so einheitliches Lehrgebäude zusammenzufassen, wie es das alte gewesen war; vielmehr ist heute noch alles im Schwanken und in Gärung begriffen.

Diese Verwirrung wurde durch das Zusammenwirken mancher anderer Umstände mit den genannten vermehrt. Es sind da zunächst gewisse philosophische Bedenken gegen die Grundlagen der Mechanik zu erwähnen, welche am deutlichsten durch Kirchhoff ausgesprochen wurden. Man hatte in die alte Mechanik unbedenklich den Dualismus zwischen Kraft und Stoff eingeführt. Die Kraft betrachtete man als ein besonderes Agens neben der Materie, welches die Ursache aller Bewegung ist; ja man stritt sogar ab und zu, ob die Kraft ebenso wie die Materie existire oder eine Eigenschaft der letzteren sei, oder ob umgekehrt die Materie als Product der Kraft angesehen werden müsse.

Kirchhoff war weit entfernt, diese Fragen beantworten zu wollen, er hielt jedenfalls die ganze Art der Fragestellung für unzweckmäfsig und nichtssagend. Um sich aber jedes Urteils über den Wert solcher metaphysischer Betrachtungen enthalten zu können, erklärte er, alle diese dunklen Begriffe ganz vermeiden und die Aufgabe der Mechanik auf die einfachste, unzweideutigste Beschreibung der Bewegung der Körper beschränken zu wollen, ohne sich um die metaphysische Ursache derselben zu kümmern. In seiner Mechanik ist daher blofs von materiellen Punkten und den mathematischen Ausdrücken die Rede, durch welche die Bewegungsgesetze der ersteren formulirt werden; der Begriff der Kraft fehlt vollständig. Hatte einst Napoleon in der Kapuzinergruft zu Wien gerufen: „Alles ist eitel mit Ausnahme der Kraft", so strich jetzt Kirchhoff auf einer Druckseite die Kraft aus der Natur, jenen deutschen Professor beschämend, von dem Karl Moor erzählt, dafs er sich vermafs,

trotz seiner Schwäche auf seinem Katheder das Wesen der Kraft zu behandeln, aber doch nicht diese zu vernichten.

Kirchhoff hat selbst das Wort Kraft später wieder eingeführt, aber nicht als metaphysischen Begriff, sondern bloſs als abgekürzte Bezeichnung für gewisse algebraische Ausdrücke, welche bei der Beschreibung der Bewegung beständig vorkommen. Später hat man wohl diesem Worte öfter wieder, besonders im Hinblicke auf die Analogie mit der für den Menschen so geläufigen Muskelanstrengung, eine erhöhte Bedeutung vindicirt, aber die alten dunkeln Fragestellungen und Begriffe werden wohl niemals mehr in der Naturwissenschaft wiederkehren.

Kirchhoff hatte an der alten classischen Mechanik keine materielle Änderung vorgenommen; seine Reformation war eine rein formale. Viel weiter ging Hertz, und während fast alle späteren Autoren die Darstellungsweise Kirchhoff's nachahmten, hie und da freilich oft mehr gewisse, bei Kirchhoff stehende Ausdrucksweisen als dessen Geist, so habe ich Hertz's Mechanik zwar sehr oft preisen gehört, aber noch niemanden sah ich auf dem von Hertz gewiesenen Wege weiterwandeln.

Es ist, soviel ich weiſs, noch nicht darauf hingewiesen worden, daſs ein Gedanke in der Kirchhoff'schen Mechanik, wenn man dessen letzte Consequenzen zieht, direct zu den Hertz'schen Ideen führt. Kirchhoff definirt nämlich den wichtigsten Begriff der Mechanik, den der Masse, nur für den Fall, daſs beliebige Bedingungsgleichungen zwischen den materiellen Punkten bestehen. In diesem Falle sieht man klar die Notwendigkeit des von Kirchhoff als Masse bezeichneten Factors. In den anderen Fällen, wo sich die materiellen Punkte ohne Bedingungsgleichungen so bewegen, wie es den alten Kraftwirkungen entsprach, so z. B. in der Elasticitätslehre, Aeromechanik etc., schwebt Kirchhoff's Massenbegriff in der Luft, und die hieraus folgende Unklarheit schwindet erst dann vollständig, wenn man die letzteren Fälle überhaupt ausschlieſst.

Dies that Hertz. Die wichtigsten der Kräfte der alten Mechanik waren directe Fernkräfte zwischen je zwei materiellen Punkten gewesen. Kirchhoff entfernte die Frage nach der metaphysischen Ursache dieser Fernwirkung aus der Mechanik; aber Bewegungen, welche genau nach denselben Gesetzen erfolgen, als ob diese Fernkräfte bestünden, lieſs er zu. Nun ist man heute, wie wir sahen, überzeugt, daſs die elektrischen und magnetischen Wirkungen durch ein Medium vermittelt werden. Bleibt nur noch die Gravitation, von der schon ihr Entdecker Newton annahm, daſs sie wohl wahrscheinlich der Wirkung eines Mediums zuzuschreiben sei, und die Molecularkräfte. Letztere lassen sich angenähert in festen Körpern

durch die Bedingung der Unveränderlichkeit der Gestalt, in tropfbarflüssigen durch die der Unveränderlichkeit des Volumens ersetzen. Die Ersetzung der Elasticität, der Expansivkraft compressibler Flüssigkeiten, der Krystallisations- und chemischen Kräfte durch Bedingungen von einer analogen Form ist zwar bis heute noch nicht gelungen. Aber offenbar in der Voraussetzung, dafs sie gelingen werde, verwirft Hertz im Gegensatze zu Kirchhoff auch jede Bewegung, die so geschieht, wie sie die alten Fernkräfte fordern, und läfst blofs Bewegungen zu, für welche derartige Bedingungen bestehen, deren Form von ihm genauer mathematisch definirt wird. Das einzige, was er nebst diesen Bedingungen zum Aufbaue der ganzen Mechanik noch verwendet, ist ein Bewegungsgesetz, welches einen speciellen Fall des Gaufs'schen Princips des kleinsten Zwanges darstellt.

Hat also Kirchhoff blofs die Frage nach der Ursache der Bewegungen, die man sonst den Fernkräften zuschrieb, verpönt, so merzt Hertz diese Bewegungen selbst aus und sucht die Kräfte durch Bedingungsgleichungen zu erklären, während man sonst umgekehrt die Bewegungsbedingungen aus Kräften erklärte. Hertz unterfängt sich daher in viel wahrerem Sinne als Kirchhoff, die Kraft selbst zu überwältigen. Er schuf so ein frappirend einfaches, von ganz wenigen, gewissermafsen sich logisch von selbst darbietenden Principien ausgehendes System der Mechanik. Leider schlofs sich im gleichen Momente sein Mund auf ewig den tausend Fragen um Erläuterungen, die gewifs nicht auf meinen Lippen allein schweben.

Man begreift nach dem Gesagten, dafs sich gewisse Erscheinungen, wie die freie Bewegung starrer Systeme, aus Hertz's Theorie mit Leichtigkeit ergeben. Bei den übrigen Erscheinungen mufs Hertz das Vorhandensein verborgener, in Bewegung begriffener Massen annehmen, durch deren Eingriff in die Bewegung der sichtbaren Massen sich erst die Gesetze der Bewegung der letzteren erklären, welche daher dem ebenfalls verborgenen, die elektromagnetischen und Gravitationswirkungen erzeugenden Medium entsprechen. Aber wie sind diese uns völlig unbekannten Massen in jedem Falle zu denken? Ja, ist es überhaupt allemal möglich, durch sie zum Ziele zu gelangen? Die Structur der ehemals gebräuchlichen Medien und auch des Maxwell'schen Lichtäthers darf ihnen nicht beigelegt werden, da ja in allen diesen Medien solche Kräfte wirkend gedacht wurden, welche Hertz gerade ausschliefst.

Schon in ganz einfachen mechanischen Beispielen lassen sich nur ganz unverhältnismäfsig complicirte Systeme verborgener Massen finden, welche das Problem im Sinne der Hertz'schen Theorie lösen; weshalb mir der Wert der letzteren doch nur ein rein akademischer zu sein scheint.

Die Hertz'sche Mechanik scheint mir daher mehr ein Programm für eine ferne Zukunft zu sein. Wenn es einst gelingen sollte, alle Naturvorgänge durch solche verborgene Bewegungen im Hertz'schen Sinne in ungekünstelter Weise zu erklären, dann würde die alte Mechanik durch die Hertz'sche überwunden sein. Bis dahin ist die erstere die einzige, welche alle Erscheinungen wirklich in klarer Weise darzustellen vermag, ohne Dinge beizuziehen, die nicht nur verborgen sind, sondern von denen man auch gar keine Ahnung hat, wie man sie denken soll.

Hertz hat in seinem Buche über Mechanik, ebenso wie die mathematisch-physikalischen Ideen Kirchhoff's, auch die erkenntnistheoretischen Maxwell's zu einer gewissen Vollendung gebracht. Maxwell hatte die Hypothese Weber's eine reale physikalische Theorie genannt, womit er sagen wollte, dafs ihr Autor objective Wahrheit dafür in Anspruch nahm, seine eigenen Ausführungen dagegen bezeichnete er als blofse Bilder der Erscheinungen. Hieran anknüpfend, bringt Hertz den Physikern so recht klar zum Bewufstsein, was wohl die Philosophen schon längst ausgesprochen hatten, dafs keine Theorie etwas Objectives, mit der Natur wirklich sich Deckendes sein kann, dafs vielmehr jede nur ein geistiges Bild der Erscheinungen ist, das sich zu diesen verhält, wie das Zeichen zum Bezeichneten.

Daraus folgt, dafs es nicht unsere Aufgabe sein kann, eine absolut richtige Theorie, sondern vielmehr ein möglichst einfaches, die Erscheinung möglichst gut darstellendes Abbild zu finden. Es ist sogar die Möglichkeit zweier ganz verschiedener Theorien denkbar, die beide gleich einfach sind und mit den Erscheinungen gleich gut stimmen, die also, obwohl total verschieden, beide gleich richtig sind. Die Behauptung, eine Theorie sei die einzig richtige, kann nur der Ausdruck unserer subjectiven Überzeugung sein, dafs es kein anderes gleich einfaches und gleich gut stimmendes Bild geben könnte.

Zahlreiche Fragen, die früher unergründlich schienen, entfallen hiermit von selbst. Wie kann, sagte man früher, von einem materiellen Punkte, der ein blofses Gedankending ist, eine Kraft ausgehen, wie können Punkte zusammen Ausgedehntes liefern etc.? Jetzt weifs man, dafs sowohl die materiellen Punkte, als auch die Kräfte blofse geistige Bilder sind. Erstere können nicht Ausgedehntem gleich sein, aber es mit beliebiger Annäherung abbilden. Die Frage, ob die Materie atomistisch zusammengesetzt oder ein Continuum ist, reducirt sich auf die viel klarere, ob die Vorstellung enorm vieler Einzelwesen oder die eines Continuums ein besseres Bild der Erscheinungen zu liefern vermöge.

Wir sprachen* zuletzt hauptsächlich über Mechanik. Eine die ganze Physik ergreifende Umwälzung wurde in Anknüpfung an das rapide Anwachsen der Bedeutung des Energieprincips versucht. Wir erwähnten dieses Princip schon einmal ganz beiläufig als eine durch die Erfahrung bestätigte Consequenz der mechanistischen Naturanschauung. Nach dieser erscheint die Energie als ein bekannter, aus schon früher eingeführten Gröfsen (Masse, Geschwindigkeit, Kraft, Weg) in gegebener Weise zusammengesetzter mathematischer Ausdruck, bar alles Geheimnisvollen, und da sie Wärme, Elektricität etc. als Bewegungsformen von teilweise freilich ganz unbekannter Natur ansieht, so sieht sie im Energieprincipe eine wichtige Bestätigung ihrer Schlüsse.

Wir begegnen einer Würdigung desselben übrigens schon in der ersten Kindheit der Mechanik. Leibniz sprach von der Substantialität der Kraft, worunter er die Energie meint, fast mit denselben Worten, wie die modernsten Energetiker; aber er läfst beim unelastischen Stofse aus der lebendigen Kraft Deformation, Bruch von Cohärenz und Textur, Spannung von Federn etc. entstehen; davon, dafs Wärme eine Energieform sei, hat er keine Ahnung. Du Bois-Reymond ist daher auch sachlich vollkommen im Unrechte, wenn er in seiner Gedächtnisrede auf Helmholtz Robert Mayer nochmals zu verkleinern sucht und ihm die Priorität der Entdeckung der Äquivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit abspricht. Letzterer bekannte sich übrigens keineswegs zur Ansicht, dafs die Wärme Molecularbewegung sei, er hielt sie vielmehr für eine vollständig neue Energieform und behauptete nur ihre Äquivalenz mit der mechanischen Energie. Auch die Physiker, welche der ersteren Ansicht huldigten, vor allen Clausius, unterschieden strenge zwischen den Sätzen, welche allein aus ihr folgen, der speciellen Thermodynamik, und denen, welche unabhängig von jeder Hypothese über die Natur der Wärme aus feststehenden Erfahrungsthatsachen abgeleitet werden können, der allgemeinen Thermodynamik.

Während nun die specielle Thermodynamik nach einer Reihe glänzender Resultate wegen der Schwierigkeit, die Molecularbewegungen mathematisch zu behandeln, ins Stocken geriet, erzielte die allgemeine eine Fülle von Resultaten. Man fand, dafs die Temperatur dafür ausschlaggebend ist, wann und in welcher Menge sich Wärme und Arbeit in einander umsetzen. Der Zuwachs der zugeführten Wärme stellte sich als Product der (sogenannten absoluten) Temperatur und des Zuwachses einer anderen Function dar, welche man nach Clausius' Vorgang die Entropie nennt. Aus dieser construirte nun besonders Gibbs neue Functionen, wie die später als thermodynamisches Potential bei constanter Temperatur, constantem Drucke etc. bezeichneten, und gelangte mit ihrer Hülfe zu den über-

raschendsten Resultaten auf den verschiedensten Gebieten, so der Chemie, Capillarität etc.

Man fand ferner, dafs Gleichungen von analoger Form auch für die Verwandlung der anderen Energieformen, elektrischer, magnetischer Strahlungsenergie etc., in einander gelten, und dafs da namentlich auch überall Zerlegungen in zwei Factoren mit ähnlichem Erfolge vorgenommen werden können. Dies begeisterte eine Reihe von Forschern, die sich selbst Energetiker nennen, so sehr, dafs sie die Notwendigkeit des Bruchs mit allen bisherigen Anschauungen lehrten, gegen die sie einwandten, der Schlufs von der Äquivalenz von Wärme und lebendiger Kraft auf deren Identität sei ein Fehlschlufs, als ob für diese Identität blofs der Äquivalenzsatz, nicht auch so vieles andere spräche.

Der Energiebegriff gilt der neuen Lehre als der einzig richtige Ausgangspunkt der Naturforschung, die Zerlegbarkeit in zwei Factoren und ein sich daran schliefsender Variationssatz als das Fundamentalgesetz der gesamten Natur. Jede mechanische Versinnlichung, warum die Energie gerade diese curiosen Formen annimmt und in jeder derselben zwar ähnlichen, aber doch wieder wesentlich anderen Gesetzen folgt, halten sie für überflüssig, sogar schädlich, und die Physik, ja die ganze Naturwissenschaft der Zukunft ist ihnen eine blofse Beschreibung des Verhaltens der Energie in allen ihren Formen, eine Naturgeschichte der Energie; was freilich, wenn man unter Energie überhaupt alles Wirksame versteht, zum Pleonasmus wird.

Unzweifelhaft sind die Analogien des Verhaltens der verschiedenen Energieformen so wichtig und interessant, dafs ihre allseitige Verfolgung als eine der schönsten Aufgaben der Physik bezeichnet werden muss; gewifs rechtfertigt auch die Wichtigkeit des Energiebegriffes den Versuch, ihn als ersten Ausgangspunkt zu wählen. Es mufs ferner zugegeben werden, dafs die Forschungsrichtung, welche ich die classische theoretische Physik genannt habe, hie und da zu Auswüchsen führte, gegen welche eine Reaction notwendig war. Jeder Nächstbeste fühlte sich berufen, einen Bau von Atomen, Wirbeln und Verkettungen derselben zu ersinnen, und glaubte, damit dem Schöpfer dessen Plan definitiv abgeguckt zu haben.

Ich weifs, wie fördernd es ist, die Probleme von den verschiedensten Seiten in Angriff zu nehmen, und mein Herz schlägt warm für jede originelle, begeisterte wissenschaftliche Arbeit. Ich drücke daher der Secession lebhaft die Hand. Nur schien mir, dafs sich die Energetik oft durch oberflächliche, blofs formale Analogien täuschen liefs, dafs ihre Gesetze der in der classischen Physik üblichen klaren und eindeutigen Fassung, ihre Schlüsse der dort herausgearbeiteten Strenge entbehrten, dafs sie von dem Alten manches Gute, ja für die Wissenschaft Unentbehrliche mit verwarf. Auch

schien mir der Streit, ob die Materie oder die Energie das Existirende sei, ein Rückfall in die alte, überwunden geglaubte Metaphysik, ein Verstofs gegen die Erkenntnis, dafs alle theoretischen Begriffe Vorstellungsbilder sind.

Wenn ich in allen diesen Dingen meine Überzeugung rückhaltlos aussprach, so glaubte ich dadurch in nützlicherer Weise als durch Lob mein Interesse für die Fortentwickelung der Lehre von der Energie zu documentiren. Gleichwie in der Hertz'schen Mechanik, so kann ich daher auch in der Lehre der Ableitbarkeit der gesamten Physik aus dem Satze von den zwei Energiefactoren und dem angeführten Variationssatze nur ein Ideal für ferne Zukunft erblicken. Nur diese kann die heute noch ganz unentschiedene Frage beantworten, ob ein derartiges Naturbild besser als das frühere oder gar das beste ist.

Von den Energetikern kommen wir zu den Phänomenologen, welche ich als gemäfsigte Secessionisten bezeichnen möchte. Ihre Lehre ist eine Reaction dagegen, dafs die alte Forschungsmethode die Hypothesen über die Beschaffenheit der Atome als das eigentliche Ziel der Wissenschaft, die daraus sich für sichtbare Vorgänge ergebenden Gesetze aber mehr blofs als Mittel zur Controle derselben betrachtet hatte.

Dies gilt freilich nur für deren extremste Richtung. Wir sahen, dafs schon Clausius strenge zwischen der allgemeinen, von Molecularhypothesen unabhängigen, und der speciellen Thermodynamik unterschieden hatte. Auch viele andere Physiker, z. B. Ampère, Franz Neumann, Kirchhoff, legten ihren Ableitungen keine Molecularvorstellungen zu Grunde, wenn sie auch die atomistische Structur der Materie nicht leugneten.

Eine Ableitungsweise finden wir da besonders häufig, welche ich die euklidische nennen möchte, da sie der von Euklid in der Geometrie angewandten nachgebildet ist. Es werden einige Sätze (Axiome) entweder als von selbst evident oder doch als unzweifelhaft erfahrungsmäfsig feststehend vorausgestellt, aus diesen dann zunächst gewisse einfache Elementargesetze als logische Consequenzen abgeleitet und daraus erst schliefslich die allgemeinen (Integral-) Gesetze construirt.

Mit dieser und den moleculartheoretischen Ableitungsweisen war man bisher so ziemlich ausgelangt; anders bei Maxwell's Theorie des Elektromagnetismus. Maxwell dachte sich in seinen ersten Arbeiten das den Elektromagnetismus fortpflanzende Medium ebenfalls als bestehend aus einer grofsen Zahl von Molecülen, wenigstens von mechanischen Individuen, den Bau derselben aber so complicirt, dafs sie nur als Hülfsmittel zur Auffindung der Gleichungen, als Schemata einer mit der thatsächlichen in gewisser Hinsicht analogen

Wirkung, aber nimmermehr als endgiltige Bilder des in der Natur Existirenden gelten können. Später zeigte er, dafs nicht blofs diese, sondern auch viele andere Mechanismen zum Ziele führen würden, sobald dieselben nur gewisse allgemeine Bedingungen erfüllten; aber alle Bemühungen, einen bestimmten, wirklich einfachen Mechanismus zu finden, an dem alle diese Bedingungen erfüllt sind, scheiterten. Dies ebnete einer Lehre den Boden, welche ich am prägnantesten charakterisiren zu können glaube, wenn ich zum dritten Male auf Hertz zurückkomme, dessen in der Einleitung seiner Abhandlung über die Grundgleichungen der Elektrodynamik niedergelegten Ideen für diese Lehre typisch sind.

Eine befriedigende mechanische Erklärung dieser Grundgleichungen hat Hertz nicht gesucht, wenigstens nicht gefunden; aber auch die euklidische Ableitungsweise verschmähte er. Mit Recht weist er darauf hin, dafs in der Mechanik nicht die wenigen Experimente, aus denen gewöhnlich deren Grundgleichungen gewonnen werden, dafs in der Elektrodynamik nicht die fünf oder sechs Fundamentalversuche Ampère's es sind, was uns von der Richtigkeit aller dieser Gleichungen so fest überzeugt, sondern vielmehr ihre nachherige Übereinstimmung mit allen bisher bekannten Thatsachen. Er fällt daher das salomonische Urteil, es sei das beste, nachdem man diese Gleichungen einmal habe, sie ohne jede Ableitung hinzuschreiben, dann mit den Erscheinungen zu vergleichen und in ihrer steten Übereinstimmung mit denselben den besten Beweis ihrer Richtigkeit zu erblicken.

Die Ansicht, deren Extrem hiermit ausgesprochen ist, fand die verschiedenste Aufnahme. Während die einen fast geneigt waren, sie für einen schlechten Witz zu halten, schien es anderen von nun an als einziges Ziel der Physik, ohne jede Hypothese, ohne jede Veranschaulichung oder mechanische Erläuterung für jede Reihe von Vorgängen Gleichungen aufzuschreiben, aus denen ihr Verlauf quantitativ berechnet werden kann, so dafs die alleinige Aufgabe der Physik darin bestünde, durch Probiren möglichst einfache Gleichungen zu finden, welche gewisse notwendige formale Bedingungen der Isotropie etc. erfüllen, und sie dann mit der Erfahrung zu vergleichen. Dies ist die extremste Richtung der Phänomenologie, welche ich die mathematische nennen möchte, während die allgemeine Phänomenologie jede Thatsachengruppe durch Aufzählung und naturgeschichtliche Schilderung aller dahin gehörigen Erscheinungen zu beschreiben sucht ohne Beschränkung der dazu dienlichen Mittel, aber unter Verzicht auf jede einheitliche Naturauffassung, auf jede mechanische Erläuterung oder sonstige Begründung. Letztere ist charakterisirt durch den von Mach citirten Ausspruch, dafs die Elektricität nichts anderes ist, als die Summe aller Erfahrungen, welche wir auf diesem Gebiete schon gemacht haben und noch zu machen hoffen. Beide

stellen sich die Aufgabe, die Erscheinungen darzustellen, ohne über die Erfahrung hinauszugehen.

Die mathematische Phänomenologie erfüllt zunächst ein praktisches Bedürfnis. Die Hypothesen, durch welche man zu den Gleichungen gelangt war, erwiesen sich als unsicher und dem Wandel unterworfen, die Gleichungen selbst aber, wenn sie einmal in genügend vielen Fällen erprobt waren, standen wenigstens innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen fest; darüber hinaus bedurften sie freilich wieder der Ergänzung und Verfeinerung. Schon für den praktischen Gebrauch ist es daher erforderlich, das Feststehende, Gesicherte vom Schwankenden möglichst reinlich zu sondern.

Es mufs auch zugegeben werden, dafs der Zweck jeder Wissenschaft, und daher auch der Physik, in der vollkommensten Weise erreicht wäre, wenn man Formeln gefunden hätte, mittelst deren man die zu erwartenden Erscheinungen in jedem speciellen Falle eindeutig, sicher und vollkommen genau vorausberechnen könnte; allein dies ist ebenso ein unerfüllbares Ideal, wie die Kenntnis des Wirkungsgesetzes und der Anfangszustände aller Atome.

Wenn die Phänomenologie glaubte, die Natur darstellen zu können, ohne irgendwie über die Erfahrung hinauszugehen, so halte ich das für eine Illusion. Keine Gleichung stellt irgend welche Vorgänge absolut genau dar, jede idealisirt sie, hebt Gemeinsames heraus und sieht von verschiedenem ab, geht also über die Erfahrung hinaus. Dafs dies notwendig ist, wenn wir irgend eine Vorstellung haben wollen, die uns etwas Künftiges vorauszusagen erlaubt, folgt aus der Natur des Denkprocesses selbst, der darin besteht, dafs wir zur Erfahrung etwas hinzufügen und ein geistiges Bild schaffen, welches nicht die Erfahrung ist und darum viele Erfahrungen darstellen kann.

Die Erfahrung, sagt Goethe, ist immer nur zur Hälfte Erfahrung. Je kühner man über die Erfahrung hinausgeht, desto allgemeinere Überblicke kann man gewinnen, desto überraschendere Thatsachen entdecken, aber desto leichter kann man auch irren. Die Phänomenologie sollte daher nicht prahlen, dafs sie die Erfahrung nicht überschreitet, nur warnen, dies in zu hohem Mafse zu thun.

Auch wenn sie kein Bild für die Natur zu setzen glaubt, irrt sie. Die Zahlen, ihre Beziehungen und Gruppirungen sind geradeso Bilder der Vorgänge, wie die geometrischen Vorstellungen der Mechanik. Erstere sind nur nüchterner, für die quantitative Darstellung besser, aber dafür weniger geeignet, wesentlich neue Perspectiven zu zeigen; sie sind schlechte heuristische Wegweiser; ebenso erweisen sich alle Vorstellungen der allgemeinen Phänomenologie als Bilder der Erscheinungen. Es wird daher wohl der beste Erfolg erzielt werden, wenn man stets alle Abbildungsmittel je nach Be-

dürfnis verwendet, aber nicht versäumt, die Bilder auf jedem Schritte an neuen Erfahrungen zu prüfen.

Dann wird man auch nicht, wie es den Atomistikern vorgeworfen wurde, durch die Bilder geblendet, Thatsachen übersehen. Hierzu führt jede, wie immer geartete, Theorie, wenn sie zu einseitig betrieben wird. Es war daran weniger eine specifische Eigentümlichkeit der Atomistik, als vielmehr der Umstand schuld, dafs man noch zu wenig gewarnt war, den Bildern zu trauen. Der Mathematiker darf ebensowenig seine Formeln mit der Wahrheit verwechseln, sonst wird er in gleicher Weise geblendet. Dies sieht man an den Phänomenologen, wenn sie die vielen vom Standpunkte der speciellen Thermodynamik allein verständlichen Thatsachen nicht bemerken, an den Gegnern der Atomistik, wenn sie alles dafür Sprechende ignoriren, ja selbst an Kirchhoff, wenn er, seinen hydrodynamischen Gleichungen trauend, die Ungleichheit des Drucks an verschiedenen Stellen eines wärmeleitenden Gases für unmöglich hält.

Die mathematische Phänomenologie kehrte naturgemäfs zu der dem Anscheine entsprechenden Vorstellung der Continuität der Materie zurück. Dem gegenüber machte ich darauf aufmerksam, dafs die Differentialgleichungen, welche sie benützt, laut Definition blofse Grenzübergänge darstellen, welche ohne die Voranstellung des Gedankens einer sehr grofsen Zahl von Einzelwesen einfach sinnlos sind. Nur bei gedankenlosem Gebrauche mathematischer Symbole kann man glauben, Differentialgleichungen von atomistischen Vorstellungen trennen zu können. Wird man sich vollkommen darüber klar, dafs die Phänomenologen versteckt im Gewande der Differentialgleichungen ebenfalls von atomartigen Einzelwesen ausgehen, die sie allerdings für jede Erscheinungsgruppe anders, bald mit diesen, bald mit jenen Eigenschaften in complicirtester Weise begabt denken müssen, so wird sich bald wieder das Bedürfnis nach einer vereinfachten einheitlichen Atomistik einstellen.

Die Energetiker und Phänomenologen hatten aus der geringen gegenwärtigen Fruchtbarkeit auf den Niedergang der Moleculartheorie geschlossen. Während diese nach der Meinung einiger überhaupt nur geschadet hat, so gaben doch andere zu, dafs sie früher von Nutzen war, dafs nahezu alle Gleichungen, welche den mathematischen Phänomenologen jetzt der Inbegriff der Physik sind, auf moleculartheoretischem Wege gewonnen wurden; aber letztere behaupteten, dafs sie jetzt, wo man diese Gleichungen bereits hat, überflüssig geworden sei. Alle schworen ihr Vernichtung. Sie wiesen auf das historische Princip hin, dafs oft die am meisten hochgehaltenen Ansichten in kurzer Zeit durch völlig verschiedene verdrängt werden, ja wie der heilige Remigius die Heiden, so mahnten sie die theoretischen Physiker, zu verbrennen, was man soeben noch angebetet hatte.

Allein historische Principe sind mitunter zweischneidig. Gewifs zeigt die Geschichte oft unvorhergesehene Umwälzungen; gewifs ist es nützlich, die Möglichkeit im Auge zu behalten, dafs das, was uns jetzt das Sicherste zu sein scheint, einmal durch etwas völlig anderes verdrängt werden kann; aber ebenso auch die Möglichkeit, dafs gewisse Errungenschaften doch für alle Zeiten in der Wissenschaft bleiben werden, wenn auch in ergänzter und veränderter Form. Ja, nach dem genannten historischen Princip dürften die Energetiker und Phänomenologen gar nicht definitiv siegen; denn dann würde daraus sofort wieder ihr baldiger Sturz folgen.

Nach Clausius' Vorgang haben die Anhänger der speciellen Thermodynamik nie den hohen Wert der allgemeinen geleugnet; die Erfolge der letzteren beweisen daher nicht das mindeste gegen die erstere. Es kann sich nur fragen, ob es neben diesen Erfolgen auch solche giebt, welche nur die Atomistik zu erreichen vermochte, und an solchen hat die Atomistik auch noch lange nach ihrer alten Glanzzeit viele bemerkenswerte aufzuweisen. Aus rein moleculartheoretischen Principien hat van der Waals eine Formel abgeleitet, welche das Verhalten der Flüssigkeiten, der Gase und Dämpfe und der verschiedenen Übergangsformen dieser Aggregatzustände zwar nicht vollkommen genau, aber mit bewunderungswürdiger Annäherung wiedergiebt und zu vielen neuen Resultaten, z. B. der Theorie der entsprechenden Zustände, geführt hat. Moleculartheoretische Überlegungen zeigten gerade in neuester Zeit den Weg zu Verbesserungen dieser Formel, und es ist die Hoffnung nicht ausgeschlossen, zunächst das Verhalten der chemisch einfachsten Substanzen, namentlich Argon, Helium etc., vollkommen genau darstellen zu können, so dafs also gerade die Atomistik sich dem Ideale der Phänomenologen, einer alle Körperzustände umfassenden mathematischen Formel, am meisten genähert hat. Daran schlofs sich eine kinetische Theorie der tropfbaren Flüssigkeiten.

Die Atomistik hat ferner, wie sie früher Licht auf das Avogadro'sche Gesetz, die Natur des Ozons etc. geworfen hatte, in neuerer Zeit wieder viel zur Versinnlichung und Ausarbeitung der Gibbs'schen Dissociationstheorie beigetragen, welche dieser zwar auf einem anderen, aber doch auf einem allgemeine moleculartheoretische Grundvorstellungen voraussetzenden Wege gefunden hatte. Sie hat die hydrodynamischen Gleichungen nicht nur neu begründet, sondern auch gezeigt, wo dieselben, sowie die Gleichungen für die Wärmeleitung noch der Correction bedürfen. Wenn auch die Phänomenologie es sicher ebenfalls für wünschenswert hält, stets neue Versuche anzustellen, um etwa notwendige Correctionen ihrer Gleichungen zu finden, so leistet die Atomistik hier doch viel mehr, indem sie auf

bestimmte Versuche hinzuweisen gestattet, welche am ersten zur wirklichen Auffindung solcher Correctionen Aussicht bieten.

Auch die specifisch moleculartheoretische Lehre vom Verhältnisse der beiden Wärmecapacitäten der Gase spielt gerade heute wieder eine wichtige Rolle. Clausius hatte dieses Verhältnis für die einfachsten Gase, deren Molecüle sich wie elastische Kugeln verhalten, zu $1^2/_3$ berechnet, ein Wert, der für keines der damals bekannten Gase zutraf, woraus er schlofs, dafs es so einfach gebaute Gase nicht giebt. Maxwell fand für dieses Verhältnis im Falle, dafs sich die Molecüle beim Stofse wie nicht kugelige elastische Körper verhalten, den Wert $1^1/_3$. Da aber dasselbe für die bekanntesten Gase den Wert 1,4 hat, so verwarf Maxwell seine Theorie ebenfalls. Er hatte aber den Fall übersehen, dafs die Molecüle um eine Axe symmetrisch sind; dann fordert die Theorie für das in Rede stehende Verhältnis genau auch den Wert 1,4.

Der alte Clausius'sche Wert $1^2/_3$ war schon von Kundt und Warburg für Quecksilberdampf gefunden worden, aber wegen der Schwierigkeit dieses Versuches war er nie wiederholt worden und fast in Vergessenheit geraten. Da kehrte derselbe Wert $1^2/_3$ für das Verhältnis der Wärmecapacitäten bei allen von Lord Rayleigh und Ramsay entdeckten neuen Gasen wieder, und auch alle anderen Umstände deuteten, wie dies schon beim Quecksilberdampfe der Fall gewesen war, auf den von der Theorie geforderten besonders einfachen Bau ihrer Molecüle hin. Welchen Einflufs hätte es auf die Geschichte der Gastheorie gehabt, wenn Maxwell nicht in dieses kleine Versehen verfallen wäre, oder wenn die neuen Gase schon zur Zeit der ersten Rechnung Clausius' bekannt gewesen wären? Man hätte dann gleich anfangs alle von der Theorie geforderten Werte für das Verhältnis der Wärmecapacitäten bei den einfachsten Gasen wiedergefunden.

Ich erwähne endlich noch der Beziehungen, welche die Moleculartheorie zwischen dem Entropiesatze und der Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, über deren reale Bedeutung sich ja streiten läfst, von denen aber wohl kein Unbefangener leugnen wird, dafs sie unseren Ideenkreis zu erweitern und Fingerzeige zu neuen Gedankencombinationen und sogar Versuchen zu geben imstande sind.

Alle diese Leistungen und zahlreiche frühere Errungenschaften der Atomlehre können durch die Phänomenologie oder Energetik absolut nicht gewonnen werden, und ich behaupte, dafs eine Theorie, welche Selbständiges, in anderer Weise nicht Gewinnbares leistet, für welche obendrein so viele andere physikalische, chemische und krystallographische Thatsachen sprechen, nicht zu bekämpfen, sondern fortzupflegen ist. Der Vorstellung über die Natur der Molecüle aber wird man den weitesten Spielraum lassen müssen. So wird man die Theorie des Verhältnisses der Wärmecapacitäten nicht aufgeben, weil

sie noch nicht allgemein anwendbar ist; denn die Molecüle verhalten sich nur bei den einfachsten Gasen und auch bei diesen nicht bei höchsten Temperaturen und nur hinsichtlich ihrer Zusammenstöfse wie elastische Körper; über ihre nähere, gewifs enorm complicirte Beschaffenheit aber hat man noch keine Anhaltspunkte; man wird vielmehr solche zu gewinnen suchen. Neben der Atomistik kann die ebenfalls unentbehrliche, von jeder Hypothese losgelöste Präcisirung und Discussion der Gleichungen einhergehen, ohne dafs letztere ihren mathematischen Apparat, erstere ihre materiellen Punkte zum Dogma erhebt.

Bis heute aber herrscht noch der lebhafteste Kampf der Meinungen; jeder hält seine für die echte, und er möge es, wenn es in der Absicht geschieht, ihre Kraft den anderen gegenüber zu erproben. Der rapide Fortschritt hat die Erwartungen auf das höchste gespannt, was wird das Ende sein?

Wird die alte Mechanik mit den alten Kräften, wenn auch der Metaphysik entkleidet, in ihren Grundzügen bestehen bleiben oder einst nur mehr in der Geschichte fortleben, von Hertz's verborgenen Massen oder von ganz andern Vorstellungen verdrängt? Wird von der heutigen Moleculartheorie trotz aller Ergänzungen und Modificationen doch das Wesentliche übrig bleiben, wird einmal eine von der jetzigen total verschiedene Atomistik herrschen oder sich gar entgegen meiner Beweisführung die Vorstellung des reinen Continuums als das beste Bild erweisen? Wird die mechanische Naturanschauung einmal die Hauptschlacht der Entdeckung eines einfachen mechanischen Bildes für den Lichtäther gewinnen, werden wenigstens mechanische Modelle immer bestehen, werden sich neue, nichtmechanische als besser erweisen, werden die beiden Energiefactoren einmal alles beherrschen, oder wird man sich schliefslich begnügen, jedes Agens als die Summe von allerhand Erscheinungen zu beschreiben, oder wird gar die Theorie zur blofsen Formelsammlung und daran sich knüpfenden Discussion der Gleichungen werden?

Wird überhaupt je einmal die Überzeugung entstehen, dafs gewisse Bilder nicht mehr von einfacheren, umfassenderen verdrängt werden können, dafs sie „wahr“ sind, oder machen wir uns vielleicht die beste Vorstellung von der Zukunft, wenn wir uns das vorstellen, wovon wir gar keine Vorstellung haben?

In der That interessante Fragen! Man bedauert fast, sterben zu müssen lange vor ihrer Entscheidung. O unbescheidener Sterblicher! Dein Loos ist die Freude am Anblicke des wogenden Kampfes!

Übrigens möge man lieber das Naheliegende bearbeiten, als sich um so Fernes den Kopf zerbrechen. Hat doch das Jahrhundert genug geleistet! Eine unerwartete Fülle positiver Thatsachen und

eine köstliche Sichtung und Läuterung der Forschungsmethoden vermacht es dem kommenden. Ein spartanischer Kriegerchor rief den Jünglingen zu: Werdet noch tapferer als wir! Wenn wir, einer alten Gepflogenheit folgend, das neue Jahrhundert mit einem Segenswunsche begrüfsen wollen, so können wir ihm fürwahr, an Stolz jenen Spartanern gleich, wünschen, es möge noch gröfser und bedeutungsvoller werden, als das scheidende!

Wirkung der neuen preufsischen Prüfungsordnung für Lehramtscandidaten auf den Universitätsunterricht.

Bericht, erstattet von **H. Weber** in Strafsburg i./E.

Seit einem Jahrzehnt oder etwas länger hat unser gesamtes höheres Unterrichtswesen eine Krisis durchzumachen, die ihren Anfang bei dem Mittelschulunterricht genommen hat, mehr und mehr aber auch den Hochschulunterricht ergreift.

Diese Bewegung hat ihren Grund in den gesteigerten Anforderungen des Lebens einerseits und in dem wachsenden Umfang und der fortschreitenden Verzweigung der einzelnen Wissenschaften, dem das stets gleiche Mafs von Zeit und Leistungsfähigkeit des einzelnen gegenübersteht.

Wir alle, die wir mit dem Jugendunterricht zu thun haben, sind gezwungen, zu dieser Bewegung unsere Stellung zu nehmen, und haben einerseits darüber zu wachen, dafs nichts von dem, was sich in langer Culturarbeit als gut und brauchbar bewährt hat, leichtsinnig geopfert werde, andererseits aber auch nicht durch starres Festhalten an den alten überlieferten Formen nützlichen und notwendigen Fortschritten einen vergeblichen Widerstand entgegenzusetzen, damit sich nicht etwa die Umgestaltung ohne uns und über unsere Köpfe hinweg vollziehe, und mit dem Veralteten und Unzeitgemäfsen auch Gutes und Edles über Bord geworfen werde. Ich schicke diese Bemerkungen voraus, weil auch die neue Prüfungsordnung, die uns hier beschäftigt, ein Glied in der Kette dieser Reformbestrebungen ist und aufser dem Zusammenhang mit diesen nicht richtig gewürdigt werden wird.

Aber noch etwas anderes mufs ich erwähnen, was mir für die Beurteilung der Frage des höheren Unterrichts von gröfster Bedeutung zu sein scheint.

Der Unterricht überhaupt hat zunächst die Aufgabe, dem Jüngling eine gewisse Summe von Kenntnissen und Fertigkeiten, die für das Leben und den künftigen Beruf und das Berufsstudium unerläfslich sind, ins Leben mitzugeben. Er soll ihn aber darüber hinaus noch zu dem machen, was man einen gebildeten Menschen

nennt, d. h. er soll ihn auf einen Standpunkt heben, von dem aus er sich eine richtige Weltanschauung bilden, von dem aus er teilnehmen kann an den Gütern unserer geistigen Cultur.

Über diese beiden Punkte besteht wenig Meinungsverschiedenheit. Der Stoff ist hier durch die jeweiligen Anforderungen des Lebens und durch die Lebens- und Gesellschaftssphäre, in der der betreffende lebt, ziemlich fest umgrenzt.

Um so mehr aber gehen die Meinungen auseinander über einen dritten Zielpunkt des Unterrichts, der vielleicht der allerwichtigste ist, die Schulung des Geistes, die, wie die körperliche Übung des Künstlers, für jede höhere geistige Thätigkeit die notwendige Voraussetzung ist. Hier mufs das Arbeiten gelernt werden, durch das die Schwierigkeiten der Aufgaben des Lebens überwunden werden.

Es liegt in der Natur dieser geistigen Gymnastik, dafs ihr Stoff nicht zu leicht sein darf. Es ist sogar notwendig, dafs er abseits liegt von dem natürlichen und naiven Gedankenkreis, damit er Kräfte weckt und übt, die in dem unerzogenen Menschen nicht zur Entfaltung kommen, und unter allen Unterrichtsfächern ist keines, was dazu vorzüglicher geeignet wäre, als die alten Sprachen und die Mathematik.

Diese geistige Schulung ist es, die das wahre Wesen des höher Gebildeten ausmacht, und die ihn zu Leistungen befähigt, die über das Durchschnittsmafs hinausgehen. Sie darf während der ganzen Dauer des Unterrichts nicht aus dem Auge verloren werden und mufs auch noch den Hochschulunterricht beherrschen.

Der Erfolg dieser Bestrebungen läfst sich freilich nicht zahlenmäfsig belegen oder etwa in einem Examen nachweisen, und die Frage der allzu praktisch Gesinnten, was diese Dinge im künftigen Leben nützen, läfst sich nicht durch Hinweis auf diese oder jene Kenntnis beantworten.

Der eigentliche Gegenstand des Streites ist aber die richtige Abmessung zwischen diesem pädagogischen Teil des Unterrichts und den eigentlichen Fachstudien. Er wird verschärft durch das steigende Mafs von Anforderungen, die die Fachstudien vermöge ihrer eigenen Entwicklung stellen.

Dieselben Gegensätze, wie wir sie bei den technischen Studien finden, können wir auch in anderen Fächern, z. B. in der Medicin beobachten, wo die naturwissenschaftlichen Fächer eine ähnliche Stellung einnehmen, wie dort die Mathematik. Und auch in der Mittelschule, wo die eigentlichen Berufsstudien noch nicht in Betracht kommen, ist das Verhältnis doch nicht viel anders.

Hier ist es dann für den Erfolg eine wesentliche Voraussetzung, dafs die Erziehung Interesse für diese dem Schüler von Haus aus fremdartigen Materien zu wecken weifs, dafs das Lernen nicht zur Qual, sondern zur Freude und Lust wird.

Zwar fehlt es der reinen Mathematik auch bereits auf der Stufe des Mittelschulunterrichtes keineswegs an dem Reiz, der in der Reinheit der Methoden und in dem Gedankeninhalt, dem philosophischen Gehalt der mathematischen Begriffe liegt. Diese wirken aber nur auf die besonders hiefür beanlagten Schüler, und auch diese dürfen den weit faſslicheren und anschaulicheren Beziehungen der Mathematik zum Leben, zu den Anwendungen auf Technik und auf andere Wissenschaften nicht fremd bleiben, die eine lebendige Anschauung mit dem abstracten Denken verbinden, die das Auge schärfen und die Hand geschickt machen und neben dem Wissen auch ein Können heranbilden.

Es kommt aber noch eines hinzu. Zu jedem Fachstudium muſs der Studirende eine gewisse Summe von Vorkenntnissen und Fertigkeiten mitbringen, die ihm die Schule übermitteln muſs. So müssen wir Mathematiker voraussetzen, daſs unsere Studenten die euklidische Geometrie kennen, daſs sie eine quadratische Gleichung lösen können, daſs sie die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln handhaben können. Für das juristische, theologische, historische und vollends das philologische Studium muſs eine genügende Kenntnis der alten Sprachen vorausgesetzt werden, u. s. f.

So werden auch die technischen Berufe ihr Recht verlangen, und da auch diese mehr und mehr eine vollständige, allgemein menschliche Ausbildung voraussetzen, so erwachsen auch hieraus den Mittelschulen neue Aufgaben.

Diese Vermehrung des Materials hat bereits zur Abzweigung der Realschulen von den humanistischen Gymnasien geführt. Soll diese Teilung noch weiter gehen? Ich glaube nicht, daſs es wünschenswert wäre. Im allgemeinen soll unsere Bildung eine einheitliche bleiben, und es ist nicht gut, daſs der Knabe allzufrüh, ehe sich seine besondere Begabung und Neigung entwickelt hat, vor eine definitive Entscheidung über seinen künftigen Beruf gestellt wird.

Die Schule, wie sie besteht, sei sie nun Gymnasium oder Realschule, muſs daher einen gewissen Reichtum des Stoffes geben, in dem jeder das Seine findet. Die Schwierigkeit aber, den wachsenden Stoff zu bewältigen, kann die Schule nur dadurch überwinden, daſs sie nach Möglichkeit der Individualität des einzelnen Rechnung trägt, daſs sie nicht von einem alles verlangt, sondern billige Rücksicht walten läſst, wie es ja jetzt schon durch das Princip der sogenannten Compensationen geschieht und vielleicht in noch ausgedehnterem Maſse geschehen könnte. Dann kann auch Raum geschaffen werden für die Anwendungen der Mathematik und für die ihrer Natur nach einen gröſseren Zeitaufwand beanspruchenden Übungen in den Fertigkeiten.

Um für die hierzu notwendige Heranbildung der Lehrer Sorge

zu tragen, hat die neue Prüfungsordnung die Bestimmung eingeführt, die von der angewandten Mathematik handelt.

Wie aber haben sich die Universitäten, denen die wissenschaftliche Ausbildung der Lehrer obliegt, zu dieser neuen Prüfungsordnung zu stellen? Erwachsen ihnen daraus neue Aufgaben, und wie lassen sich diese bewältigen?

Die Prüfungsordnung ist zwar zunächst für Preufsen erlassen, und es sind also in erster Linie die preufsischen Universitäten, die bei dieser Frage interessirt sind. Aber auch unsere Reichsländische Regierung hat die neue Ordnung im wesentlichen angenommen, und wir in Strafsburg sind also in derselben Lage. Die süddeutschen Regierungen verhalten sich zwar zum Teil noch ablehnend gegen die neuen Bestimmungen. Indessen handelt es sich hier doch um Fragen von allgemeiner Natur, die ja auch von einem höheren Standpunkt als von dem des Reglements von Interesse sind, und ich glaube daher, dafs wir alle, auch die unter uns, die diese specielle Frage nicht angeht, es unserem Vorstand Dank wissen werden, dafs er den Gegenstand auf die Tagesordnung gesetzt hat und uns Gelegenheit giebt, die Ansichten der Herren zu hören, die dem Schulunterricht noch näher stehen.

Ein Examen ist immer ein Übel, wenn auch ein notwendiges. Für den Durchschnitt ist die Rücksicht auf den Erfolg im künftigen Beruf und auf das drohende Examen der stärkste Antrieb zum Arbeiten, und es ist das Examen ja auch schliefslich in vielen Fällen das einzige Mittel, um die Spreu vom Weizen zu sondern. Ein weit edlerer und auch wirksamerer Sporn ist aber die Liebe zur Wissenschaft, die Freude an der erworbenen Erkenntnis, bei der es dann freilich unvermeidlich ist, dafs da und dort Lücken bleiben, die, wenn es das Unglück will, im Examen verhängnisvoll werden können. Ein idealer Zustand wäre der, dafs gewissenhafte Lehrer nach jahrelangem persönlichen Verkehr mit den Schülern über deren Brauchbarkeit und Reife entschieden.

Ich glaube, darin auf die Beistimmung der Herren von den Gymnasien rechnen zu dürfen, dafs das Abiturientenexamen in den meisten Fällen eine unnötige Formalität ist; wenigstens wird das Urteil des erfahrenen Lehrers über die Reife des Abiturienten eines Examens mit seinem oft zufälligen Verlauf nicht mehr bedürfen.

Wir von der Universität sind dazu weit weniger in der Lage, weil wir vermöge der Freizügigkeit der Studirenden und der Studienfreiheit an den Universitäten mit vielen unserer Zuhörer kaum in ein persönliches Verhältnis kommen und uns von den Leistungen des einzelnen nicht so leicht ein Bild machen können. Freilich bei vielen, und darunter sind gerade die tüchtigsten, die einen engeren Anschlufs an den Docenten suchen, die sich an den Übungen der Seminare von Anfang an beteiligen, werden

auch wir in der Regel nicht über den Ausfall des Examens im Zweifel sein.

Nach alledem halte ich es für einen grofsen Vorzug, wenn die Prüfungsbestimmungen von der Art sind, dafs sie dem freien wissenschaftlichen Streben des Studirenden und den persönlichen Beziehungen des Examinanden zum Examinator einen möglichst breiten Raum lassen. Aus diesen Gründen ist es auch das beste, wenn die Prüfung, wenigstens im Hauptfach, in der Hand der Lehrer selbst liegt, wodurch das persönliche, wenn ich so sagen soll väterliche Verhältnis zwischen Schüler und Lehrer wesentlich gefördert wird.

Lassen Sie mich in Bezug hierauf noch einen Punkt erwähnen. Es sind das die schriftlichen Arbeiten. Eine solche Arbeit erfordert einen Zeitaufwand von mehreren Monaten, und es ist die Natur, wenigstens der mathematischen Arbeit, dafs sie eigentlich keine andere Beschäftigung neben sich duldet. Sie nimmt also einen erheblichen Teil der zur Verfügung stehenden Studienzeit in Anspruch. Das ist aber nur dann zu rechtfertigen, wenn die Arbeit einen Teil des Studiums selbst ausmacht, und das soll die Oberlehrer-Arbeit unbedingt, ähnlich wie die Doctordissertation. Sie soll einen gewissen Abschlufs des Studiums bilden, in dem das selbständige Arbeiten in der Wissenschaft gelernt wird, und nicht blofs ein Beweis der Kenntnisse für den Examinator sein. Das erfordert aber, dafs das Thema der Arbeit der Individualität des einzelnen angepafst sei, und gerade eine solche Arbeit giebt oft die beste Gelegenheit zu einer näheren Beziehung zwischen Lehrer und Schüler. Auf diese Weise sind die schönen Oberlehrer-Arbeiten entstanden, wie sie z. B. zur Zeit von Jacobi und noch später in Königsberg gemacht worden sind, die zum Teil der Ausgangspunkt wertvoller wissenschaftlicher Untersuchungen geworden sind.

Die gegenwärtige neue Prüfungsordnung ist die dritte, nach der ich seit meinem Eintritt in eine Prüfungscommission zu examiniren habe, und es ist vielleicht von Interesse, zwischen diesen eine kleine Vergleichung anzustellen.

Ich werde die Forderungen vergleichen, die für ein erstes Zeugnis in unserem Fach gestellt werden.

Da ist zunächst das preufsische Reglement vom 12. December 1866, das bis zum Jahr 1887 in Kraft war. Darin wird für ein Zeugnis ersten Grades in der Mathematik verlangt:

„Die Befähigung, Mathematik und Physik bis inclusive Prima, aufserdem aber die philosophische Propädeutik in Prima oder die beschreibenden Naturwissenschaften oder Religion oder Lateinisch und Deutsch oder eine der neueren Sprachen in mittleren Klassen zu lehren.“

Man kann also sagen: zwei Hauptfächer und ein Nebenfach, und zwar in einer wohlabgerundeten Combination, wenn man be-

denkt, dafs die Anforderungen in den beschreibenden Naturwissenschaften für mittlere Klassen nicht sehr hoch waren, und dafs vielfach mehrere Fächer, zeitweise sogar Mathematik und Physik, in einer Hand vereinigt waren.

Zur Charakterisirung der Anforderungen in der Mathematik will ich den Satz anführen:

„Für den mathematischen Unterricht in den oberen Klassen sind nur die Candidaten befähigt zu erachten, welche sich in der Prüfung als ausgebildete Mathematiker zeigen und in die höhere Analysis und analytische Mechanik so weit eingedrungen sind, dafs sie auf diesen Gebieten eigene Untersuchungen mit Erfolg anstellen können."

Diese Forderung hatte zur Folge, dass ein gröfseres Gewicht auf die schriftliche Arbeit gelegt wurde, als es jetzt geschieht, und dafs mehr Zeit darauf verwandt wurde. Es ist, wie ich schon vorhin gesagt habe, auf diese Weise manche treffliche Arbeit entstanden. Aber auf der andern Seite gab es sicher auch viele Fälle, in denen diese Forderung nur bei sehr milder Interpretation erfüllt war, so dafs die späteren Fassungen, die ja auch eine selbständige wissenschaftliche Untersuchung nicht ausschliefsen, doch wohl mehr dem wirklichen Sachverhalt entsprachen. Es wurden in der Regel aufser der philosophischen zwei fachwissenschaftliche schriftliche Arbeiten gemacht. Mehr als drei Aufgaben sollten nicht gestellt werden. Es gab drei Zeugnisgrade, die, wie auch noch in der folgenden Prüfungsordnung, schematisch nach der Anzahl der erworbenen Facultäten festgestellt wurden, und ebenso gab es in den einzelnen Fächern drei Stufen der Lehrbefähigung, für untere, mittlere und obere Klassen. Es wurden sogar bisweilen von der Commission noch Zwischenstufen geschaffen, indem in zweifelhaften Fällen die Lehrbefähigung z. B. bis Obersecunda oder Unterprima erteilt wurde.

Die zweite Prüfungsordnung ist nach längeren Erwägungen, an denen auch die wissenschaftlichen Prüfungscommissionen beteiligt waren, zustandegekommen. Die allgemeine Tendenz dieses neuen Reglements ging dahin, den einzelnen Wissenschaften in ihrem Verhältnis zu den Prüfungsfächern ein gröfseres Gewicht zu geben, um es kurz zu sagen, mehr zu differenziren, vielleicht in der Absicht, dem besonderen Fach und dem Studiengang des Candidaten mehr Rechnung zu tragen. Der Erfolg war aber gerade der entgegengesetzte. Die Menge der Nebenfächer, die der Candidat gleich bei Beginn seiner Studien ins Auge fassen mufste, um ein vollgültiges Zeugnis zu erlangen, erschwerte das intensive Studium des Hauptfaches und hemmte das reine wissenschaftliche Streben durch allzufrühe Rücksicht auf das Examen.

Die Forderung, die z. B. in der Mathematik für die oberste Stufe gestellt wird, ist gegen die vorhin erwähnte nicht unwesentlich

abgeschwächt. Es heiſst da: „Für den Unterricht in den oberen Klassen muſs der Candidat mit den wichtigsten Lehren der höheren Geometrie, der höheren Analysis und der analytischen Mechanik soweit bekannt sein, daſs er eine nicht zu schwierige Aufgabe aus einem dieser Gebiete selbständig zu bearbeiten imstande ist."

Dieser zweiten gegenüber halte ich nun die gegenwärtige Prüfungsordnung für eine Verbesserung, insofern sie eine Vereinfachung bringt und dadurch dem freien Studium mehr Raum gewährt. Die Bestimmungen über die Anforderungen in der reinen Mathematik sind wesentlich die gleichen geblieben. Aber zur schriftlichen Bearbeitung wird nur noch eine fachwissenschaftliche Aufgabe gestellt, und es genügen zu einem Zeugnis mit der ersten Note in zwei Fächern eine Lehrbefähigung für alle Klassen und in einem für die Mittelklassen, so daſs z. B. die drei Fächer reine und angewandte Mathematik und Physik zu einem vollständigen Zeugnis genügen, sogar noch ein kleines plus ergeben würden.

In den einzelnen Fächern giebt es nur noch zwei Abstufungen, nicht drei, und auch darin liegt wohl die Möglichkeit einer gerechteren Erteilung der Prüfungsnote, daſs diese nicht mehr rein formal durch die Anzahl und den Grad der Lehrbefähigungen bestimmt wird, sondern nach dem Ermessen der Commission mit Rücksicht auf den Gesamtausfall der Prüfung erteilt wird.

Die einschneidendste Änderung aber, die uns die neue Prüfungsordnung gebracht hat, ist die Einführung der angewandten Mathematik als ein besonderes Prüfungsfach. Damit sucht das Reglement einer alten Forderung praktischer Pädagogen entgegenzukommen, und man kann der neuen Bestimmung nur von Herzen den besten Erfolg wünschen. Davon würde die mathematische Bildung unserer Jugend überhaupt den gröſsten Nutzen haben. Man könnte vielleicht sogar noch weiter gehen und erwägen, ob dieses Fach nicht als eine notwendige Ergänzung des mathematischen Examens überhaupt von jedem Candidaten zu verlangen sei. Aber das dürfte jedenfalls für jetzt daran scheitern, daſs nicht jedem die Gelegenheit geboten ist und geboten werden kann, darin die erforderlichen Studien zu machen. Jedenfalls aber entsteht für die Universitäten die Frage, wie sie sich zu dieser Forderung der neuen Prüfungsordnung zu stellen haben, und welche Änderungen und Erweiterungen ihres Lehrplanes dadurch notwendig werden. Es kommt hierbei nur das Fach der angewandten Mathematik in Frage, da in den Anforderungen in der reinen Mathematik und auch in der Physik nichts Neues hinzugekommen ist, was eine Erweiterung der Unterrichtsfächer nötig machen könnte. Ich rufe Ihnen zunächst den Wortlaut der betreffenden Bestimmung ins Gedächtnis zurück.

„Von den Candidaten, welche die Lehrbefähigung in der an-

gewandten Mathematik nachweisen wollen, ist aufser einer Lehrbefähigung in der reinen Mathematik zu fordern: Kenntnis der darstellenden Geometrie bis zur Lehre von der Centralprojection einschliefslich und entsprechende Fertigkeit im Zeichnen; Bekanntschaft mit den mathematischen Methoden der technischen Mechanik, insbesondere der graphischen Statik, mit der niederen Geodäsie und den Elementen der höheren Geodäsie nebst Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler."

Ich bin der Ansicht begegnet, dass diesen Forderungen die Universitäten in ihrer dermaligen Verfassung überhaupt nicht gerecht werden können, dafs man also dieses Fach solchen Candidaten überlassen müsse, die einen Teil ihrer Studien an einer Technischen Hochschule absolvirt haben. Dieser Standpunkt wäre freilich der bequemste; dann könnte bei uns alles beim alten bleiben, und wir könnten das neue Fach sowohl für das Studium als fürs Examen anderen überlassen. Es würde das aber, wie ich glaube, dem Sinn und der Absicht der neuen Bestimmung wenig entsprechen.

Abgesehen davon, dafs es zur Zeit wenigstens durchaus nur Ausnahme ist, dafs, wer auf den Lehrerberuf zusteuert, an einer Technischen Hochschule studirt, würde der Zweck verfehlt werden, dafs die Beziehung auf die Anwendungen das mathematische Studium überhaupt durchdringen soll, dafs es sich hier nicht sowohl um die Heranbildung einzelner Fachlehrer handelt, als um die bessere Ausbildung der Lehrer der Mathematik überhaupt nach einer Seite hin, die bisher vernachlässigt worden ist. Wer also der Tendenz dieser Bestimmung überhaupt zustimmt, mufs dahin streben, dafs diese Fächer in der einen oder andern Gestalt einen Teil des Universitätsstudiums bilden. Dafs das gewisse Schwierigkeiten hat, die teils in der Natur der Sache, teils auch in äufseren Verhältnissen liegen, läfst sich freilich nicht leugnen. Das Ideal wäre, wenn unsere Universitäten einfach durch technische Facultäten erweitert würden, in denen gerade diese Fächer einen Hauptbestandteil der wissenschaftlichen Ausbildung ausmachen würden, und wo es sich dann leicht einrichten liefse, dafs auch die Lehramtscandidaten das für sie Brauchbare und Notwendige ohne Überlastung finden könnten. Ähnlich liegen die Dinge in den wenigen grofsen Städten, die beide Anstalten besitzen. Auch hier könnte den Studirenden der Mathematik an der Schwesteranstalt die notwendige Ergänzung des theoretischen Studiums geboten werden.

Aber es würde dann auch eine Rücksichtnahme und ein Entgegenkommen von seiten des Polytechnicums vorauszusetzen sein; denn in dem Umfang, wie z. B. das geometrische Zeichnen als Vorbildung für den künftigen Techniker nötig ist, wird es der künftige Lehrer der Mathematik an einem Gymnasium nicht betreiben können. Aber es würde wohl leicht zu erreichen sein, für

die Bedürfnisse dieser letzteren besondere Curse oder Teilcurse einzurichten.

In einer schwierigeren Lage sind aber die zahlreichen Universitäten, die diese Vorzüge nicht haben. Wie sollen diese sich helfen? Eine Schwierigkeit liegt in dem Ungewohnten, sowohl des Gegenstandes als des Unterrichtsbetriebes, an den sich die Studenten nur schwer gewöhnen werden. Sind doch die Versuche, die wohl früher gemacht worden sind, die darstellende Geometrie an den Universitäten einzubürgern, meist nicht von besonderem Erfolg gekrönt gewesen. Es ist aber zu hoffen, dafs das Fach als Examensfach eine stärkere Anziehungskraft haben wird, zumal es sich nach den Bestimmungen für das Examen sehr gut in den Rahmen der übrigen Fächer einfügt und geeignet ist, das mathematische Studium einheitlicher zu gestalten.

Dabei scheint mir freilich als eine notwendige Voraussetzung für das Gedeihen des jungen Pflänzchens, dafs der Docent zugleich als Examinator thätig ist; sonst werden sich diese Versuche schwerlich als lebensfähig erweisen.

Es ist nun freilich nicht sofort zu erwarten, dafs an allen Universitäten neue Lehrstühle z. B. für darstellende Geometrie begründet werden. Dagegen wird es an vielen Orten möglich sein, den Versuch mit den vorhandenen Lehrkräften zu machen. Denn es wird einem tüchtigen mathematischen Docenten, zumal wenn er noch in jüngerem Lebensalter steht, nicht schwer fallen, auch wenn ihm die Sache bisher ferner lag, sich in kurzer Zeit einzuarbeiten. Ich habe hier vor allem die darstellende Geometrie und die damit verbundenen Zeichenübungen im Auge, die mir der wichtigste Bestandteil des neuen Prüfungsfaches zu sein scheinen.

In Bezug auf die anderen noch zu berücksichtigenden Lehrfächer, Geodäsie, Ausgleichsrechnung, sind die Universitäten natürlich bevorzugt, die eine Sternwarte besitzen, wo diese Wissenszweige ohnehin gelehrt werden.

Wir in Strafsburg haben den Versuch bereits gemacht, den Unterrichtscurs nach den Anforderungen des neuen Reglements, das durch den Erlafs des Statthalters vom 4. März 1899 in seinem materiellen Teil unverändert auch bei uns eingeführt ist, einzurichten und zu ergänzen. Unser neuer Studienplan giebt davon Rechenschaft. College Reye hat eine Vorlesung über technische Mechanik neu eingeführt, und College Krazer hält Vorlesungen und Übungen in der darstellenden Geometrie, die im nächsten Semester durch Dr. Wellstein weitergeführt werden sollen. Es sollen sich dann auch Vorlesungen und Übungen über graphische Statik daran anschliefsen, die Herr Professor Krazer übernehmen will. Der Anfang ist im verflossenen Semester gemacht, und soweit sich bis jetzt urteilen läfst, nicht ohne Erfolg.

So wollen wir denn hoffen, daſs die Sache sich in der angefangenen bescheidenen Weise fortentwickelt, bis uns vielleicht die Begründung der technischen Facultät an der Universität des Reichslandes in den Stand setzt, diesen Unterrichtszweig im groſsen Stile aufzunehmen. Dann werden Theorie und Praxis zusammenarbeiten und sich gegenseitig durchdringen und befruchten, eine Entwicklung, die ohne Zweifel unserem ganzen höheren Bildungswesen zum Segen gereichen wird.

Wenn ich nunmehr zum Schluſs die Ergebnisse dieser Betrachtungen zusammenfasse, so muſs ich hervorheben, daſs die Erfahrungen, die wir gemacht haben, noch unzureichend sind, daſs also in der thatsächlichen Entwicklung sich doch noch manches anders gestalten kann, als es jetzt den Anschein hat. Ich muſs ferner betonen, daſs sich, was ich sagen werde, nur auf die Vorbereitung zum künftigen Lehrerberuf bezieht. Der rein wissenschaftlichen Lehre und Forschung will ich keinerlei Beschränkungen auferlegen, und ich erkenne ausdrücklich auch eine philosophische Richtung in der Mathematik als vollberechtigt an, die mit den Anwendungen nichts zu thun hat.

Mit diesem Vorbehalt möchte ich also folgende Sätze formuliren:

1. Die Anwendungen der Mathematik sind in möglichst enge und lebendige Verbindung zu setzen mit den theoretischen Studien.

2. Es muſs an allen Universitäten den Studirenden die Möglichkeit geboten werden, die darstellende Geometrie als Hilfsmittel hierzu kennen zu lernen.

3. Wo es möglich ist, ist eine auf gegenseitigem Entgegenkommen beruhende Mitwirkung der Technischen Hochschulen anzustreben.

4. Thunlichst an allen Universitäten sind die Fächer, die der § 22 der neuen preuſsischen Prüfungsordnung verlangt, in den Unterrichtsplan für die Candidaten des höheren Schulamtes aufzunehmen.

5. Unbeschadet des Grundsatzes, daſs das Examen in verwandten Fächern möglichst in einer Hand liegen soll, ist zu erstreben, daſs das Examen in den Hauptfächern durch den Universitätslehrer des Candidaten selbst abgenommen werde.*)

*) Wie bereits in der Chronik (dieser Jahresbericht S. 6) bemerkt, hat über den Inhalt der vorstehenden Thesen zwar keine Abstimmung stattgefunden, doch hat die Discussion eine erfreuliche Übereinstimmung der Ansichten ergeben. [Anmerkung der Redactionscommission.]

Correferat.

Von **G. Hauck** in Berlin.

An die Ausführungen des Herrn Referenten, denen ich voll zustimme, gestatte ich mir einige weitere Bemerkungen anzuknüpfen, die sich namentlich auf die Eigenart der drei in dem neuen Prüfungsfach vereinigten Disciplinen und die hierdurch bedingten Anforderungen an den Betrieb des neuen Universitätsunterrichts beziehen.

Die eigentümliche Schwierigkeit der ganzen Frage beruht ja in dem Umstand, dafs das neue Prüfungsfach drei Einzeldisciplinen — darstellende Geometrie, technische Mechanik, Geodäsie — umfafst, die zwar innerlich beziehungsreich, aber doch in sich scharf begrenzt und so ausgedehnt sind, dafs jede einzelne für sich einen Lebensberuf ausfüllt. Es giebt wenige Männer, die alle drei Disciplinen gleichzeitig in dem autoritären Mafse beherrschen, wie es von einem akademischen Lehrer vorauszusetzen ist.

Mich selbst rechne ich gewifs nicht zu denselben. Wenn ich es trotzdem unternehme, über den Gegenstand zu sprechen, so bitte ich, meine Meinungsäufserung nicht etwa als competentes Urteil aufzufassen, sondern lediglich als Mitteilung meiner unmafsgeblichen subjectiven Anschauungen — zu dem Zweck, Stoff für den Austausch der Meinungen, oder im günstigsten Falle Anregungen für die ersten Versuche der Einrichtung des neuen Unterrichtsbetriebs zu geben. Eine endgiltige Lösung der mannigfachen hiebei in Betracht kommenden Fragen wird und kann erst auf Grund der bei dem Betrieb selbst gemachten praktischen Erfahrungen erwartet werden.

Eine erste Schwierigkeit liegt in der Beschaffung der erforderlichen Lehrkräfte. Aus der Mehrgliedrigkeit der unter dem Begriff „Angewandte Mathematik" äufserlich zusammengefafsten Lehrgebiete folgt von selbst, dafs es sich nicht um die Errichtung eines besonderen Lehrstuhls für angewandte Mathematik an jeder Universität handeln kann. In diesem Falle wäre ja die Sache sehr einfach und könnten wir über unsere Frage sofort zur Tagesordnung übergehen: Das Grundprincip, dem die deutschen Hochschulen ihre hohe Blüte verdanken, ist, dafs nicht etwa zu einem commissarisch aufgestellten Lehrprogramm eine geeignete Lehrkraft gesucht, sondern, dafs umgekehrt eine starke, schöpferische Individualität an die rechte Stelle gesetzt wird, die sich dann ihr Lehrprogramm selbst schafft und demselben den Stempel ihrer Eigenart aufdrückt. Das geht nun bei der angewandten Mathematik wie gesagt nicht. — Andererseits dürfte die Einrichtung von drei getrennten Lehrstühlen für die drei Einzeldisciplinen, wie sie an den Technischen Hochschulen bestehen, von finanzpolitischer Seite zweifellos als eine

so ungeheuerliche Forderung angesehen werden, daſs an ihre Verwirklichung nicht zu denken ist.

Man muſs sich also nach der Decke strecken und behelfen, so gut man kann.

Ein directes Zusammenwirken mit der Technischen Hochschule im Sinne des dritten Leitsatzes des Herrn Referenten ist nur möglich, wo am nämlichen Orte auch eine solche vorhanden ist; was in Preuſsen nur für Berlin zutrifft. — Das Studium zu teilen zwischen Universität und einer an anderem Orte befindlichen Technischen Hochschule, ist ein Behelf, für den namentlich die Vorteile geltend gemacht werden können, die der Besuch mehrerer Hochschulen von verschiedenartigem Charakter für die Erweiterung des Gesichtskreises des Lernenden immer mit sich bringt. Andererseits würde dabei der von dem Herrn Referenten in Leitsatz 1 betonten Forderung des Hand-in-Hand-gehens der theoretischen und der angewandten Studien weniger genügt werden können. Die 3 Semester an einer Technischen Hochschule, die nach den Prüfungsvorschriften als Universitätssemester angerechnet werden, dürften von der angewandten Mathematik so ausgefüllt werden, daſs für die gleichzeitige Betreibung anderer Studien wenig Raum bleibt. Immerhin ist es ein gangbarer Weg. Indessen wird durch denselben das vorhandene Bedürfnis nicht abgestellt und die brennende Frage nicht gelöst. Nach den mir vorliegenden Berichten ist der Wunsch nach der Erwerbung der neuen Facultas unter den Mathematikstudirenden der meisten preuſsischen Universitäten so stark, und ist das — zum Teil durch Petitionen zum Ausdruck gebrachte — Verlangen, daſs ihnen die Möglichkeit zur Erreichung dieser Absicht von ihrer Alma mater selbst gewährt werde, so dringend, daſs den betreffenden Facultäten gar nichts anderes übrig bleibt, als die erforderlichen Consequenzen zu ziehen und selbst Mittel und Wege zu schaffen, um den Wünschen ihrer Studirenden gerecht zu werden.

Der Herr Vorredner hat uns von den verheiſsungsvollen Anfängen, die in dieser Beziehung bereits gemacht worden sind, berichtet. Von den Universitäten Göttingen und Straſsburg sind bereits Studienpläne für die Candidaten des höheren Lehramts in Mathematik und Physik veröffentlicht, die der neuen Prüfungsordnung Rechnung tragen. Gewiſs ist auch hier nur der Anfang schwer. Mit der Zeit aber werden sich die Verhältnisse zweifellos immer günstiger gestalten: Für die jungen Universitätsdocenten und solche, die es werden wollen, sind durch das neue Prüfungsfach neue erfreuliche Aussichten eröffnet, deren Ausnützung sie sich gewiſs nicht entgehen lassen werden. So denke ich mir, daſs es mit der Zeit zur Regel werden wird, daſs ein junger Mathematiker, der sich entschlieſst, die akademische Laufbahn zu ergreifen, je nach seiner Richtung und Neigung auch eine der drei angewandten Disciplinen in den Bereich

seiner Specialstudien einbezieht, sei es, dafs er sich schon während seiner eigentlichen Studienzeit dem Fache widmet, sei es, dafs er nach absolvirtem Universitätsstudium sich noch einige Semester an einer Technischen Hochschule umsieht. Ich werde auf diesen letzteren Punkt, dem ich eine besondere Wichtigkeit beimesse, nachher noch besonders zu sprechen kommen. — Jedenfalls scheint mir hiernach nicht zweifelhaft, dafs schon mit der nächsten Generation an jeder Universität stationäre Verhältnisse eingetreten sein werden, vermöge deren der Lehrstoff der angewandten Mathematik unter die einzelnen vorhandenen Lehrkräfte in einer Weise ausgeteilt ist, dafs die von dem Herrn Referenten geforderte enge Verbindung mit dem theoretischen Unterricht gewährleistet ist.

Was die Art dieser Verbindung anlangt, so steht jede der fraglichen drei Disciplinen schon an und für sich in mehr oder weniger naher Beziehung zu anderen Disciplinen von mehr theoretischem Charakter. So gliedert sich die darstellende Geometrie naturgemäfs an die neuere synthetische Geometrie an, die technische Mechanik an die analytische Mechanik, die Geodäsie an die Astronomie, zum Teil auch an die Physik. Überhaupt ist eine grundsätzliche Trennung zwischen theoretischer und angewandter Mathematik nicht möglich. Sie sind viel zu enge mit einander verknüpft und spielen beständig in einander über.*)

Indessen genügt die blofse Ausnützung dieser natürlichen Beziehungen noch nicht, um die lebendige, sich gegenseitig befruchtende Wechselwirkung zwischen den theoretischen und angewandten Studien in dem vollen Mafse herbeizuführen, wie es wünschenswert und erreichbar erscheint. Das nutzbare Bethätigungsfeld hiefür bilden in erster Linie die Seminarübungen. Damit komme ich auf einen Punkt, der mir für die Einrichtung des betreffenden Universitätsunterrichts von einschneidendster Bedeutung zu sein scheint. Der Unterricht in angewandter Mathematik ist mir ohne ausgedehnte Seminararbeit, die sich aus praktisch messenden, wissenschaftlich rechnerischen und constructiv zeichnerischen Übungen zusammensetzt und dem Studirenden neben dem Wissen auch das entsprechende Können vermittelt, nicht denkbar.

Ich erlaube mir näher auf die Frage einzugehen, wie diese Übungen nach meiner Auffassung in den drei Einzeldisciplinen am nutzbringendsten eingerichtet werden dürften. Dabei wird sich Gelegenheit geben, zugleich die Frage zu berühren, in welchem stofflichen und zeitlichen Umfange dieselben zu behandeln sein möchten.

*) Vgl. hierzu die unten folgenden Bemerkungen des Herrn Study.

Ich beginne mit der Geodäsie. Die Prüfungsvorschriften verlangen: Bekanntschaft mit der niederen Geodäsie und den Elementen der höheren Geodäsie, nebst Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

Man kann ja nun diese Kenntnisse ohne Frage vom Katheder herab in dem zum Examen befähigenden Mafse vermitteln. Soll das in Rede stehende Unterrichtsfach aber wirklich fruchtbringend wirken und den ganzen Segen für die Ausbildung eines exacten Denkens und Fühlens ausüben, zu dem es fähig ist, so mufs der Studirende selbst mit den Mefsinstrumenten arbeiten, seine Messungsergebnisse rechnerisch ausgleichen und das ausgeglichene Resultat graphisch auftragen. Diese Übungen scheinen mir von der allergröfsten erzieherischen Bedeutung zu sein. Durch nichts wird die Gewissenhaftigkeit und der Sinn für Präcision so sehr ausgebildet wie durch sie. Es giebt viele gewissenhafte Menschen, die sich's zur Pflicht machen, ihre Resultate auf möglichst viele Decimalstellen genau auszurechnen, ohne sich jedoch über deren illusorischen Wert klar zu sein. Geringer ist die Zahl derer, die sich vorher Rechenschaft geben über die jeweilig erreichbare Grenze der Genauigkeit und über die Mittel, dieser Grenze so nahe zu kommen als möglich. Die wahre, nicht blofs eingebildete, Gewissenhaftigkeit verlangt, dafs man sich bei jeder Arbeit beständig klar bewufst ist, mit welchem Grad von Genauigkeit man arbeitet.

Gaufs hat es nicht verschmäht, selbst mit dem Theodoliten praktisch zu arbeiten, und hat dann eben auf Grund dieser Arbeiten praktische Präcisionsmethoden geschaffen, die Gemeingut der gesamten Culturwelt geworden sind und mit denen er der Menschheit eines der wertvollsten Geschenke gemacht hat. So ist die Geodäsie zu einem Muster für den rationellen Anwendungsbetrieb einer theoretischen Wissenschaft geworden. Und es wäre wohl zu wünschen, dafs von der Ausbildung des praktischen Feldmessers einiges auf die Erziehung unserer gesamten Jugend in Bezug auf die Entwicklung des Sinnes für Exactheit und Gewissenhaftigkeit im Denken und Arbeiten übergehen möchte. Jeder Feldmesser ist mit einem Tropfen Gaufsischen Öles gesalbt. Aber mir will scheinen, dafs dieser wertvolle Tropfen unseren jüngeren Mathematikern vielfach abgehe. Und das scheint mir nun eben der Kern der Sache zu sein: Nicht — unsere jungen Mathematiker zu praktischen Feldmessern auszubilden, sondern vielmehr lediglich: ihnen etwas von Gaufsischem Geiste zu vermitteln, darin sehe ich den wichtigsten Zweck der Einführung der Geodäsie in den Universitätsunterricht.

Bei der Arbeit am Studirtisch klappt gewöhnlich alles. Bei der Anwendung in der Wirklichkeit ist ein beständiger Kampf mit der widerstrebenden Materie zu führen. Die Jugend anzuleiten, den Sieg des Geistes über die Materie zu gewinnen, gehört zu den

würdigsten Zielen des Universitätsunterrichts und wird einer segensreichen Rückwirkung auf den Schulunterricht nicht verfehlen.*)

Ohne praktische Übungen ist die Erreichung dieses Zieles nicht möglich. Zur Einrichtung derselben gehört kein allzu grofser Apparat. Ein Theodolit und ein Nivellirinstrument nebst Zubehör dürften genügen. Das läfst sich um die Summe von 1000 bis 1200 Mark beschaffen. Das astronomische oder physikalische Institut wird gerne die Hand zur Beschaffung bieten.

Die im geodätischen Prakticum zu betreibenden Übungen würden dann bestehen in der Ausführung einer mäfsig ausgedehnten Horizontalaufnahme und zugehörigen Höhenaufnahme, nebst Auftragung der ausgeglichenen Messungsresultate in einem Lageplan und einem Höhenplan nach bestimmten, und zwar verschiedenen Mafsstäben, durch welche das Präcisionsmafs der Messungen bestimmt wird.**)

Die Übungen in der höheren Geodäsie bewegen sich mehr auf rechnerischem Gebiete oder können, soweit sie praktischer Natur sind, der Astronomie überlassen werden. Ob die höhere Geodäsie an die niedere Geodäsie anzuschliefsen oder einer astronomischen Vorlesung einzugliedern ist, wird sich nach den besonderen Verhältnissen der betreffenden Universität richten. Dafs in den Prüfungsvorschriften nur die „Elemente“ der höheren Geodäsie gefordert werden, kann natürlich für die Ausdehnung des Unterrichts, der unter allen Umständen einen vollen Einblick in das Wesen der Sache geben mufs, nicht bestimmend sein.

Was ferner den Unterricht in der Ausgleichungstheorie anlangt, so scheint es mir (falls es nicht durch andere Rücksichten, wie Statistik, Versicherungswesen u. s. w., angezeigt ist) nicht gerade erforderlich, eine besondere Vorlesung hiefür einzurichten. Es kann sehr wohl die eigentliche Theorie, das heifst: die Begründung des Gaufsischen Fehlergesetzes der kleinsten Quadrate aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung einer theoretischen Vorlesung (etwa über bestimmte Integrale) eingefügt und die Anwendung auf praktische Ausgleichungsaufgaben dem geodätischen und physikalischen Prakticum überlassen werden. Es scheint mir anregender und fruchtbringender, die praktische Verwertung der Theorie in jedem Anwendungsgebiet direct vorzunehmen, als das wissenschaftliche Rechnen

---

*) Dafs z. B. der mit der praktischen Geodäsie vertraute Lehrer den Unterricht in der Trigonometrie, Geophysik u. s. w. sehr viel anregender und nutzbringender zu gestalten vermag, als der reine Theoretiker, dürfte aufser Frage stehen.

**) Nimmt man z. B. als Mafsstab für den Lageplan etwa 1 : 1000, für den Höhenplan 1 : 2500, so ergiebt sich, wenn die Genauigkeit des graphischen Auftragens bis zu 0,1 mm gerechnet wird, als kleinste noch zu constatirende Gröfse für die Horizontalaufnahme: 1 dm, für die Verticalaufnahme: 2,5 dm.

als Selbstzweck zu betreiben und die Übungsbeispiele dazu aus allen Anwendungsgebieten zusammenzutragen. — Es schadet dabei nicht viel, wenn auch das theoretische Colleg erst später gehört wird. Es kann sehr wohl das Fehlergesetz zunächst als Hypothese acceptirt werden, die dann nachträglich ihre Begründung findet.

Gehen wir weiter zur darstellenden Geometrie! Dieselbe hat sich zunächst mit der Methodenlehre zu befassen, die sich hauptsächlich auf die Darstellung räumlicher Objecte und Operationen in Grund- und Aufrifs, Parallelperspective und Centralperspective bezieht. — Auch hier sind die Übungen, in denen die Constructionen in Anwendungen auf passend gewählte Beispiele graphisch ausgeführt werden, von besonderer Bedeutung, und zwar nicht blofs weil die Prüfungsvorschriften „entsprechende Fertigkeit im (gebundenen) Zeichnen“ verlangen, sondern wesentlich aus dem Gesichtspunkt, dafs das selbständige Construiren der Projectionsbilder von Raumobjecten und das fortgesetzte Üben im inneranschaulichen Entwickeln der ebenen Bilder zur Körperlichkeit das beste Mittel ist, um das räumliche Vorstellungsvermögen zu kräftigen und eine lebendig gestaltende geometrische Phantasie auszubilden. Eine blofse (wenn auch verständige und in den Daten modificirte) Wiedergabe der Tafeln eines gedruckten Werkes genügt hiefür nicht, sondern die zur Aufgabe gestellten räumlich-geometrischen Constructionen und Untersuchungen müssen von den Studirenden möglichst selbständig ausgedacht und im vermittelnden Bilde durchgeführt werden. — Dies schliefst natürlich nicht aus, dafs als Vorbilder für die Manier der zeichnerischen Darstellung namentlich zu Anfang des Unterrichts Musterblätter ausgehängt werden.

Die Benützung von Modellen wird namentlich zu Anfang des Unterrichts, solange das Raumanschauungsvermögen der Schüler noch schwach entwickelt ist, ein wertvolles Hilfsmittel sein. Es dürfte sich aber empfehlen, dasselbe stets mit Vorsicht anzuwenden und namentlich dem Schüler das Modell nicht für die ganze Arbeit zur Hand zu lassen, sondern nur so lange, bis die vorübergehend eingetretene Vorstellungsschwierigkeit behoben ist. Es ist ja eben der Zweck der darstellenden Geometrie, das räumliche Modell dadurch überflüssig zu machen, dafs sie es durch sein Bild ersetzt, welches der Schüler lernen soll plastisch zu sehen. — Im Zusammenhang damit ist noch zu bemerken, dafs eine von dem Lernenden entworfene parallelperspectivische (z. B. cavalierperspectivische) Skizze vielfach dieselben oder noch bessere Dienste leistet als das entsprechende Modell.

Als Stoff für die Übungen bietet im weiteren Verlauf des Unterrichts namentlich die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen ein unerschöpfliches Material. Neben der synthetischen

Geometrie liefern aber auch die übrigen Zweige der Mathematik mannigfache und wertvolle Anregungen, von deren richtiger Ausnützung für die Übungen auf Grund eines planmäfsigen Zusammenwirkens der Lehrkräfte der theoretische Unterricht die segensreichste Rückwirkung verspüren wird.

Zu diesem mehr theoretischen Übungsstoff tritt dann noch das von der Technik gelieferte Material hinzu, aus dem eine geeignete Auswahl zu treffen ist, und das, wie mir ausdrücklich hervorzuheben von Wichtigkeit scheint, auch im Universitätsunterricht nicht bei Seite gelassen werden darf: Die praktischen Darstellungsmethoden haben sich zum Teil im engen Anschlufs an die technische Praxis ausgebildet und finden daher eben an den Objecten dieser ihre naturgemäfse Anwendung.*) Die aus der technischen Praxis entnommenen Beispiele sind auch vielfach interessanter und instructiver als die auf abstracte Raumgebilde bezüglichen. Am directesten tritt dies z. B. bei der Schattenlehre in die Erscheinung, wo die einfachsten Bauformen oft interessantere und schwierigere Aufgaben liefern als jede Zusammenstellung eines Stilllebens von abstracten geometrischen Körpern.

Freilich darf nie aufser Acht gelassen werden, dafs das Princip einer allgemeinen Methode oder Construction an abstracten Körpern immer am klarsten zu tage tritt. Aber von da bis zur Anwendung auf praktische Beispiele ist meist noch ein weiter Schritt, der erfahrungsgemäfs oft Schwierigkeiten bereitet. So fehlerhaft es ist, die Theorie nur an der Hand von praktischen Beispielen zu lehren, wie andere wollen, so fehlerhaft wäre es, die praktischen Beispiele ganz beiseite zu lassen. Eine gesunde Pädagogik bewegt sich beständig hin und her zwischen Abstraction und Anwendung.

Dazu kommt noch der Umstand, dafs wir Lehrer ausbilden sollen, die später ihre Schüler fürs praktische Leben vorzubereiten haben. Es giebt aber wohl keinen praktischen Beruf, in dem nicht z. B. das Verständnis von Plänen —, die Fähigkeit, den Grundrifs und Aufrifs eines Bauwerks oder einer Maschine, eines Apparates u. s. w. in der inneren Anschauung zur Körperlichkeit zu entwickeln, gefordert

*) Man darf z. B. nicht glauben, wie vielfach geschieht, die abstracte Fundamentalaufgabe: einen Punkt in Perspective zu setzen, befähige schon zu der Ausführung der Perspective eines zusammengesetzten Bauwerkes, man brauche die Fundamentalaufgabe eben nur auf die 100 Punkte desselben zur Anwendung zu bringen. Die Aufgabe fällt vielmehr unter den Gesichtspunkt der Theorie der geometrischen Verwandtschaften, nach der die perspectivischen Umformungsgesetze gegenüber der Formgestaltung des Objectes in natura, bezw. in Grund- und Aufrifs in Betracht zu ziehen sind. Demgemäfs ist das Object als Ganzes in seinem geometrischen Gesamtorganismus ins Auge zu fassen, und eben dadurch gewinnt die gestaltliche Eigenart desselben eine ausschlaggebende Bedeutung für die Lösung der Aufgabe.

würde. Und die Erfahrung lehrt zur Genüge, dafs nicht jeder, der in der Schule die convexen Polyeder: Prismen, Pyramiden und die regulären Polyeder, projicirt hat, imstande ist, Grundrifs und Aufrifs eines einfachen Bauwerks oder Apparates zu verstehen.

Auch die Geodäsie liefert wertvolles Übungsmaterial, das ich nicht unerwähnt lassen möchte, da es mir ein gutes Beispiel für den Anschlufs des Studiums der angewandten Mathematik an das theoretische Studium zu sein scheint: Man hat sich schon bislang in den mathematischen Universitätsseminaren mit der Herstellung von Modellen mathematischer Flächen beschäftigt. Die durch den Brill'schen Verlag allgemein zugänglich gemachten Modelle sind mit den Namen von hervorragenden Mitgliedern unserer Vereinigung verknüpft. Die Modellirung erfolgt auf Grund eines Gerippes von ebenen Parallelschnitten der betr. Fläche. Zu den abstracten mathematischen Flächen fügt nun die Geodäsie noch die topographischen Flächen und stellt dieselben in ähnlicher Weise durch ein System von äquidistanten Parallelschnittcurven, den sogen. Niveaucurven oder Höhencurven, dar. Die Construction der letzteren durch graphische Interpolation aus einer Reihe von Höhenprofilen ist eine Aufgabe der darstellenden Geometrie, die sich gewifs mit Vorteil an jene Flächenmodellirungsübungen anschliefsen läfst. — Auch die Betrachtung der Flächen unter dem Gesichtspunkt von formbildenden Kräften im Sinne des Herrn Finsterwalder kommt bei den topographischen Flächen zur Geltung durch die Berücksichtigung der geognostischen Verhältnisse des Geländes: Jede geologische Formation zeigt charakteristische Formen der Schluchten, Mulden, Einsattelungen, Kanten u. s. w., welche in charakteristischen Ausrundungen und Zuspitzungen der Niveaucurven zum Ausdruck gelangen. Das Studium dieser typischen Formen der Niveaulinien, welche das Gelände in seiner eigentümlichen, auf geognostischen Verhältnissen beruhenden Physiognomie kennzeichnen, gehört zu den anziehendsten und lehrreichsten Betrachtungen, die ich kenne, weil eben dabei eine ganze Reihe von wissenschaftlichen Disciplinen zusammenwirkt. Ich möchte den auf Niveaucurven sich beziehenden Übungen einen noch gröfseren Wert beilegen als z. B. denjenigen über Kartenprojectionen. Auch fürs praktische Leben kommt ihnen eine erhebliche Bedeutung zu: Zur Beurteilung der Oberflächenbeschaffenheit des Geländes ist für den manövrirenden Officier*) und nicht minder für den radfahrenden Touristen eine Höhencurvenkarte unerläfslich. Der künftige Lehrer, der in dieses Gebiet einen Einblick gewonnen hat, wird sich die reizvolle und dankbare Aufgabe nicht entgehen lassen, seine Schüler in das Verständnis solcher Karten einzuleiten.

---

*) Auch die Unterofficiere unserer Armee erhalten Unterricht im Lesen von Höhenkarten.

Wenden wir uns endlich zur technischen Mechanik!

Die erste Frage wird hier sein, in welcher Weise der Unterricht in diesem Fache an den Unterricht in der analytischen Mechanik anzuknüpfen, bezw. mit ihm zu verbinden sein wird.

Beide Disciplinen bauen sich auf den nämlichen Principien auf und unterscheiden sich hauptsächlich durch die Verschiedenheit der Anwendungsgebiete. Sie können sich daher sehr wesentlich gegenseitig unterstützen und in die Hand arbeiten. — Trotzdem ist die Beantwortung der Frage, wie dies geschehen soll, nicht leicht. Sie wird in erster Linie davon abhängig sein, wie weit der Vertreter der analytischen Mechanik sich entschliefsen kann, der technischen Mechanik Zugeständnisse zu machen, und mufs daher der gegenseitigen Verständigung der Vertreter der zwei Disciplinen überlassen werden. — Wenn ich mir dennoch erlauben darf, einen Vorschlag zu machen, so wäre es der: dafs die Vorlesung über analytische Mechanik (welche bisher in der Regel in einem Semester mit 4 Stunden abgehalten wurde) auf zwei Semester (mit je 2 Stunden) ausgedehnt und der Stoff so gegliedert würde, dafs im ersten Semester eine allgemeine Einleitung gegeben wird, welche die Grundbegriffe und deren nächstliegende Anwendungen behandelt. Hieran würden dann im folgenden Semester die beiderseitigen Vorlesungen über die höheren Teile der analytischen Mechanik und über technische Mechanik parallel nebeneinander angeschlossen werden.

Unter den einzelnen Capiteln der technischen Mechanik wird in den Prüfungsbestimmungen die graphische Statik besonders hervorgehoben. Graphische Statik läfst sich ohne ausgedehnte constructive Übungen nicht erlernen. Daher spielen auch hier die Constructionsübungen eine wesentliche Rolle.

Was den Stoff für die Übungen anlangt, so gilt dasselbe, was bei der darstellenden Geometrie hinsichtlich der Anwendungsbeispiele aus dem Gebiete der Technik gesagt wurde, in erhöhtem Mafse für die graphische Statik. Denn sie ist im eigentlichen Sinne aus technischen Problemen herausgewachsen. Doch wird auch dem theoretischen Unterricht durch Berücksichtigung von abstractem Übungsstoff (graphische Integration u. dgl.) Rechnung zu tragen sein.

Für die Leitung dieser Übungen möchte ich nicht unterlassen auf einen Gesichtspunkt besonders hinzuweisen, der in einem gewissen Gegensatz zu dem über die geodätischen Übungen Gesagten steht: Die Operationen der graphischen Statik sind durch die Raschheit und Übersichtlichkeit, womit sie ihre Resultate liefern, und ferner durch die Leichtigkeit, womit sie gestatten, in Fällen, wo die Kräfte der Analysis zur Lösung eines Problems nicht ausreichen, durch Näherungsverfahren zum Ziele zu gelangen, überaus bestechend, — so bestechend, dafs namentlich der Anfänger leicht versucht ist, die

Gefahren, denen er dabei ausgesetzt ist, nicht genügend zu beachten. Diese bestehen in der zweifelhaften Genauigkeit bei mangelnder Controle. Bei graphischen Operationen giebt es keine Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. Gilt dies allgemein für alles geometrische Zeichnen, so tritt es in der graphischen Statik in besonders gefährlicher Weise zutage, da die Natur ihrer Constructionen eine fortgesetzte Summirung der unvermeidlichen (an sich minimalen) Ungenauigkeiten bewirken kann, die oft zu einer sehr bedenklichen Höhe anwächst. Man kann daher in den Übungen zur graphischen Statik nicht strenge genug auf ein möglichst genaues Construiren dringen. Und vor allem kann man dem Schüler nicht scharf genug den Grundsatz einprägen: kein graphisches Resultat anzuerkennen, das nicht durch eine — sei es zeichnerische, sei es rechnerische — Genauigkeitscontrole verificirt ist. Nur dadurch kann der Vorwurf ungenügender Zuverlässigkeit der Resultate der graphischen Statik beseitigt werden. Sehr häufig ergeben sich solche Schlufscontrolen ganz von selbst. Ist dies nicht der Fall, so mufs eine Controle (eventuell mit rechnerischen Mitteln) eigens beschafft werden.*) — Wird schliefslich ein graphisches Resultat in Zahlen umgesetzt, so verpöne man grundsätzlich die Angabe von wertlosen Decimalstellen, zu der der Anfänger erfahrungsgemäfs immer geneigt ist. Die Schärfe der Zahlenangabe hat sich ebensowohl nach dem durch den Kräftemafsstab und die ideelle Constructionsschärfe bestimmten Genauigkeitsgrad als nach der durch die technische Ausführbarkeit bedingten Grenze zu richten. —**)

Betreffs des Betriebs der für die drei Disciplinen erforderlichen Übungen sei noch folgendes bemerkt: Dafs dieselben viel Zeit erfordern, ist nicht zu leugnen. Man darf jedoch nicht den Schlufs daraus ziehen, die Studirenden werden dadurch überbürdet. In den Übungen ist der Studirende productiv thätig. Nur die receptive Thätigkeit strengt an und wirkt bei längerer Dauer ermüdend. Die productive Thätigkeit wirkt im Gegenteil geistig erfrischend, sie erzeugt Selbstvertrauen und eine innere Befriedigung, die die geistige Spannkraft stärkt.

Freilich ist hierzu unerläfslich, dafs dem Studirenden ein Arbeitsraum von einer gewissen Behaglichkeit zur Verfügung stehe. Es mufs ein geräumiger heller Zeichensaal (Licht von links einfallend) beschafft werden, in welchem jeder Studirende seinen festen Platz mit verschliefsbarem Schrank innehat. Der Zeichensaal mufs den

*) Letzteres trifft z. B. bei allen Seilpolygon-Constructionen zu, ersteres bei Kräfteplänen von Fachwerken, falls die Auflagerreactionen vorher gesondert bestimmt werden.

**) Vgl. die unten folgenden Bemerkungen des Herrn F. Klein über Übungen an den Maschinen.

ganzen Tag geöffnet sein, so dafs er auch in der Freizeit benützt werden kann. Wenn der Lehrer nicht über Gebühr angestrengt werden und bei den Übungen doch etwas herauskommen soll, so genügt die kurze Zeit des eigentlichen Übungscollegs nicht. In dieser kann der Lehrer nur Anleitungen geben und controliren. Der Schwerpunkt der selbständigen Ausarbeitung fällt, wie bei jeder Seminararbeit, in die Freizeit.

Was die Verteilung der verschiedenen Übungen auf die einzelnen Studiensemester anlangt, so denke ich mir dieselbe etwa so: In die zwei ersten Semester, welche neben den Vorlesungen über analytische Geometrie, Infinitesimalrechnung und Physik noch diejenige über darstellende Geometrie aufzunehmen hätten, würden die Übungen über darstellende Geometrie eingestellt werden. Im dritten Semester (Sommersemester) würde neben dem Beginn des physikalischen Prakticums noch das geodätische Prakticum Raum haben. Im vierten Semester würde dann, nachdem zuvor im dritten Semester die einleitende Vorlesung über analytische Mechanik gehört wurde, die technische Mechanik mit den graphostatischen Übungen einsetzen. — Aufserdem ist eine Beteiligung an den graphischen Übungen in den höheren Semestern behufs Ausführung ausgedehnterer Constructionen, namentlich auch aus den höheren Gebieten der Mathematik, angelegentlichst zu empfehlen.

Hinsichtlich der Ausdehnung, in welcher die drei Disciplinen zu behandeln sind, kann es sich natürlich nur um das Ziehen weiterer Grenzen handeln, innerhalb deren freie Bewegung gelassen werden mufs. Eine Schablonisirung wäre vom Übel. Die zweckmäfsige Auswahl des Stoffes mufs dem Urteil des Docenten überlassen bleiben. Die endgiltige Feststellung des Programms kann erst auf Grund einer mehrjährigen Erfahrung und eines gegenseitigen Meinungsaustausches unter den beteiligten Docenten erfolgen. — Als Richtschnur kann für den ersten Anfang immerhin der Umfang dienen, in dem die drei Disciplinen an den Technischen Hochschulen gelehrt werden, und für den eine Reihe vortrefflicher Lehrbücher zur Verfügung steht.*) Einschränkungen könnten am ehesten in der technischen Mechanik statthaben. — Immerhin ist der Umfang der drei Disciplinen zusammengenommen ein ziemlich ausgedehnter.

*) Dies bezieht sich natürlich nur auf den Stoff, nicht auf die Zeit. Letztere dürfte an den Universitäten erheblich geringer zu bemessen sein als an den Technischen Hochschulen. Ich selbst habe z. B. die darstellende Geometrie an der Universität Tübingen in 2 Semestern mit 3 bezw. 2 wöchentlichen Vortrags- und 2 Übungsstunden gelehrt und dabei im wesentlichen (abgesehen von den Anwendungen) denselben Stoff erledigt, den ich an der Technischen Hochschule zu Berlin in 2 Semestern mit 5 Vortrags- und 5 Übungsstunden behandle.

Indessen was einmal gemacht wird, mufs recht gemacht werden. Besser gar nicht, als oberflächlich! Nirgends ist ein Abweichen von diesem Grundsatz bedenklicher als in der Mathematik. — Übrigens dürfte der stoffliche Umfang der andern Fächer, die an Stelle der angewandten Mathematik als drittes Prüfungsfach neben reiner Mathematik und Physik gewählt werden können (in der Regel entweder Chemie und Mineralogie oder Botanik und Zoologie), wenn anders sie recht betrieben werden, kaum ein geringerer sein.

Eine weitere Frage betrifft die Höhe der Anforderungen, die in der Prüfung zu stellen sind. Sie ist natürlich nicht identisch mit der vorigen Frage. Denn es mufs nicht alles, was gelehrt wird, auch geprüft werden; wie dies ja auch die Prüfungsvorschriften z. B. hinsichtlich der höheren Geodäsie ausdrücklich anerkennen. — Die Anforderungen des Examens werden sich dem Unterrichtsprogramm in einem gewissen Reductionsverhältnis anpassen müssen. Wir lehren nicht fürs Examen, sondern wir examiniren auf Grund eines mittleren Mafses des Gelehrten. — Namentlich für den Anfang, solange sich die ganze Einrichtung noch im Versuchsstadium befindet und das Unterrichtsprogramm noch nicht genau fixirt ist, dürfte es sich empfehlen, die Forderungen nieder zu stellen und sie dann erst allmählich entsprechend den gemachten Erfahrungen zu steigern.

Mit Rücksicht auf diese Verhältnisse erscheint der fünfte Leitsatz des Herrn Referenten, der den Wunsch ausspricht, dafs die beteiligten Docenten in der Prüfungscommission vertreten seien, von wesentlicher Bedeutung. Gerade für den Anfang ist ihre Mitwirkung unerläfslich. Wo sie nicht direct zu ermöglichen ist, sollte doch versucht werden, sie wenigstens indirect herbeizuführen, und zwar dadurch, dafs der Docent, der weifs, dafs einer seiner Schüler sich bei einer bestimmten Prüfungscommission zum Examen gemeldet hat, sich mit dem betreffenden Examinator in Verbindung setzt, was dieser gewifs mit entgegenkommendem Danke aufnehmen wird. Kann es ihm doch nur angenehm sein, über die Individualität des Candidaten und den vermutlichen Umfang seines Wissens näheres zu erfahren, um seine Fragen dem anpassen zu können.

Ich komme schliefslich nochmals zurück auf die Frage des Studiengangs derjenigen unter unseren jungen Mathematikern, die auf die akademische Laufbahn abheben. Will ein solcher seine künftige Lehrthätigkeit auch auf einen Zweig der Angewandten Mathematik ausdehnen — und das wird sich wohl kaum einer entgehen lassen —, so halte ich es für ebenso nützlich als notwendig für ihn, dafs er nach abgeschlossenem Universitätsstudium noch einige Semester an einer Technischen Hochschule zubringe. Ich habe dabei nicht blofs die ergänzenden Specialstudien im Auge, die ihm den für den Docenten notwendigen höheren Standpunkt verleihen, und

die ihm von einer Technischen Hochschule am bequemsten dargeboten werden. Von gröfserer Bedeutung scheint mir zu sein, dafs er seinen allgemeinen Gesichtskreis erweitere nach der Seite der technischen Wissenschaften, von deren Geist er einen Hauch verspürt haben mufs.

Wie wichtig das ist, dafür möge als Beispiel ein scheinbar untergeordneter, rein äufserlicher Umstand erwähnt werden: Wir haben gesehen, welche wichtige Rolle in der Angewandten Mathematik die graphischen Übungen und also das geometrische Zeichnen spielt. Es will mir nun scheinen, als werde der formalen Seite des geometrischen Zeichnens, der Darstellungsmanier, sehr vielfach nicht dasjenige Interesse geschenkt, das sie verdient. Ein Blick in unsere geometrische Litteratur genügt, um sich von der Planlosigkeit und geschmacklichen Unbeholfenheit zu überzeugen, die hier vielfach herrscht. Und ein Vergleich mit der entsprechenden französischen Litteratur zeigt die grofse Überlegenheit der letzteren über die deutsche, — eine Überlegenheit, die sicherlich auf die innigen Beziehungen zurückzuführen ist, die in Frankreich von Alters her zwischen Geometrie und technischen Wissenschaften, bezw. zwischen ihren Vertretern bestanden haben. — Für die Darstellungsmanier im geometrischen Zeichnen mufs das technische Zeichnen als Richtschnur dienen. Im technischen Zeichnen aber gilt durchweg der Grundsatz, dafs die Art der Darstellung durch den Zweck derselben und durch die Natur des dargestellten Objects bedingt ist.*) Sie ist entsprechend der Entwickelung der Technik und den Wandlungen des Geschmacks einem gewissen zeitlichen Wechsel unterworfen.**) — Ebenso sind

*) So kommen z. B. für architektonische, Bauingenieur-, kartographische, Maschinen-Zeichnungen, für Entwurfs- und für Werkstatt-Zeichnungen u. s. w. durchaus verschiedene Manieren zur Verwendung, welche auf die graphischen Darstellungen in der Angewandten Mathematik je nach Natur und Zweck derselben zu übertragen sind. — Dies bezieht sich beispielsweise auf die Markirung von Punkten mit dem Nullenzirkel bei abstracten Zeichnungen, nicht aber bei Polyederdarstellungen, für welche die Manier des architektonischen Zeichnens mafsgebend ist; ferner auf die consequente Verwendung verschiedener Liniensorten oder verschiedener Farben für die Charakterisirung der Bedeutung der Linien. — Die Unterscheidung von sichtbaren und unsichtbaren oder von gegebenen und gesuchten Linien ist nicht durch Farben zu bewirken, da es mit dem genannten Princip collidirt. Für letzteren Zweck empfiehlt sich die Beifügung kurzer Textnotizen. Dabei ist für die Anbringung von Buchstaben in den Figuren die Art der Einschreibung der Mafszahlen in Maschinenzeichnungen vorbildlich. — Die Strichstärke richtet sich nach dem Charakter und dem Mafsstab der Zeichnung. Die Hilfslinien sind dünner und blasser zu halten als die Hauptlinien. Die beliebte Manier, bei parallelprojectivischen Darstellungen die vorderen Linien dicker zu zeichnen als die hinteren, ist durchaus zu verwerfen als dem Wesen der Parallelperspective widersprechend. U. s. w.

**) So wurden z. B. beim architektonischen Zeichnen früher die Kanten, in denen Licht und Schatten an einander grenzen, stärker gezogen, was

hinsichtlich der zur Verwendung gelangenden Projectionsmethoden Wandlungen bemerkbar, die ihre Rückwirkung auf die Methodenlehre der darstellenden Geometrie geltend machen.*)

Ein sachgemäfser Einblick in diese Verhältnisse und die Ausbildung des Verständnisses und Geschmackes dafür läfst sich nur an der Quelle selbst erreichen, das heifst an den Technischen Hochschulen, die nun einmal der natürliche Nährboden für die Angewandte Mathematik sind. Und deshalb erachte ich es für so überaus wichtig, dafs sich der künftige Docent einer der angewandten Disciplinen vorher an einer Technischen Hochschule umgesehen habe.

Für die Technischen Hochschulen werden daraus nicht geringere Vorteile erwachsen als für die Universitäten. Es dürften sich daraus Beziehungen zwischen den Lehrern der Universitäten und Technischen Hochschulen entwickeln, die von segensreichstem Einflufs auf ein wissenschaftliches Zusammenarbeiten beider sein und manche zur Zeit vielleicht noch bestehenden Voreingenommenheiten in gegenseitiges Wohlgefallen auflösen werden.

Bemerkungen zu den vorstehenden Referaten.

Von **F. Klein** in Göttingen.

In Ergänzung der vorstehenden Referate möchte ich dem Wunsche Ausdruck geben, dafs die Grundauffassungen der technischen Mechanik nach Möglichkeit durch messende Versuche an Apparaten und Maschinen gestützt werden. Wenn hierfür ein eigenes Maschinenlaboratorium zur Verfügung steht, wie jetzt in Göttingen, so ist das sehr willkommen; in bescheidenem Umfange aber lassen sich solche Versuche sehr wohl an die bestehenden physikalischen Praktica anschliefsen, wenn man nur die maschinellen Hilfsmittel,

---

recht gut wirkende Bilder gab. Im Maschinenzeichnen war früher die Manier des farbigen Beränderns der Flächen im Brauch (was freilich immer den falschen Eindruck des Drahtmodells erzeugte). Beides ist auch in die darstellende Geometrie übergegangen, ist aber heute als veraltet zu bezeichnen.

*) So spielen z. B. die Weisbach'schen orthogonal-axonometrischen Systeme heute nicht entfernt mehr die wichtige Rolle wie ehedem. Dagegen hat die Methode der cotirten Projectionen und die Photogrammetrie eine erhöhte Bedeutung gewonnen. — Die Verwendung der Centralprojection für metrische Aufgaben ist als unfruchtbares Theoretisiren auf die Seite gedrängt. Jede Aufgabe weist durch ihre Natur auf eine bestimmte zweckmäfsigste Darstellungsmethode hin, in der sie auszuführen ist. Sie nach einer anderen Projectionsmethode zu behandeln, ist als Fehler zu bezeichnen. Für Darstellungsmethoden von blofs abstractem Interesse ist in der Angewandten Mathematik kein Raum.

die dort ohnehin vorhanden sind (Gasmaschinen, Dynamomaschinen etc.), in zweckmäfsiger Weise mit zu den Versuchen heranziehen will. Überhaupt soll man überall mit den zur Verfügung stehenden Mitteln erst einmal beginnen; die weitere Ausgestaltung der Mittel wird dann von selbst folgen.

Sodann möchte ich noch einen anderen Punkt berühren, indem ich davon ausgehe, dafs die bestehende grofse Freiheit der Universitätslehrer der Mathematik hinsichtlich der Wahl ihrer Vorlesungen einen vernünftigen Gebrauch dieser Freiheit voraussetzt. Wenn dies nicht geschieht, wenn beispielsweise an einer grofsen Universität, wie dies vorgekommen sein soll, zwei Jahre hindurch keine einleitende Vorlesung über analytische Geometrie gehalten wird, so kann man sich nicht wundern, wenn Tendenzen auf Einschränkung dieser Freiheit hervortreten. Hiermit ist zugleich gesagt, wie wir den genannten Tendenzen die Spitze abbrechen und diese Freiheit, die wir alle als ein besonders wertvolles Besitztum ansehen, erfolgreich verteidigen können. Wollen Sie als eine Mafsregel in diesem Sinne den Göttinger Studienplan für Lehramtscandidaten der Mathematik und Physik ansehen (von dem Neujahr 1899 eine neue Ausgabe veranstaltet worden ist). Eine gewisse Übersicht über die für ihn in Betracht kommenden Studien ist gerade für den Studirenden der Mathematik erwünscht, weil er sich ohne eine solche erfahrungsgemäfs vielfach nicht zurechtfindet. Es soll hiermit aber keine Uniformirung der Studien, sondern nur eine Regulirung derselben empfohlen sein. Mein Wunsch würde sein, dafs in ähnlicher Weise, wie es jetzt Göttingen und z. B. Strafsburg gethan haben, jede Universität in nicht zu langen Zwischenräumen einen ihren individuellen Verhältnissen entsprechenden Studienplan publiciren möchte. Ein Studienplan, der für alle Universitäten gleichförmig gelten sollte, müfste sich in nichtssagenden Allgemeinheiten bewegen, und ich habe immer abgelehnt, mich an der Aufstellung eines solchen zu beteiligen.

Über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an der Universität Strafsburg.

Von **A. Krazer** in Strafsburg i. E.

Für den Unterricht in der darstellenden Geometrie ist ein Curs von zwei Semestern in Aussicht genommen; in jedem dieser Semester soll eine zweistündige Vorlesung gehalten werden, und im Anschlusse daran sollen an einem Nachmittage in jeder Woche Übungen stattfinden. Mehr Zeit diesem Unterrichte zuzuwenden, dürfte mit Rücksicht auf die anderen Studien an der Universität nicht angängig

sein; es scheint aber auch möglich, mit dieser knapp bemessenen Zeit auszureichen, wenn man nur eine Wiederholung der gleichen Aufgaben in der Vorlesung und in den Übungen gänzlich vermeidet und solche Aufgaben, die für die selbständige Lösung durch die Schüler zu schwierig sind, nur in der Vorlesung behandelt (ich denke z. B. an die Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier Geraden), andere, deren Ausführung in der Vorlesung unverhältnismäfsig viel Zeit in Anspruch nehmen würde, ausschliefslich in die Übungen verlegt (z. B. die Durchdringungen und Schattenconstructionen). Es ist dann allerdings nötig, dafs einerseits in der Vorlesung der Vortragende mit Lineal und Cirkel arbeitet und genau zeichnet, andererseits im Übungssaale Gelegenheit ist, kurze Erläuterungen an der Tafel zu geben. Für die Übungen hat sich ein Verfahren als äufserst zweckmäfsig erwiesen, das ich bei Herrn Prof. Schur in Karlsruhe kennen gelernt habe, und das darin besteht, dafs jedem einzelnen Teilnehmer die Daten der Aufgabe auf einem autographisch oder sonstwie vervielfältigten Blatte in die Hand gegeben werden, die er genau zu copiren und seiner Zeichnung zu Grunde zu legen hat. Dadurch ist die sonst schwierige Disposition jedes Bogens gegeben und die Controle der entstehenden Zeichnung ungemein erleichtert.

In welcher Weise der ganze Stoff auf die zwei Semester verteilt werden soll, läfst sich jedenfalls erst nach Abschlufs eines ganzen Curses entscheiden. Der Wunsch, sofort nach Einführung der neuen Prüfungsordnung den Unterricht ins Werk zu setzen, liefs uns in Strafsburg die Vorlesung in einem Sommersemester beginnen. In dem kurzen Sommersemester konnte dann nicht mehr als in einem ersten Teile die orthogonale Projection von Punkten, Geraden, Ebenen, geradlinigen Figuren und ebenflächigen Körpern, und in einem zweiten Teile eine Erörterung der anderen Methoden der darstellenden Geometrie (schiefe Projection, Axonometrie, Central- und Reliefperspective) erledigt werden. Es ist aber doch möglich, dafs durch eine Einschränkung des etwas breit geratenen zweiten Teiles und einer sorgfältigeren Ausnutzung der Stunden sich noch Zeit für die Behandlung der Kegelschnitte finden läfst.

Noch mag erwähnt werden, dafs als Übungssaal ein Zimmer des mathematischen Seminars eingerichtet wurde, und dafs nicht blofs Tische (für je zwei Zeichnende) mit verschliefsbaren Schubladen und Zeichenstühle, sondern auch Reifsbretter und Schienen von Seite der Universität beschafft wurden; der Gesamtaufwand betrug für je einen Teilnehmer etwa M. 18.

Einige Bemerkungen zu der neuen preufsischen Prüfungsordnung.

Von **E. Study** in Greifswald.

In der Besprechung, die sich in der mathematischen Section der Naturforscherversammlung zu München an die Referate der Herren H. Weber und G. Hauck über die neue preufsische Prüfungsordnung anschlofs, stand wie in den Referaten selbst die Frage zur Erörterung, wie der akademische Unterricht sich diesen im wesentlichen auch in Sachsen und in den Reichslanden eingeführten Vorschriften anzupassen habe. Indem der Verfasser einer Aufforderung der Redaction des Jahresberichtes der Mathematiker-Vereinigung nachkommt, einige auf jener Versammlung gemachte Bemerkungen zu wiederholen, erlaubt er sich, mit Zustimmung der Redaction, seine Gedanken über den Gegenstand im Zusammenhange darzulegen.

Prüfungsordnungen werden nicht für ewige Zeiten erlassen, und wenn wir auch die vorliegende zunächst als ein Gegebenes hinnehmen müssen, so scheint es doch im Hinblick auf künftige Neugestaltungen erwünscht, dafs ein solcher Gegenstand einer öffentlichen Besprechung unterworfen werde, dafs gewisse Fragen im Kreise der Fachmänner erörtert werden, bevor die Regierungen in die Lage kommen werden, sich wieder mit ihnen zu beschäftigen.*) —

Als wesentliche Neuerungen erscheinen uns die durch verschiedene Bestimmungen herbeigeführte Entlastung der Studirenden, die nun in ausgedehntem Umfang und systematisch erfolgte Heranziehung von Schulmännern zu den Prüfungen, und die Einfügung einer neuen Facultas, der für angewandte Mathematik.

Die Entlastung der Studirenden hält auch der Verfasser für einen dankenswerten Fortschritt. Im Interesse einer freieren Gestaltung des Studiums sind aber nach seiner Ansicht noch weitere Erleichterungen ein dringendes Bedürfnis.

Dafs die allgemeine Prüfung beseitigt werde, ist ein Wunsch, der in den weitesten Kreisen geteilt wird, und den man nur deshalb jetzt nicht mehr so oft hört, weil bereits eine ziemlich allgemeine Resignation eingetreten ist. Dafs sich allgemeine Bildung durch eine Prüfung überhaupt nicht feststellen läfst, ist die Ansicht der meisten competenten Beurteiler, und ebenso auch, dafs der durch die Fächer Religion, Philosophie, Pädagogik, deutsche Litteratur bezeichnete Bildungsstoff eher einseitig als allgemein genannt zu werden verdient. Die Prüfungen in Religion und Litteraturgeschichte

*) Auch die Herren Referenten haben nicht umhin gekonnt, Änderungen der geltenden Bestimmungen vorzuschlagen.

sind nur partielle Repetitionen des Abiturientenexamens, bei dem man es doch genug sein lassen sollte. Warum entwickelt man gerade gegenüber dem zukünftigen Lehrer ein Mifstrauen, von dem der künftige Arzt und Richter verschont bleiben? Sollen die Lehramtscandidaten Vorlesungen über Kirchengeschichte hören, während den Theologen die gewifs oftmals recht nötige Erweiterung ihres Vorstellungskreises nach der naturwissenschaftlichen und volkswirtschaftlichen Seite hin nicht zugemutet wird? Sind zur Erwerbung pädagogischer Kenntnisse und Fähigkeiten nicht das Seminarjahr und das Probejahr da? Und kann man nicht ein sehr philosophischer Kopf sein und eine wohldurchdachte Weltanschauung haben, ohne in der Philosophie gerade „examinirbare“ Kenntnisse zu besitzen? Nur Mittelmäfsigkeit und Strebertum haben Vorteil von dieser Einrichtung. Der Tüchtige geht seinen eigenen Weg, er verschmäht das Gängelband. Auf ihn wirkt daher diese Prüfung geradeso wie auf den notorischen Faulpelz, indem sie nämlich nur dazu dient, ihm die letzte Zeit vor dem Examen zu verbittern und ihm die Aussichten auf sein Vorwärtskommen zu trüben. Da wird denn in aller Hast ein möglichst dünnes Compendium studirt, und auch das meistens kaum zur Hälfte. Auffallend häufig haben sich Candidaten „näher mit der Geschichte der alten Philosophie beschäftigt“. Der Examinator mufs dann ein Auge zudrücken und durch Milde die Wirkung einer unzweckmäfsigen Verordnung abzuschwächen suchen. Dafs so die Dinge wirklich liegen, ist allgemein bekannt. Warum fährt man aber dann fort, zu verlangen, was sich auch nicht annähernd durchsetzen läfst?

Auch über die in der allgemeinen Prüfung geforderte schriftliche Arbeit können wir nicht günstig urteilen. Gewifs ist es sehr zu wünschen, dafs alle unsere Lehrer Gewandtheit im schriftlichen Ausdruck ihrer Gedanken sich aneignen möchten. Aber während ihrer Studienzeit haben viele kaum Gelegenheit, diese wertvolle Fähigkeit zu üben. Auch hier wird man die Erwartungen nicht zu hoch spannen dürfen, wenn man sich nicht enttäuscht sehen will. Sodann scheint uns die Bearbeitung eines von aufsen gegebenen Themas aus einem Gedankenkreise, der dem Candidaten mehr oder minder ferne liegt, kein glücklicher Griff zu sein. Niemand kann gut schreiben über eine Sache, die ihn nicht interessirt. Es ist aber für einen Candidaten der Physik eine starke Zumutung, sich, aus welchem Gesichtspunkt auch immer, z. B. für Gellert's Kirchenlieder zu erwärmen. Sollen auf eine solche Stilübung und die zugehörigen litterarischen Studien acht Wochen von den sechzehn verwendet werden, die für beide Arbeiten zusammen angesetzt sind?

Dagegen, dafs der Leiter der Prüfungscommission ein Schulmann sein soll, haben wir nichts einzuwenden. Nur dürfte es sich

wohl empfehlen, dafs der Vorsitzende am Orte der Prüfungen selbst ansässig ist, da andernfalls Erschwerungen des Geschäftsgangs sich ergeben müssen. Bedenklich dagegen erscheint uns die Zuziehung von Schulmännern als Examinatoren zu den Fachprüfungen.

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dafs wer ein Examen und selbst ein sehr gutes Examen besteht, damit noch lange nicht erwiesen hat, dafs er auch nur eines der von ihm in elementarer Weise zu unterrichtenden Fächer zugleich in einem höheren Sinne, nämlich als akademischer Lehrer vertreten kann. Mit Recht verlangen die Universitäten von ihren Lehrern ganz anders geartete Leistungen, gründlichere Specialstudien und eine Beherrschung des Stoffs, wie sie nur durch productive wissenschaftliche Arbeit erworben werden kann. Die gleichen Anforderungen, wie an den akademischen Lehrer, müssen aber gewifs auch an den gestellt werden, der dem Lernenden am Ende seiner Studienzeit als Examinator gegenübertritt. Nicht als ob der Prüfende alles das, was ihm selbst wichtig erscheint, nun auch von dem unglücklichen Candidaten fordern sollte. Aber nur wer in freier Beherrschung seines Gegenstandes sich bewegen kann, wird die Leistungen eines anderen richtig einzuschätzen im stande sein, nur er wird verstehen, was der Candidat an Kenntnissen etwa besitzt, auch hervorzulocken. Gerade hervorragende Gelehrte sind daher selten gefürchtete Examinatoren. Dafs aber der von ganz anderen Aufgaben ausgefüllte schwere und verantwortungsvolle Beruf eines Gymnasial- oder Reallehrers mit seiner Zersplitterung der Arbeitskraft dem Schulmann in der Regel gar nicht die Möglichkeit läfst, ein solches Niveau zu erreichen und sich dauernd darauf zu behaupten, das wissen die Lehrer im ganzen selbst sehr wohl. Ertönt doch aus ihren Kreisen die, wie uns scheint, völlig berechtigte Klage, dafs es ihnen an Zeit zur wissenschaftlichen Weiterbildung fehle. Gerade die unter ihnen, die lebhafte wissenschaftliche Interessen haben und die daher die Schwierigkeit der Aufgabe wohl zu beurteilen vermögen, werden wahrscheinlich das neue Amt als eine ihrem Stande auferlegte schwere Bürde empfinden, und sie werden ihren rührigen Collegen, die die neuen Bestimmungen durchzusetzen gewufst haben, wenig dankbar sein für dieses Geschenk. Allerdings kann jeder einzelne das Amt eines Examinators mit der Motivirung ablehnen, dafs er sich einer solchen Aufgabe nicht gewachsen fühle. Ob aber eine so begründete Weigerung auf die vorgesetzte Behörde einen guten Eindruck machen würde, das darf füglich bezweifelt werden: Dafs die besprochene Schwierigkeit an mafsgebender Stelle nicht hinreichend gewürdigt wird, das beweist eben die Existenz der besprochenen Einrichtung. Und der Sache würde mit einer solchen Weigerung wohl nicht einmal gedient sein. Das Amt würde einem andern angetragen werden, der sich in ebenderselben Lage befindet.

Setzen wir, um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, den durchaus nicht unwahrscheinlichen Fall, dafs ein Candidat unter Verweisung auf § 23b der Prüfungsordnung den Wunsch ausspricht, in der theoretischen Elektricitätslehre eingehender geprüft zu werden. Mit den Ansichten über Elektricität haben bekanntlich im letzten Jahrzehnt auch die zugehörigen mathematischen Theorien eine beträchtliche Umwälzung erfahren, und diese findet ihren Ausdruck im heutigen akademischen Unterricht. Man stelle sich nun die Lage eines Schulmannes vor, der diese durch Lehrbücher zur Zeit noch keineswegs leicht zugänglichen mathematischen Theorien nicht kennt und gleichwohl darin prüfen soll!

Und dabei hätten wir auf die natürlich auch in anderen Gebieten eingetretenen Änderungen im Unterrichtsstoff noch nicht einmal Bezug zu nehmen brauchen.

Wieviele unter den Physikern unserer Gymnasien und Realschulen, die ihr Examen sagen wir vor zehn Jahren bestanden haben, werden wohl gegenwärtig auch nur in den älteren mathematischen Theorien der Elektricitätslehre so zu Hause sein, dafs sie in diesen ohne sehr sorgfältige und umfangreiche Vorbereitungen als Examinatoren fungiren könnten? Ja wir können getrost noch einen Schritt weitergehen und ruhig behaupten, dafs viele Lehrer ohne Vorbereitung ihr Examen selbst nicht mehr würden bestehen können, wenn sie es von neuem abzulegen hätten. Es brauchen das noch lange nicht schlechte Lehrer zu sein; im Gegenteil, es können sich vielleicht viele der besten unter ihnen befinden. Nicht darum ist ja die Beschäftigung mit höherer Mathematik und theoretischer Physik auf den Universitäten vorgeschrieben, weil solche Kenntnisse für den Schulunterricht unmittelbar zu verwerten wären, sondern weil dadurch eine Gewandtheit in der Bemeisterung des Stoffes, eine umfassendere und vertiefte Gesamtansicht und eine Reife des Urteils erreicht werden, die für einen gedeihlichen Unterricht unentbehrlich sind, auf anderem Wege aber in der Regel nicht erzielt werden können. Vieles darf der Lehrer wie der Mann der Praxis ohne Schaden vergessen, was er einmal doch gewufst haben mufs; die Einzelheiten können schwinden, die gute Nachwirkung bleibt. Als Examinator im Sinne unserer Prüfungsordnung eignet sich aber ein solcher Lehrer sicherlich nicht, mag er in seinem Berufe auch noch so tüchtig sein.

Welcher Sturm der Entrüstung würde sich nicht erheben, wollte die Regierung den Gymnasiallehrern einen Teil des Abiturientenexamens aus der Hand nehmen, um andere, etwa Universitätslehrer, damit zu betrauen! Noch viel unzweckmäfsiger als eine solche gewifs nicht zu befürwortende Anordnung aber ist die, von der wir hier reden.

Was mag wohl mit dieser auffallenden Mafsregel beabsichtigt sein? Sollte nur der vielleicht von einigen, gewifs aber nicht von

der Gesamtheit der Lehrer gehegte Wunsch nach einer „Vertretung" des Lehrerstandes in den Prüfungscommissionen, also ein rein persönliches Motiv, zu einer so folgenschweren Bestimmung geführt haben? Wahrscheinlich leider nicht. Welches aber sind dann die sachlichen Gründe der Einrichtung? Wir haben nur den einen finden können, dafs den akademischen Lehrern zu Gemüte geführt werden soll, dafs ihr Unterricht elementarer werden, dem pädagogischen Bedürfnis mehr Rechnung tragen müsse. Der Schulmann, das erwartet man vielleicht, wird vor allem in der Prüfung sein Augenmerk auf solche Dinge richten, die der Lehrer unmittelbar braucht*), und das sind bekanntlich nicht immer die Dinge, die im akademischen Unterricht bisher im Vordergrund gestanden haben. Die die neue Einrichtung in Anregung gebracht haben, würden dann also wohl der Ansicht sein, dafs durch Seminarjahr und Probejahr dem Bedürfnis der Unterrichtspraxis noch nicht genügend Rechnung getragen sei, sondern dafs auch noch das akademische Studium dazu herangezogen werden müsse, natürlich auf Kosten der wissenschaftlichen Ausbildung der Studirenden, an deren Stelle teilweise eine auf die gewöhnlichsten Aufgaben des Unterrichts gerichtete Dressur zu treten hätte.**) Sollte wirklich der Ursprung der besprochenen Einrichtung in solchen Bestrebungen liegen, wie sie ja wohl hier und da vorhanden sein mögen, — und wir haben, wie gesagt, irgend einen anderen sachlichen Grund nicht zu finden vermocht — dann kann dem Gegenstande seitens der akademischen Lehrer gar nicht genug Aufmerksamkeit geschenkt werden. Dann steht eine Lebensfrage unserer geistigen Cultur auf dem Spiele, dann sind wir in Gefahr, ein kostbares Gut zu verlieren.

Nehmen wir indessen an, dafs der in die Prüfungscommission berufene Schulmann seine Aufgabe ebenso zu fassen sucht wie der akademische Lehrer — und viele, wohl die Mehrzahl, werden das sicherlich thun —, dann ergiebt sich, in vielen Fällen wenigstens, immer noch eine Erschwerung des Examens für den Candidaten. Denn der Examinator wird, wie gesagt, in der Regel nicht umhin

*) In einem anderen Sinne kann der mathematische Unterricht wenigstens allerdings wohl elementarer werden. Es kann das Anschauliche mehr in den Vordergrund treten, es können elementare Gegenstände aus modernen wissenschaftlichen Gesichtspunkten betrachtet werden, wie es hier und da auch bereits geschieht. Aber auch solche Vorlesungen werden dem Schulunterricht nur mittelbar zu gute kommen, und Schulmänner, namentlich solche der älteren Generation, die derartige Vorlesungen selbst zu hören keine Gelegenheit gehabt haben, werden sich durchaus nicht zu Examinatoren in diesen Dingen eignen.

**) Nicht Forscher, sondern Lehrer habe der akademische Unterricht zunächst heranzubilden, wird uns zuweilen gesagt. Als ob sich nicht die Erziehung von Forschern in der Regel ganz von selbst verböte!

können, sich auf das Examen vorzubereiten. Er mufs dann auf seinem Schein bestehen und kann vielleicht gerade in die Gebiete dem Candidaten nicht folgen, in denen dessen beste Kenntnisse liegen Es sind Erfahrungen vorhanden, die zeigen, dafs unter solchen Umständen das Examen geradezu in ein Hazardspiel ausarten kann.

Gegen das Gesagte möge man nicht etwa geltend machen, dafs solche Unzulänglichkeiten auch da schon vorgekommen seien, wo nur akademische Lehrer Examinatoren waren. Sicherlich sind sie vorgekommen, wir knüpfen eben gerade an solche betrübende Erscheinungen an. Aber wie schwere Fehler auch schon begangen worden sein mögen, diese Fehler hatten ihre Wurzel in den Unvollkommenheiten der menschlichen Natur, und sie werden auf keine Weise ganz auszurotten sein. Allseitige Garantien für Competenz und Geschick eines Examinators lassen sich eben der Natur der Sache nach nicht wohl bieten.*) Hier aber ist eine Einrichtung geschaffen worden, die, weit entfernt, Mängel der geschilderten Art zu beseitigen, sie geradezu hervorrufen mufs, und die daher schliefslich demoralisirend auf den Eifer der Studirenden einwirken wird. Eine Einrichtung, die, wollen wir hinzufügen, auch ganz und gar nicht im Interesse der Lehrer liegt, weder in deren wahrem Standesinteresse, noch auch im Interesse ihrer Berufsthätigkeit.

Ein anderer Umstand, der auch nicht für die Heranziehung von Schulmännern als Examinatoren spricht, ist der folgende. Es ist bekannt, ein wie schiefes Bild ein Examen häufig von der Qualification eines jungen Mannes giebt. Aufregung und körperliche Erschöpfung, hervorgerufen durch das Examen selbst, das eine keineswegs geringe physische und psychische Anstrengung darstellt, bewirken oftmals, dafs ein Candidat Kenntnisse und Fähigkeiten im entscheidenden Augenblick nicht zu zeigen vermag, die er thatsächlich besitzt. Unter solchen Umständen konnte bisher der Examinator, auf Grund seiner namentlich bei seminaristischen Übungen erworbenen Kenntnis der Persönlichkeit des Candidaten, gleichwohl zu einem richtigen Urteil gelangen, in vielen Fällen wenigstens. Diese Wohlthat wird nun dem Candidaten zum grofsen Teil entzogen; und in demselben Sinne, nämlich erschwerend, mufs es wirken, wenn mangels persönlicher Beziehungen das Thema der wissenschaftlichen Arbeit

*) Was sich — in den meisten Fällen wenigstens — wirklich thun läfst, ist, soviel wir sehen, einzig und allein die rücksichtslose Beseitigung solcher Examinatoren, die durch zu schwere und überhaupt unverständige Fragen sich auszeichnen oder die ihnen verliehene Macht mifsbrauchen. Die Qualification eines Examinators ist nicht nur den Mitgliedern der Prüfungscommissionen in der Regel genau bekannt, sondern sie pflegt auch von den Studirenden richtig beurteilt zu werden. Ein unbeliebter Examinator ist immer ein schlechter Examinator, wenn auch das Umgekehrte wohl nicht richtig ist.

nicht mehr in gleichem Grade wie bisher dem ja von mancherlei Zufälligkeiten abhängigen Studiengang des Candidaten angepafst werden kann.

Dafs der ganze Apparat der Prüfungscommission kostspieliger wird und schwerfälliger arbeitet, wenn mehrere Mitglieder auswärts wohnen, und dafs z. B. unnötige Weitläufigkeiten daraus entstehen können, dafs die physikalischen Apparate der Universität A verschieden sind von denen der Realschule B, erwähnen wir, als von minderem Belang, nur nebenbei.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der neuen Facultas.

Der normale Lauf der Dinge ist wohl der, dafs neuen Bedürfnissen die nötigen Einrichtungen folgen, und erst nach längerer Zeit, wenn genügende Erfahrungen gesammelt sind, die Examina. In unserem Falle ist der gerade entgegengesetzte Weg eingeschlagen worden, die Prüfungen sind zuerst da; und damit sehen sich die Mathematiker vor eine sehr schwierige Aufgabe gestellt.

Wenn die Mathematiker-Vereinigung in irgend einer Form Stellung zu solchen Fragen nimmt, so kann es sich dabei natürlich nicht um eine akademische Erörterung darüber handeln, was etwa gut und schön sein mag. Wir müssen uns vielmehr von dem Gedanken leiten lassen, auf die Mafsnahmen der Regierungen Einflufs zu gewinnen, ohne deren thätige Hülfe wir nur sehr wenig werden ausrichten können. Wollen wir nicht einen grofsen Teil des Einflusses, den wir in dieser Richtung allenfalls haben mögen, von vorn herein aus der Hand geben, so müssen wir unsere Wünsche möglichst präcise formuliren, vor allem aber so, dafs diese Wünsche nicht zu weit über das hinausgehen, was die Regierungen beim besten Willen werden leisten können. Wir müssen also, so gut oder so schlecht wir es können, die finanzpolitische Seite der Frage selbst schon erwägen. Wir müssen darauf Rücksicht nehmen, dafs unsere Vorschläge mit Bedürfnissen anderer Fächer in Collision kommen können. Wir müssen ferner darauf bedacht sein, dafs die neu zu schaffenden Einrichtungen nicht etwa eine Überlastung der Studirenden und der Docenten herbeiführen. Wir werden endlich gewissenhaft abwägen müssen, ob da, wo vorhandene Einrichtungen ganz oder teilweise beseitigt werden sollen, das Neue wirklich auch das Bessere sein wird. Um aber über alle diese Fragen ein sicheres Urteil zu gewinnen, müfste der einzelne mit der Natur der Einrichtungen schon vertraut sein, die geschaffen werden sollen; er müfste eben die Erfahrungen schon besitzen, die erst auf Grund dieser Einrichtungen gesammelt werden können. Unter diesen Umständen ist es mit besonderem Danke zu begrüfsen, dafs eine Autorität vom Range des Herrn G. Hauck uns aus dem

Reichtum der an Technischen Hochschulen gesammelten Erfahrungen einige Fingerzeige gegeben hat, die uns zur Bildung eines vorläufigen Urteils helfen können. Die Bemerkungen, die der Verfasser hierzu sich zu machen erlaubt, bittet er natürlich als völlig unmafsgeblich aufzufassen. Es ist dringend zu wünschen, dafs eine für die Zukunft der mathematischen Wissenschaft in Deutschland so wichtige Frage von möglichst vielen Seiten beleuchtet werde, und dafs dies auch möglichst bald geschehe, noch bevor bei Gelegenheit der nächsten Naturforscherversammlungen wieder ein mündlicher Gedankenaustausch stattfinden kann. Jedenfalls müssen Vorschläge, über die die mathematische Section auf einer solchen Versammlung abstimmen soll, geraume Zeit vorher schon im Druck vorliegen. Es geht bei wichtigen Angelegenheiten schlechterdings nicht, dafs einzelne Persönlichkeiten auf der Versammlung selbst erst mit neuen Ideen hervortreten, und dafs dann die anderen, ohne genügende Zeit zur Überlegung zu haben, ihre Zustimmung erklären.

Durch die Einstellung einer Facultas für angewandte Mathematik in die neue Prüfungsordnung ist der jetzt auf die Tagesordnung gesetzten Forderung Rechnung getragen worden, dafs die theoretische Wissenschaft in eine innigere Beziehung zu den Anwendungen treten soll, als bisher. Über die mathematischen und technischen Ergebnisse, die von der Ausführung dieses Gedankens zu erwarten sind, denken wir nicht allzu sanguinisch. In England, wo eine solche Verschmelzung vorhanden ist*), stehen die Leistungen in Technik und Physik wohl nicht höher als bei uns, die in der reinen Mathematik aber sehr viel niedriger. Die pädagogischen Vorteile dagegen, die sich daraus für die Lehrer unserer höheren Schulen ergeben, sind wohl unzweifelhaft. Herr Hauck hat sie in überzeugender Weise auseinandergesetzt.

Will man untersuchen, was für eine Ergänzung des mathematischen Unterrichts nach der praktischen Seite hin geschehen kann, so mufs man, wie wir glauben, unterscheiden zwischen Unterrichtscursen für zukünftige Lehrer an Gymnasien und Realschulen, und Cursen, die für solche Candidaten bestimmt sind, die die neue Facultas zum Zwecke der Ausübung einer auf sie bezüglichen Lehrthätigkeit erwerben wollen. Denn diese beiden Classen von Candidaten sind nicht identisch, und sie haben sehr verschiedene Bedürfnisse. Wer auf eine Anstellung an einer Schule nicht gewerblichen Charakters rechnet, wird auch ferner in der Regel nicht darauf verzichten können,

---

*) In Cambridge giebt es unter acht Lehrstühlen (vergleichbar unseren Ordinariaten) für die mathematischen Wissenschaften nur einen für reine Mathematik.

die Lehrbefähigung der oberen Stufe für reine Mathematik durch die ebenfalls für die obere Stufe zu erwerbende Facultas für Physik zu ergänzen.*) Die Lehrbefähigung in Geodäsie und technischer Mechanik wird solchen Candidaten nur wenig Nutzen bringen, da diese Fächer auch an Oberrealschulen nirgends unterrichtet werden. Dafs aber Studirende der reinen Mathematik z. B. an Stelle der Geographie die angewandte Mathematik als Nebenfach in Betracht ziehen könnten, wird durch die Prüfungsordnung selbst ausgeschlossen, die ausdrücklich vorschreibt, dafs hier die Lehrbefähigung nur für die obere Stufe erteilt werden darf.

Die Ausbildung der künftigen Mathematiklehrer an Realschulen und Gymnasien mufs uns natürlich am meisten am Herzen liegen; denn diese Classe von Studirenden wird an den Universitäten nach wie vor die Mehrzahl der Hörer mathematischer Vorlesungen ausmachen.

Um ihre Fähigkeiten nach der praktischen Seite hin besser zu entwickeln, könnte, soviel wir sehen, dreierlei in Aussicht genommen werden.

Man kann zunächst daran denken, diese Studirenden für einige Zeit auf eine Technische Hochschule zu schicken. Dort müfsten besondere Curse für sie eingerichtet werden. Ob aber unsere Techniker von einer solchen Masseninvasion schwerverdaulicher Elemente sehr entzückt sein würden, halten wir für zweifelhaft. Leiden sie doch ohnehin schon unter Überfüllung ihrer Hörsäle. Dieser Weg ist also aus diesem Grunde und wohl auch noch aus anderen Gründen wahrscheinlich nicht gangbar.

Man könnte zweitens, ohne neue Curse einzustellen, den Inhalt einiger Vorlesungen, namentlich der Vorlesung über theoretische Mechanik, in geeigneter Weise abändern und ergänzen. In dieser Hinsicht kann vielleicht einiges gethan werden, aber sicher nicht allzuviel.

---

*) Die Prüfungsordnung verlangt allerdings nur eine Lehrbefähigung der oberen Stufe. Ja sie läfst es auffallenderweise sogar zu, dafs in der angewandten Mathematik die Facultas der oberen Stufe erworben wird, und in der reinen Mathematik und Physik nur die der unteren Stufe. Es würden aber wahrscheinlich an Gymnasien und Realschulen selbst solche Candidaten in gröfserer Zahl nicht zu brauchen sein, die die Facultas der oberen Stufe in beiden Zweigen der Mathematik mit der Lehrbefähiguug zweiter Stufe in Physik verbinden. — In allen drei Fächern eine Facultas der ersten Stufe zu erwerben, ist nur bei Verlängerung des Studiums möglich. Da nicht anzunehmen ist, dafs von den zahlreichen Candidaten, die nach der Mitteilung von Herrn Hauck sich zur Erwerbung der neuen Facultas entschlossen haben, viele die letzte Alternative gewählt haben werden, so werden sich voraussichtlich manche später einer Nachprüfung unterwerfen müssen.

Man kann drittens neue Curse einstellen, indem man gleichzeitig die Anforderungen in anderer Beziehung heruntersetzt. Mehr als ein neues Fach darf dann aber den Candidaten nicht aufgebürdet werden, wenn weder Überlastung noch Verflachung die Folge sein soll. Man könnte ihnen etwa die Wahl lassen zwischen darstellender Geometrie und Geodäsie. An den Unterrichtsbetrieb in diesen Fächern dürfte man dann freilich nicht entfernt die Anforderungen stellen, die Herr Hauck formulirt hat. Wir greifen aus seinem Referat einige charakteristische Äufserungen heraus, indem wir einzelne Worte in anderer Weise, als Herr Hauck selbst es gethan hat, hervorheben.

„Der Unterricht in angewandter Mathematik ist mir ohne ausgedehnte Seminararbeit, die sich aus praktisch messenden, wissenschaftlich rechnerischen und constructiv zeichnerischen Übungen zusammensetzt und dem Studirenden neben dem Wissen auch das entsprechende Können vermittelt, nicht denkbar."

„Dafs in den Prüfungsvorschriften [neben der niederen Geodäsie] nur die Elemente der höheren Geodäsie gefordert werden, kann natürlich für die Ausdehnung des Unterrichts, der unter allen Umständen einen vollen Einblick in das Wesen der Sache geben mufs, nicht bestimmend sein."

Danach hätten wir alles Recht, uns kurz zu fassen und die Einführung irgend eines praktischen Fachs in den allgemeinen Unterricht der künftigen Mathematiklehrer einfach abzulehnen. Ist unter anderen Voraussetzungen ein erfolgreicher Unterricht in solchen Fächern nicht möglich, wo bleibt dann, bei den mit Recht sehr gesteigerten Anforderungen in Bezug auf physikalische und andere Übungen, die Zeit für vertiefte theoretische Studien?*) Und mufs sich nicht auch für die Pflege der Wissenschaft ein schwerer Schaden ergeben, wenn, wie Herr Hauck es will, in Zukunft jeder Universitätslehrer der Mathematik eines der praktischen Fächer zum Gegenstand von Specialstudien macht und es unterrichtet? Die reine Mathematik erfordert bei ihrer Ausdehnung und Vielgestaltigkeit einen ganzen Mann. Nur wenigen wird es möglich sein, auf diesen Gebieten den Fortschritten der Wissenschaft zu folgen und selbst Tüchtiges zu leisten, und daneben auch noch in dem autoritären Mafse, wie es Herr Hauck verlangt, eines der praktischen Fächer

*) Könnte die Prüfungsordnung so abgeändert werden, dafs die angewandte Mathematik als Nebenfach zugelassen würde, so würde allerdings Zeit für ausgedehntere praktische Übungen gewonnen werden. Die weiterhin im Texte noch zu besprechenden Schwierigkeiten würden aber dieselben bleiben. Es müfste dann übrigens die angewandte Mathematik für die künftigen Mathematiklehrer obligatorisch gemacht werden; denn andernfalls würden die neuen Einrichtungen doch wieder nicht allen zu gute kommen.

zu beherrschen, da doch auch diese, wie Herr Hauck sagt, einen ganzen Lebensberuf ausfüllen.

Es ist klar: Wenn solche Forderungen durchgesetzt werden, dann ist es vorbei mit der Blüte der reinen Mathematik, deren wir uns jetzt in Deutschland erfreuen.

Aber das hat Herr Hauck ja gewifs nicht gewollt; wir dürfen wohl von seinen Forderungen ein Erkleckliches abziehen und immer noch eine gute Wirkung von dem so reducirten Unterricht erwarten. Wir werden seiner Autorität gewifs nicht zu nahe treten, wenn wir den bezeichneten Weg gleichwohl für gangbar halten.

Wenn man der praktischen Ausführung des Gedankens näher tritt, ergeben sich freilich immer noch Schwierigkeiten genug.

Die vor allem in Aussicht zu nehmende Berücksichtigung der darstellenden Geometrie im Lehrplan wird sicher mit Freuden begrüfst werden von allen denen, die nicht in der Abstraction das einzige Heil sehen, und das ist wohl die Mehrzahl der Universitätsmathematiker. Es ist wohl keine Aufgabe des akademischen Lehrers der Mathematik schwieriger als die, den durchschnittlich begabten Studirenden zu anschaulichem Denken zu erziehen, zu der Deutlichkeit geometrischer Vorstellung, die der künftige Schulmann nötig hat, und die bei dem geometrischen Unterricht in annähernd richtigem Zeichnen körperlicher Gebilde aus freier Hand sich offenbart. Ein vorzügliches und vielleicht das beste Mittel dazu ist Unterweisung in der darstellenden Geometrie. Es würde daher nach der übereinstimmenden Ansicht sehr vieler Fachgenossen einen Fortschritt bedeuten, wenn neben den bisher schon wohl an allen Universitäten bestehenden periodischen Cursen in analytischer Geometrie, Differentialrechnung u. s. w. überall ebenso regelmäfsig wiederkehrende Übungen im geometrischen Zeichnen eingerichtet werden könnten.

Eine erste Schwierigkeit, die sich der Ausführung dieses Gedankens in den Weg stellt, liegt in einer Bestimmung der neuen Prüfungsordnung selbst, nämlich eben darin, dafs in dieser die darstellende Geometrie der neuen Facultas einverleibt ist. Da die Mehrzahl der Hörer aus dem schon angegebenen Grunde, sowie noch aus anderen Ursachen, die Erwerbung der neuen Facultas nicht wird in Aussicht nehmen können, so werden diese Studirenden in der darstellenden Geometrie nicht ohne Berechtigung einen Gegenstand erblicken, mit dem sie sich nicht zu beschäftigen brauchen. Dafs diese Thatsache ihre Einwirkung auf den Besuch der Übungen haben wird, ist klar, falls nicht etwa der Unterrichtende durch „sanften Druck" den Übelstand auszugleichen in der Lage und gewillt ist. An einer gröfseren Universität kann auch unter diesen Umständen noch die Einrichtung solcher Curse lohnend sein; bei kleineren wird dadurch allein schon der Erfolg in Frage gestellt. Ein gewissenhafter Docent wird aber schon die Beschaffung der nötigen Einrichtungen (Zeichen-

raum mit geeigneten Tischen) nur dann befürworten können, wenn er einen einigermaſsen sicheren Lehrerfolg vor Augen hat.

Eine zweite und nicht geringere Schwierigkeit liegt in der kleinen Zahl mathematischer Docenten an mehreren Universitäten. Die Einrichtung regelmäſsig wiederkehrender Curse in irgend einem Fach (und nur von solchen Cursen reden wir hier, nicht von gelegentlich abzuhaltenden Übungen) bedeutet für den Unterrichtenden eine Einschränkung der Lehrfreiheit. Diese aber ist ein wertvolles Gut, mit dem sparsam umgegangen werden muſs. Die Möglichkeit, in Specialvorlesungen anregend auf Fortgeschrittenere zu wirken, ist an den kleineren Universitäten den Docenten wahrlich schon eng genug bemessen. Daſs aber diese in der genannten Hinsicht nicht gar zu ungünstig gestellt werden, daſs sie nicht gezwungen werden, ihre Vorlesungen auf wenige stereotype Themata mehr oder minder elementaren Charakters zu beschränken, das liegt im Interesse der Studirenden (namentlich solcher, die den Doctorgrad zu erwerben wünschen), und, bei dem fortwährenden Austausch von Docenten zwischen allen deutschen Universitäten, im wohlverstandenen Interesse auch der groſsen Anstalten. Diese könnten sonst bei Neubesetzung von Professuren auf eine gar zu enge Auswahl sich angewiesen sehen.

Es würde also jedenfalls da, wo die Mathematik nur durch zwei Lehrstühle vertreten ist, eine neue Kraft einzustellen sein, die dann auch sonst ergänzend eingreifen könnte. Es wird auch zu berücksichtigen sein, daſs man nicht jedem der einmal Angestellten wird zumuten können, Übungen in darstellender Geometrie abzuhalten, und daſs keiner dazu gezwungen werden kann.

Auch im Fache der Geodäsie wird es ohne Errichtung einiger neuer Lehrstühle nicht abgehen. Ein Astronom, der die Geodäsie mit übernehmen könnte, ist nicht überall vorhanden, und auch wo er vorhanden ist, wird doch vielleicht die Einstellung einer weiteren Kraft nötig werden.

Sollte sich eine Ergänzung des Unterrichts, wie wir sie im Auge haben, wirklich fruchtbar erweisen, so müſste natürlich den Candidaten die Gelegenheit geboten werden, die erworbenen Fähigkeiten auch bei dem Examen in die Wagschale zu legen. Eine besondere Prüfung brauchte dazu wohl nicht eingerichtet zu werden: Zeugnisse über erfolgreiche Teilnahme an praktischen Übungen (bei der darstellenden Geometrie auſserdem Vorlegung der angefertigten Zeichnungen) würden wohl dieselben Dienste thun, und es würde damit noch das weitere Gute erreicht werden, daſs die bei dem Examen selbst zu stellenden Anforderungen heruntergesetzt werden könnten. Kann aber von einer Prüfung nicht abgesehen werden, so muss, wie bereits Herr Weber hervorgehoben hat, der Vortragende zugleich wohl auch der Examinator sein.

Sich darüber eine Ansicht zu bilden, ob an Stelle eines der betrachteten beiden Fächer auch das dritte Fach der neuen Facultas, die technische Mechanik, zur Ergänzung der Vorbildung unserer Real- und Gymnasiallehrer herangezogen werden könnte, ist für den diesem Fache Fernestehenden naturgemäfs schwierig. Hat der Verfasser eine einigermafsen zutreffende Vorstellung von der Sache, so mufs er es für zweifelhaft halten, dafs theoretische, nicht durch Modelle und Maschinen erläuterte Vorlesungen über ein praktisches Fach viel gröfseren erzieherischen Wert haben können, als andere Vorlesungen theoretischen Inhalts, als Vorlesungen über theoretische Physik z. B. Jene Apparate sind aber bekanntlich sehr teuer. Aufserdem müfsten Räumlichkeiten und die nötigen litterarischen Hülfsmittel zur Verfügung gestellt werden. Endlich würde die Zahl der neu zu errichtenden Lehrstühle gröfser sein. Nicht alle Universitäten befinden sich in der günstigen Lage wie Göttingen, dafs ihnen die Regierung Lehrkräfte, Räume und litterarische Hülfsmittel bereitwilligst stellt, und private Stiftungen die Anschaffung der Apparate ermöglichen.

Wir kommen damit zu unserer zweiten Frage, der nach der Versorgung solcher Candidaten, die die angewandte Mathematik nicht nur zur Ergänzung ihrer theoretischen Studien betreiben, sondern die in diesem Fache eine Lehrthätigkeit ausüben wollen, und die also wohl vorzugsweise auf Anstellungen an technischen Mittelschulen rechnen. Es wäre wichtig, genauer zu wissen, welche Aussichten sich diesen Candidaten eigentlich eröffnen, und wie viele jährlich etwa gebraucht werden. Aber auch ohne solche Kenntnis kann man sagen, dafs gar nicht daran zu denken ist, dafs an allen Universitäten die nötigen Lehreinrichtungen geschaffen werden könnten. Bei beschränkten Mitteln kann ein Bedürfnis nur auf Kosten anderer befriedigt werden. Ist nun ein Lehrstuhl für ein dem sonstigen Unterrichtsbetrieb der Universitäten so fern liegendes Fach, wie die technische Mechanik, ein dringenderes Bedürfnis als etwa ein Lehrstuhl für physikalische Chemie? oder auch nur als ein weiterer Lehrstuhl für Chemie im engeren Sinne, da wo diese Wissenschaft, mit Einschlufs der pharmaceutischen Chemie, durch insgesamt zwei Professuren vertreten ist? Man braucht diese Fragen blofs aufzuwerfen, um sie zu verneinen.

Eine Universität wie Göttingen, die mit Lehrkräften und Lehrmitteln aufs reichste ausgestattet ist, mag immerhin ihrer philosophischen Facultät ein kleines Polytechnicum angliedern. Es ist das ein interessantes Experiment. Viele werden sich der neuen Entwickelung freuen und mit Spannung die wissenschaftlichen und praktischen Ergebnisse erwarten, die aus den unter so ungewöhnlichen Auspicien gegründeten Instituten gewifs hervorgehen werden.

Die andern Universitäten aber werden sich trotz der neuen Prüfungsordnung wohl der Mehrzahl nach nicht einmal den Wunsch erlauben dürfen, ein solches Beispiel im kleinen nachzuahmen. Sie werden aufserdem vielleicht der Ansicht sein, dafs nicht alle dasselbe thun müssen. Sollen sie das Notwendige zurücksetzen zu Gunsten des Entbehrlichen? Sollen sie längst hervorgetretene und dringende Bedürfnisse anderer Fächer zurückstellen zu Gunsten plötzlich aufgetauchter Forderungen einiger Mathematiker? Sollen sie auf einem kostspieligen Umweg herzustellen suchen, was sich auf ganz einfache Art erreichen läfst?*) Sind doch an den Technischen Hochschulen alle die Einrichtungen schon vorhanden, die an den Universitäten mit grofsen Kosten erst geschaffen werden müfsten. Die Technische Hochschule scheint uns in der That die zunächst in Aussicht zu nehmende Bildungsstätte für die Lehrer technischer Mittelschulen zu sein. Sie, die nicht wie die Gymnasial- und Reallehrer neben der Mathematik noch Physik als Hauptstudium wählen müssen, werden auch die nötige Zeit haben, die technischen Fächer mit hinreichender Intensität zu betreiben. Für sie würden also wahrscheinlich nicht einmal besondere Curse eingerichtet werden müssen. Dann könnte auch die neue Facultas aus der Prüfungsordnung der Universitäten wieder verschwinden, ohne dafs man sich graue Haare darüber wachsen zu lassen brauchte.

Wir müssen schliefslich nochmals auf das zu Eingang behandelte Thema zurückkommen. Wir hatten dort Competenz der Examinatoren als ein unerläfsliches Erfordernis bezeichnet. Die neuen Einrichtungen befolgen ein anderes Princip: Möglichst viele Fächer werden in einer Hand vereinigt, und sogar so heterogene Fächer wie darstellende Geometrie, technische Mechanik und Geodäsie (und wo möglich auch noch reine Mathematik). Es ist das sicher ein wirksames Mittel, um bis zu einem gewissen Grade den Übel-

*) So sieht in der That die Kehrseite der Denkmünze aus, auf deren Schaufläche zu lesen steht, dafs die Universitäten „eine durchgreifende Erweiterung nach der modernen Seite hin“ erfahren müfsten, unter „voller wissenschaftlicher Berücksichtigung aller Momente, die in dem hochgesteigerten Leben der Neuzeit als mafsgebend hervortreten“. (F. Klein, Gött. Physikalische Zeitschrift, Dec. 1899.) Unseres Erachtens werden die Bestrebungen, specifisch technische Fächer an den Universitäten einzubürgern, ganz von selbst an der Macht der Verhältnisse scheitern. Sie werden auch mit Hülfe von Prüfungsordnungen nicht durchzusetzen sein. Sie können aber eine andere Wirkung haben. Sie können nämlich dazu dienen, Gegensätze, die angeblich beseitigt werden sollen, noch zu verschärfen. Schwerlich wird die Sympathie unserer Techniker dadurch zu gewinnen sein, dafs auch für ihre Anstalten „die freieste und weitestgehende Entwickelung“ gefordert wird. Hat doch auch die Technische Hochschule wichtigere Aufgaben, als die, Einrichtungen der Schwesteranstalt nachzuahmen.

ständen zu steuern, die daraus hervorgehen, dafs Examinatoren von engem Gesichtskreis das eigene Fach überschätzen. Wir können aber nur schwer glauben, dafs diesen Mängeln auf gar keine andere Weise hätte abgeholfen werden können (vgl. die Anmerkung auf Seite 126). Uns scheint das Heilmittel noch schlimmer zu sein, als das Übel, dessen Bedeutung wir übrigens keineswegs verkennen. Incompetenz der Examinatoren, wie sie auch in dem zuletzt genannten Falle eine beinahe notwendige Begleiterscheinung der Einrichtung ist, steht im Widerspruch zu dem Zweck des Examens, und sie wirkt, wie gesagt, destructiv auf den Unterricht.

Wir fassen nun das Gesagte in einigen Thesen zusammen. Wir hoffen mit unseren Vorschlägen, denen wir lediglich der kürzeren Ausdrucksweise wegen eine möglichst bestimmte Fassung gegeben haben, die Discussion in engere Bahnen zu lenken und insofern Gutes zu wirken, als diese Vorschläge vielleicht Äufserungen anderer hervorrufen können. Vielleicht wird sich wenigstens über den einen oder anderen Punkt Einhelligkeit der Fachgenossen erzielen lassen, und diese würde dann — — vielleicht — — auch auf die Regierungen einigen Eindruck machen.

1. Die „allgemeine Bildung" ist aus der Prüfungsordnung zu streichen.

2. Als Examinatoren sind ausschliefslich solche Personen zu bestellen, deren Berufsthätigkeit eine möglichst hohe Gewähr dafür bietet, dafs sie den von ihnen zu prüfenden Gegenstand auch wirklich beherrschen.

3. Die Ämter des akademischen Lehrers und des Examinators sind möglichst in einer Hand zu vereinigen.*)

4. Es ist allen Studirenden der Mathematik Gelegenheit zu bieten, in mindestens einem der beiden Fächer Geodäsie und darstellende Geometrie eine von praktischen Übungen begleitete Unterweisung zu erhalten.**)

5. Es ist die Beschäftigung mit einem dieser beiden Fächer, nach Wahl des Candidaten, **in bescheidenem Umfang** obligatorisch zu machen für die künftigen Gymnasial- und Reallehrer der Mathematik, und es sind dafür in anderer Hinsicht die Anforderungen entsprechend herunterzusetzen.***)

---

*) Vgl. These 5 in Herrn Weber's Referat.

**) Vgl. These 2 bei Weber. — Unsere bestimmter gehaltene Forderung könnte zur Not durch Einstellung je eines Extraordinariats an einigen der preufsischen Universitäten befriedigt werden; und solche Ergänzung ist ohnehin in mehreren Fällen ein dringendes Bedürfnis.

***) Vgl. auch unsere These 1. — Könnte die angewandte Mathematik als ein für Mathematiker obligatorisches Nebenfach eingeführt werden, so

6. Die technische Mechanik ist nicht in das allgemeine Unterrichtsprogramm der Universitäten aufzunehmen.

7. Abgesehen von den Lehrern rein theoretischer Fächer sollten die Lehrer technischer Mittelschulen ihre Ausbildung im allgemeinen nicht an Universitäten, sondern an Technischen Hochschulen erhalten.

Der Inhalt dieser Vorschläge bleibt sehr weit hinter dem zurück, was nach dem Ergebnis der in München gepflogenen Erörterungen als wünschenswert bezeichnet werden müfste. (Vgl. die Thesen des Herrn H. Weber und die von der Redaction hinzugefügte Anmerkung.) Es werden daher möglicherweise manche Fachgenossen der Ansicht sein, dafs wir viel zu wenig für die angewandte Mathematik gethan wissen wollen. Diese möchten wir zu bedenken bitten, dafs die Regierungen in Anbetracht der Kosten wahrscheinlich anderer Meinung sein werden. Wir möchten sie ferner bitten, zu berücksichtigen, dafs nicht wenige Mathematiker die Ansicht haben werden, dafs die auf eine etwas ungewöhnliche Art eingeleitete Bewegung zu Gunsten der Anwendungen über das Ziel hinausgehen und der Pflege der mathematischen Wissenschaft bei uns, sowie der Entwickelung der Universitäten schaden werde, und dafs man daher dieser Bewegung eine solche Concession, wie wir sie in unserer fünften These vorgeschlagen haben, gar nicht machen dürfe. Und eine solche Besorgnis scheint uns mit nichten unbegründet. Wir alle, denen die Erziehung unserer studirenden Jugend anvertraut ist, haben darüber zu wachen, dafs die Entwickelung des Sinnes für Exactheit und Gewissenhaftigkeit im Denken und Arbeiten, die redlich gepflegt zu haben, den Stolz der deutschen Mathematiker bildet, nicht durch ein Zuvielerlei der Forderungen beeinträchtigt werde, und dafs wir unsere Jugend auch ferner im Gaufsischen Geiste werden erziehen können. Auf der Münchener Versammlung, wo übrigens die Discussion sehr eingeengt war, sind ja solche Befürchtungen nicht laut geworden. Aber die auf einer Naturforscherversammlung geäufserten Meinungen geben überhaupt kein vollständiges Bild von den im Kreise der Fachgenossen vertretenen Ansichten.

Wir haben bei unseren Darlegungen darauf hinweisen müssen, dafs die verschiedenartigen Verhältnisse an den einzelnen Universitäten

könnte in unserer These 5 der letzte Satz gestrichen werden. Aber eine solche Mafsregel würde sich mit den Forderungen des Schulunterrichts wohl selbst dann nicht vereinigen lassen, wenn gleichzeitig von den Mathematikern ein Zeugnis der oberen Stufe für Mathematik und Physik verlangt würde. Eine erhöhte Belastung der Mathematiker würde sich daraus übrigens nicht ergeben, wenn man es in bezug auf den Umfang des Studiums der angewandten Mathematik bei der Forderung der These 5 bewenden liefse.

eine individualisirende Behandlung nötig machen. Der Verfasser hat Gelegenheit gehabt, zu beobachten, dafs selbst im Kreise der Universisätslehrer nicht allgemein bekannt ist, bis zu welcher Gröfsenordnung solche Unterschiede gehen können. Wir lassen daher anhangsweise eine Zusammenstellung folgen, die zwei extreme Fälle zur Anschauung bringt. Die oberen Zahlen beziehen sich auf die Universität Göttingen, die unteren auf die Universität Greifswald. Um Mifsverständnissen vorzubeugen, bemerken wir, dafs bei Ausdehnung der Tafel auf andere Fächer die Zahlenverhältnisse sich nicht entfernt so ungünstig für die kleinere Universität stellen würden.

	Ordentl. Proff.	Aufserordentl. Proff.	Habilit. Assist.	Nicht habilit. Assist.	Nicht angestellte Privatdocenten
Mathematik	2 2	1 0	—	1 0	3*) 0
Astronomie, Geodäsie u. Geophysik	1 0	2**) 0	1***) 0	2 0	—
Theoret. u. Exp. Physik	2 1	0 1†)	2 0	1 2	0 1
Techn. Physik, Elektrotechnik	—	2††) 0	—	1 0	—
Physikalische Chemie	1 0	—	1 0	2 0	—
Chemie	1 2	2†††) 0	2 1	4 2	0 1
Summa	7 5	7 1	6 1	11 4	3 2

*) Ein Privatdocent für Versicherungsmathematik.
**) Ein aufseretatsm. P. E.
***) Observator.
†) Von Ostern 1900 ab nach längerer Vacanz wieder besetzt.
††) Ein aufseretatsm. P. E.
†††) Ein aufseretatsm. P. E.

Bericht betreffend die Discussion über die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen.*)

Nach Eröffnung der Sitzung durch den ersten Vorsitzenden der Naturwissenschaftlichen Hauptgruppe der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Herrn J. Wislicenus-Leipzig, erhält zunächst der stellvertretende Vorsitzende, Herr F. Klein-Göttingen, das Wort zu einer kurzen Vorbemerkung. Derselbe führt aus, dafs die Frage der Winkelteilung auf der vorjährigen Naturforscher-Versammlung zu Düsseldorf der von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung schon früher eingesetzten Tafelcommission, bestehend aus den Herren Prof. Dr. A. Börsch-Potsdam, Prof. Dr. L. Kiepert-Hannover, Prof. Dr. R. Mehmke-Stuttgart und Prof. Dr. W. Voigt-Göttingen zur Prüfung überwiesen worden sei. Der Gegenstand beanspruche das besondere Interesse derjenigen Wissenschaften, welche sich auf genaue Messungen und auf die rechnerische Praxis stützen. Inzwischen sei bekannt geworden, dafs die französische Regierung für das Jahr 1900 einen internationalen Congrefs einzuberufen beabsichtige, der über die Frage der Decimalteilung nicht nur der Winkelgröfsen, sondern auch der Zeitgröfsen beraten und beschliefsen solle. Behufs einer rechtzeitigen Stellungnahme diesen Fragen gegenüber habe die Deutsche Mathematiker-Vereinigung die Discussion über die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen auf das Programm der gegenwärtigen Versammlung gestellt, und um dieser Discussion, an der alle naturwissenschaftlichen Abteilungen mehr oder weniger lebhaft interessirt sind, die breiteste Grundlage zu geben, sei dieselbe in die gemeinsame Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe verlegt worden.

Auf den Vorschlag des Herrn Geh. Regierungsrats F. Klein wird die Besprechung in der Weise vollzogen, dafs zunächst Herr Prof. Dr. R. Mehmke-Stuttgart seinen Bericht Namens der Tafelcommission erstattet, der wesentlich den mathematisch-geodätischen Standpunkt vertritt, und dafs sich hieran die Darlegungen des von dem Vorstande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zur Vertretung des astronomischen und nautischen Standpunktes hinzugezogenen Herrn Prof. Dr. J. Bauschinger-Berlin und des die Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht vertretenden Herrn Oberlehrer Dr. Schülke-Osterode unmittelbar anschliefsen, ehe die Versammlung in die Debatte eintritt.

---

*) Auf Grund der authentischen Mitteilungen zusammengestellt von A. Gutzmer.

1. Bericht über die Winkelteilung,

im Namen der „Tafelcommission" der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (bestehend aus den Professoren A. Börsch-Potsdam, L. Kiepert-Hannover, R. Mehmke-Stuttgart und W. Voigt-Göttingen) erstattet

von **R. Mehmke** in Stuttgart.

In der letztjährigen Versammlung zu Düsseldorf ist auf den Vorschlag des Herrn A. Gutzmer-Jena der Tafelcommission, welche die Deutsche Mathematiker-Vereinigung vor zwei Jahren in der Versammlung zu Braunschweig gewählt hatte, die Frage der Winkelteilung zur Prüfung überwiesen worden.[1] Die Commission hat sich durch Zuwahl eines Geodäten, des Herrn A. Börsch-Potsdam, verstärkt, so dafs in dem folgenden Bericht aufser dem Standpunkt des Mathematikers und Physikers auch der des Geodäten zur Geltung kommen wird.

Bei der Feststellung des Programms für die Versammlung in München ist infolge gewisser Anregungen die Frage der Winkelteilung durch Einbeziehen der Teilung der Zeitgröfsen erweitert worden; dieser Bericht beschränkt sich aber auf die ursprüngliche Frage, weil die Zahl der Fälle, in denen Winkel- und Zeitgröfsen zusammen vorkommen, aufserordentlich zurücktritt gegen die Zahl derjenigen, in denen man mit Winkeln allein zu rechnen hat, und weil die Trigonometrie, die allgemeine Lehre von der Rechnung mit Winkelgröfsen, einen so wichtigen Teil der Mathematik bildet, dafs sie das Recht beanspruchen darf, die sie am nächsten berührende Frage der Winkelteilung von sich aus und nach ihren eigensten Bedürfnissen zu regeln.

Schon auf der Naturforscher-Versammlung zu Heidelberg 1889 ist in der Abteilung für Instrumentenkunde[2]) und in Bremen 1890 auf dem, der Naturforscher-Versammlung unmittelbar vorhergehenden zweiten Deutschen Mechaniker-Tage[3]) über die Winkelteilung, insbesondere über die Decimalteilung des rechten Winkels, verhandelt worden, wozu die Anregung von dem Director der Berliner Sternwarte, Herrn Geh. Reg.-Rat W. Foerster, ausgegangen war. Man fand damals, dafs die Förderung der Angelegenheit nicht von der Präcisionstechnik ausgehen könne, sondern den Vertretern der Wissenschaft und der rechnerischen Praxis überlassen bleiben müsse.

Einen Standpunkt zur Beurteilung der ganzen Frage gewinnt man durch folgende Betrachtung. In der Analysis werden Winkel stets in analytischem oder Bogen-Mafs angegeben, weil dann alle Formeln, in denen Winkelgrössen auftreten, z. B. die Reihenentwicklungen für die Kreisfunctionen, ihre einfachste Gestalt annehmen. Warum zieht man es in der Trigonometrie vor, die Winkel in Graden auszudrücken? Man könnte ja recht wohl bei den trigono-

metrischen Tafeln das Argument nach Teilen des Halbmessers fortschreiten lassen, wie es auch gelegentlich geschehen ist[4]), und die Schwierigkeiten, die Kreise der Winkelmefsinstrumente entsprechend einzuteilen, wären keine unüberwindlichen, aber da die Kreisfunctionen periodisch sind und die Tafeln keinesfalls mehr als eine Periode zu umfassen brauchen, so müfste man häufig die Periode 2π oder Vielfache derselben, also irrationale Zahlen, addiren und subtrahiren, welche Unbequemlichkeit wesentlich vermindert wird, wenn man 360 oder irgend eine andere einfache Zahl an Stelle von 2π setzt. Der Unterschied ist ein ähnlicher, wie zwischen den natürlichen Logarithmen und den sog. gemeinen Logarithmen mit der Basis 10.[5]) Niemand fällt es ein, die gewöhnlichen logarithmischen Rechnungen mit natürlichen Logarithmen auszuführen, weil bei ihnen die jeden Augenblick nötige Versetzung des Decimalcommas eine Addition oder Subtraction der irrationalen Zahl ln 10 oder eines Vielfachen derselben erfordert, bei den gemeinen Logarithmen dagegen nur die Änderung des ganzzahligen Teils, der sog. Charakteristik des Logarithmus. Der sich hier darbietende und in erster Linie mafsgebende Gesichtspunkt ist:

Man mufs von einer rationellen Winkelteilung verlangen, dafs bei ihr die trigonometrischen Rechnungen möglichst einfach und bequem werden und folglich eine möglichst grofse Sicherheit gegen Rechenfehler vorhanden ist.

Prüfen wir daraufhin die wichtigsten Arten der Winkelteilung, die bis jetzt vorgeschlagen worden oder schon länger im Gebrauche sind. Die Einteilung des vollen Winkels oder des ganzen Kreisumfanges in 360 Grade, des Grades in 60 Minuten, der Minute in 60 Secunden u. s. w., lange Zeit nahezu allein im Gebrauch und jetzt noch unbedingt vorherrschend, ist bekanntlich uralt und auf die Babylonier zurückzuführen. Wie dieselbe auch entstanden sein mag[6]), sie war so lange durchaus berechtigt, als alle anderen Einheiten, sogar der Tag[7]), der 60-Teilung unterworfen, bei allen wissenschaftlichen Rechnungen 60-teilige Brüche angewendet wurden und man statt der jetzt gebräuchlichen Kreisfunctionen Sinus, Cosinus u. s. w. allein die Sehne benutzte, also der Winkel von 60 Grad, dessen Sehne gleich dem Halbmesser ist, als natürliche Winkeleinheit erschien.[8])

Diese schöne Harmonie wurde bereits vor tausend Jahren gestört, als der arabische Astronom Albattânî den Sinus ausschliefslich und im bewufsten Gegensatz zur Sehne anwandte[9]); denn der rechte Winkel rückte damit (wie noch genauer gezeigt werden wird) zur wahren Winkeleinheit vor und hätte folgerichtig sexagesimal geteilt werden sollen. Der Zwiespalt wurde noch vergröfsert, als im 15. Jahrhundert Johann Müller (Regiomontanus) mit der Gewohnheit brach, die trigonometrischen Linien in Sexa-

gesimalteilen des Halbmessers auszudrücken[10]), und als seit dem Ende des 16. Jahrhunderts die Decimalbrüche mehr und mehr in Aufnahme kamen. Heutzutage, wo auf allen anderen Gebieten, von den Zeitgröfsen abgesehen, die decimale Teilung durchgeführt ist, hat die besprochene altehrwürdige Art der Kreisteilung, deren Unbequemlichkeiten beim Rechnen auf der Hand liegen, die innere Berechtigung, die ihr ursprünglich zukam, ganz verloren.

Es hat denn auch schon der erste Erfinder der Decimalbrüche, der Südniederländer Simon Stevin im Jahre 1585[11]), ja noch viel früher, in der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts — wie Herr Sigmund Günther entdeckt hat[12]) — ein deutscher Kosmograph, dessen Namen man nicht kennt, den Vorschlag gemacht, die Winkel decimal zu teilen; aber beide hielten noch an dem alten Grade, dem 90. Teile des rechten Winkels, also einer willkürlichen Einheit, fest. Im 17. Jahrhundert erschienen in England nicht weniger als vier logarithmisch-trigonometrische Tafeln in diesem System[13]), von dem einige es als Zufall ansehen und bedauern, dafs es nicht durchgedrungen ist[14]), und das auch in neuerer Zeit wieder Fürsprecher gefunden hat.[15])

Der Gedanke, den letzten Schritt in dieser Richtung zu wagen und den rechten Winkel bezw. den Quadranten decimal zu teilen, ist zuerst in Deutschland (1783) aufgetaucht und seiner Verwirklichung näher geführt worden[16]), weshalb die von Deutschen und Engländern zuweilen dafür gebrauchte Benennung „französische Teilung“ nicht ganz zutreffend erscheint. In Frankreich versuchte man zur Zeit der grofsen Revolution diese Neuerung im Anschlufs an das metrische System durchzuführen; aber man hatte wohl die entgegenstehenden Hindernisse unterschätzt, und es trat ein Rückschlag ein.[17]) Dennoch seit dem Anfang des Jahrhunderts in Baden, Frankreich und Hessen bei den Landesvermessungen angewendet[18]), ist die „neue Winkelteilung“ (wie die Decimalteilung des Quadranten bei uns am häufigsten genannt wird) jetzt in mehreren Ländern auch bei den Catastervermessungen amtlich entweder allein eingeführt (wie in Baden, Belgien, Frankreich, Hessen), oder wenigstens facultativ zugelassen (wie in Preufsen und Württemberg).[19]) Ihre Verbreitung hat namentlich im letzten Jahrzehnt, seitdem ausreichende Logarithmentafeln[20]) und andere Hülfsmittel für die Rechnung nach neuer Teilung[21]) vorhanden sind, erheblich zugenommen.[22])

Zu erwähnen ist noch, dafs Yvon Villarceau 1864 vorgeschlagen hat[23]), den ganzen Kreisumfang, Bouquet de la Grye dagegen 1896[24]), den halben Kreisumfang als Einheit zu nehmen und decimal zu teilen.

Wägen wir nun die Vorzüge und Mängel dieser verschiedenen Systeme gegen einander ab. Es ist klar, dafs eine aufserordentliche

Vereinfachung aller trigonometrischen Rechnungen schon dann herbeigeführt wird, wenn man überhaupt die zu Grunde gelegte Winkeleinheit decimal teilt, mag diese Einheit wie immer auch gewählt sein. Das Addiren und Subtrahiren von Winkeln, das Multipliciren und Dividiren derselben mit irgend welchen Zahlen wird bequemer, ebenso das Interpoliren bei Benutzung einer trigonometrischen Tafel, und die Interpolation wird dann für alle Tafeln einer Logarithmensammlung eine gleichmäfsige; endlich macht die Bestimmung von Bogenlängen und diejenige der Functionen kleiner Winkel mittelst der bekannten Hilfszahlen S und T weniger Mühe, weil Operationen, wie die Verwandlung von Graden in Minuten und Secunden, fortfallen.[25])

Aufser diesen, allen decimalen Winkelteilungen gemeinsamen Vorzügen hat die Decimalteilung des Quadranten noch ihre besonderen. Da die Kreisfunctionen alle Werte, deren sie fähig sind, (vom Zeichen abgesehen) innerhalb des ersten Quadranten annehmen und deshalb die Tafeln blofs diesen berücksichtigen, so hat man sehr häufig gegebene Winkel auf den ersten Quadranten zu reduciren. Es ist klar, dafs diese Reduction am einfachsten ausfällt, nämlich blofs in der Subtraction einer der Zahlen 1,2 oder 3 besteht (falls der Winkel nicht gröfser als $4R$ ist), wenn man den rechten Winkel zur Einheit genommen hat. Man kann dies eigentlich kaum eine Subtraction nennen; denn liegt der Winkel z. B. im dritten Quadranten, ist sein Ausdruck also von der Form $2{,}6513\,Q$ oder $2{,}6513\,R$, so braucht man nur die Ziffer 2 wegzulassen, um den entsprechenden Winkel $0{,}6513\,Q$ oder $0{,}6513\,R$ des ersten Quadranten zu erhalten.[26]) Die ebenfalls häufig nötige Addition und Subtraction von zwei Rechten geschieht in derselben einfachen Weise durch Addition bezw. Subtraction von 2. (Es ändert an der Sache wenig, wenn man, wie viele thun, den hundertsten Teil des Quadranten einen Centesimalgrad oder Neugrad[27]) nennt und alle Winkel in solchen Centesimal- oder Neugraden statt in Teilen des Quadranten oder des rechten Winkels ausdrückt.[28])) Bei der Nonagesimalteilung des Quadranten dagegen mufs man in diesen Fällen eine der Zahlen 90, 180, 270 addiren oder subtrahiren, was unbedingt weniger einfach ist und erfahrungsgemäfs leicht zu Rechenfehlern Anlafs giebt.[29]) Würden zwei Rechte oder vier Rechte als Winkeleinheit genommen, so würden an Stelle der eben genannten Zahlen 0,25; 0,50; 0,75 bezw. 0,5; 1; 1,5 treten. Diese Betrachtung zeigt deutlich, dafs der rechte Winkel die wahre Einheit ist, wofür sich auch noch andere Gründe angeben lassen.[30])

Die neue Winkelteilung gewährt zweitens den besonderen Vorteil, dafs man das Complement eines Winkels mit derselben Schnelligkeit und nach derselben Regel bilden kann, wie die sog. decadische Ergänzung eines Logarithmus, und dafs folglich, gerade wie beim loga-

rithmischen Rechnen, die Subtraction von Winkeln sich auf Addition zurückführen läfst.

Es hat sich ferner gezeigt, dafs die trigonometrischen Tafeln für neue Teilung eine bequemere und zweckmäfsigere Anordnung zulassen, als diejenigen für alte Teilung[31]), und endlich werden von den Geodäten noch Vorteile geltend gemacht, die beim Beobachten mit Winkelmefsinstrumenten neuer Teilung vorhanden sind.[32])

Als angebliche Mängel der neuen Winkelteilung werden folgende beiden angeführt: Erstens dafs die in der Geometrie häufig vorkommenden Winkel 30^0 und 60^0 sich in der unbequemen Form $33{,}333^g$ und $66{,}667^g$ darstellen, und die trigonometrischen Functionen dieser Winkel in den Tafeln mit neuer Teilung nicht einmal stehen. Diese Einwände können nicht ernsthaft genommen werden. Es steht doch nichts im Wege, in der Geometrie und anderwärts „ein drittels Rechter" und „zwei drittels Rechte" zu sagen bezw. $\frac{1}{3}R$ und $\frac{2}{3}R$ zu schreiben, wie das längst geschieht.[33]) Auch kommen diese Winkel bei trigonometrischen Rechnungen selten vor. Soll man etwa das metrische System deshalb wieder aufgeben, weil $\frac{1}{3}$ Meter sich nicht glatt in Centimetern und Millimetern ausdrücken läfst, oder aufhören, mit Decimalbrüchen zu rechnen, weil $\frac{1}{3}$ und viele andere einfachen Brüche unendliche Decimalbrüche geben? Wer diese kleinen Unbequemlichkeiten als bedeutende Mängel empfindet, sollte sich darüber beklagen, dafs alle Völker das decadische Zahlensystem benutzen, und nicht etwa ein Zahlensystem mit der Basis 12, oder gar, wie die Gelehrten im alten Babylon, das sexagesimale Zahlensystem. Was dann den Vorwurf betrifft, dafs in den trigonometrischen Tafeln nach neuer Teilung die Functionen der genannten Winkel nicht unmittelbar zu finden sind, so könnte man mit demselben Recht es als einen Mangel der gemeinen Logarithmen bezeichnen, dafs die Logarithmentafeln den Logarithmus von e, der Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, nicht ohne weiteres enthalten. Hier hat eben die Sammlung constanter Zahlenwerte, wie sie am Schlusse einer jeden Logarithmentafel sich findet, einzutreten. Zweitens wird zuweilen behauptet, die alte Winkelteilung hätte bei der Herstellung und Prüfung von Winkelmefsinstrumenten gewisse Vorzüge. Von Fachleuten wird dies verneint.[34])

So ist denn die Decimalteilung des Quadranten ohne Frage die rationellste Winkelteilung. Der allgemeinen Einführung derselben steht in der reinen Mathematik[35]) wie auch in der Geodäsie und Physik[36]) nichts im Wege.[37])

Anmerkungen.

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 7. Bd., 1. Heft S. 6.

2) S. Zeitschrift für Instrumentenkunde, 9. Jahrgang 1889, S. 355—357,

475—476. (Weniger vollständige Darstellung im Tageblatt der 62. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Heidelberg, 1889, S. 717 bis 718.)

3) S. Zeitschrift für Instrumentenkunde, 10. Jahrgang 1890, S. 417—418.

4) Vergl. W. Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen, Berlin 1890, S. 58—61.

5) Die Ähnlichkeit beruht darauf, dafs die Winkel als imaginäre Logarithmen dargestellt werden können, und ist von J. Hoüel im Archiv der Mathematik und Physik, 40. Teil, 1863, S. 200 flg. und in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 1. Jahrgang, 1866, S. 86 flg., weiter verfolgt worden.

6) Vergl. etwa M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Bd., 1880, S. 83—84; R. Wolf, Geschichte der Astronomie, 1877, S. 109—110.

7) Vergl. M. Cantor, Vorles. üb. Gesch. der Mathemat., 1. Bd., S. 82—83.

8) S. wegen dieser Auffassung z. B. J. W. L. Glaisher, Report on mathematical tables (from the Report of the British Association for 1873), Art. 10, p. 41. Noch im Mittelalter wurden bisweilen 60° zu einer höheren Einheit zusammengefafst, z. B. in den (aus der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts stammenden) Alfonsinischen Tafeln, sowie (1515) von Johannes Schindel — nach seinem Geburtsort Schwäbisch Gmünd gewöhnlich Johannes de Gamundia oder Johann von Gemunden genannt (vergl. M. Curtze, Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, Bd. 42, Supplement, S. 33, Anm. 4. 1898) —, der dafür die Bezeichnung signum physicum anwandte. (Häufiger scheint allerdings die noch in diesem Jahrhundert vorkommende Zusammenfassung von 30° zu einem signum, entsprechend einem Zeichen des Tierkreises, gewesen zu sein.) Vgl. M. Cantor, Vorlesungen, 2. Bd., 1892, S. 163.

9) M. Cantor, Vorlesungen, 1. Bd., S. 632—633.

10) M. Cantor, Vorlesungen, 2. Bd., S. 251—252. Merkwürdigerweise sind Rückfälle sogar aus diesem Jahrhundert zu verzeichnen, indem — nach Glaisher, a. a. O. 8), p. 87 — Beverley etwa 1833 trigonometrische Tafeln (die nach seinem Tode herausgegeben wurden) für den Radius 60′ berechnete und die trigonometrischen Linien in Minuten, Secunden und Decimalteilen von Secunden ausdrückte.

11) In demselben Werke, in welchem Stevin seine Erfindung zuerst ankündigte. Es erschien in Leyden holländisch unter dem Titel „De Thiende . . .“, und im gleichen Jahre in französischer Übersetzung unter dem Titel „La Disme“. Die betreffende Stelle, Art. V, findet man abgedruckt bei Glaisher a. a. O. 8), p. 172—173.

12) S. Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie, 4. Heft, Analyse einiger kosmographischer Codices der Münchener Hof- und Staatsbibliothek, Halle a. S. 1878, S. 249. Der unbekannte Verfasser des betreffenden Tractates hat diese Art der Winkelteilung bei Längen- und Breitenangaben selbst angewendet, z. B. die Länge von Köln mit 118 Grad 70 Minuten angesetzt (s. a. a. O. S. 258).

13) Nämlich die von H. Briggs berechneten 14-stelligen (teilweise 10- bezw. 15-stelligen) Tafeln am Schlusse der von Gellibrand herausgegebenen Trigonometria Britannica, Goudae 1633, die 10-stelligen Tafeln von Roe 1633, die 6- bezw. 7-stelligen von Oughtred 1657 und die 8-stelligen von John Newton 1658, vergl. Glaisher a. a. O. 8), p. 66 und 124, 119, 118.

14) Vgl. M. Cantor, Vorlesungen, 2. Bd., S. 678, Absatz 2.

15) Z. B. J. W. L. Glaisher (a. a. O 8), p. 64, Anm.) und A. Schülke („Zur Decimalteilung des Winkels“, Zeitschr. f. mathemat. u.

naturw. Unterricht, 27. Jahrg., S. 339—344, 1896). C. Bremiker hat zwar eine 5-stellige und eine 4-stellige Tafel für Decimalteilung des alten Grades herausgegeben und sagt in der Einleitung zu ersterer Tafel, deren erste Auflage 1872 in Berlin erschienen ist, dafs er damit der „neuen Richtung“ gefolgt sei, „welche mit Recht darin eine Erleichterung erstrebt, in jeder Art von Mafs nur eine Einheit zu haben“, aber er gesteht offen, dafs er weiter gegangen wäre („eine systematische Teilung des Kreises kann nur durch eine radicale Beseitigung der alten Teilung herbeigeführt werden“, vergl. auch Anm. 23), wenn er den Mut dazu gefunden hätte.

16) Es wird dies auch von Franzosen, z. B. Hoüel a. a. O. 5), anerkannt. Die erste Nachricht über die Decimalteilung des Quadranten findet man in dem „Taschenbuch . . .“ von Joh. Carl Schulze, 2. Heft, „Dreyeck-Messkunst“, Berlin 1783, S. 267 ff. Schulze (der 1790 in Berlin als Geh. Oberbaurat gestorben ist) hatte gröfsere logarithmisch-trigonometrische Tafeln alten Systemes herauszugeben beabsichtigt, wurde aber durch den damaligen Director der mathematischen Classe der Berliner Akademie der Wissenschaften (der Schulze selbst als Mitglied angehörte), J. L. Lagrange, veranlafst, nach dem Beispiel von Briggs den Grad decimal zu teilen. In der Vorrede zu Schulze's „Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer . . . Tafeln“, Berlin 1778, vorläufig angekündigt, waren diese Tafeln — sie enthielten die Zahlenwerte und die Logarithmen der trigonometrischen Functionen für jedes Tausendtel eines alten Grades mit 7 Stellen — schon druckfertig, „als Herr Director de la Grange ... auf den Gedanken fiel, dafs dergleichen Tafeln ohnstreitig noch einfacher im Gebrauche werden müfsten, wenn man auch die Eintheilung der Kreisbogen nach Graden abschaffte, und den Viertheil eines Kreises oder den rechten Winkel, ebenso wie den Halbmesser, nach zehntheiligen Brüchen zerfällte“. „Da mir die Sache“, fährt Schulze fort, „hierdurch nun wirklich ihre gröfste Geschmeidigkeit erlangt zu haben scheint, so habe ich auch gern meine völlig fertigen Tafeln wieder zurückgenommen und wünsche nichts mehr, als den Gedanken des Herrn de la Grange ausgeführt zu sehen. Wir werden hierin den Alten ähnlicher werden, welche, da sie einmal die sechzigtheilige Eintheilung vorgezogen hatten, auch Kreisbogen und Halbmesser darnach zerfällten, wo wir hingegen, weil heutzutage unstreitig die zehntheilige Eintheilung den Vorzug erhalten hat, auch darnach billig sowohl den Halbmesser als die Kreisbogen eintheilen sollten.“ Schulze gab dann in dem erwähnten Taschenbuch, Heft 2, §§ 124 ff., eine ausführliche Anleitung, wie derartige Tafeln mit Hilfe Euler'scher Formeln berechnet werden könnten. Er schliefst diese Anleitung S. 290 mit „dem feurigen Wunsche, bald fleifsige Mitarbeiter zu einem für die angewandten Theile der Mathematik so nützlichen Unternehmen zu finden“, und verspricht, selbst, so viel ihm möglich sei, zur Richtigkeit und Vollständigkeit dieser neuen Tabellen beizutragen. Ein Prof. Schmidt an der Realschule in Berlin folgte dieser, in so lebhaften Worten gegebenen Anregung und begann 1785 einen trigonometrischen Kanon für jedes Zehntausendtel des Quadranten zu berechnen. (Vergl. die Einleitung zu Hobert und Ideler's neuen trigonometrischen Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten, Berlin 1799, S. XVII.) Um nach dem Vorschlage von Schulze die Euler'schen Formeln anwenden zu können, berechnete er zunächst die 12 ersten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis 5000, wozu er vier Jahre gebrauchte. (Nebenbei bemerkt ist es bedauerlich, dafs diese Potenztafel, die noch jetzt grofsen Wert hätte, nicht gedruckt worden und noch dazu ganz verschollen ist. Eine von J. W. L. Glaisher berechnete und 1874 stereotypirte, aber noch nicht veröffentlichte Tafel derselben Art geht nur bis 1000.) Lagrange hatte inzwischen (1787) seine Stellung in Berlin aufgegeben und war nach

Paris übergesiedelt. Von den trigonometrischen Tafeln hatte Prof. Schmidt erst einen Teil berechnet, als er 1791 zum Rector des Gymnasiums in Schwerin ernannt wurde und sich dadurch gezwungen sah, sein Unternehmen, dem er (nach den Worten von Hobert und Ideler) „mit wahrer Leidenschaft in einem Zeitraume von sechs bis sieben Jahren fast all seine Kräfte gewidmet hatte", ganz aufzugeben. Im Jahre 1794 schickte Schmidt seine unvollendete Arbeit im Manuscript an die mathematische Classe der Berliner Akademie, welche sie „mit vielem Beifall" aufnahm. J. E. Bode, Astronom und Mitglied der Akademie, setzte Schmidt's Berechnungen fort mit dem Entschlufs, die ersten trigonometrischen Handtafeln für decimale Teilung in Deutschland erscheinen zu lassen, gab jedoch aus unbekannten Gründen seine Absicht auf, nachdem er um eine Unterstützung bei der Akademie eingekommen war (s. Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1798, Berlin 1795, S. 212—216), veröffentlichte aber wenigstens (1795, a. a. O. S. 217—223) 7-stellige, nach halben Centesimalgraden fortschreitende Tafeln der trigonometrischen Functionen und ihrer Logarithmen — bis zur Berechnung der letzteren war Schmidt nicht mehr gekommen — nebst einer 6-stelligen Verwandlungstafel von Sexagesimalgraden u. s. w. in Decimalgrade. Schmidt nahm dann sein Manuscript von der Berliner Akademie zurück und gab es seinen Freunden Joh. Phil. Hobert (Prof. der Mathematik und Physik an der preufsischen Militär-Akademie des Artilleriecorps) und Ludw. Ideler (Astronom der preufsischen Akademie der Wissenschaften) zur Aufbewahrung. Letztere wurden hierdurch mit der Sache bekannt, begeisterten sich dafür und berechneten — nach zweckmäfsigeren Methoden, als Schulze vorgeschlagen hatte, und ohne Benutzung der Schmidt'schen Vorarbeiten — in $1\frac{1}{2}$ Jahren neue Tafeln, die unter dem oben genannten Titel 1799 zu Berlin als die ersten ausführlicheren Tafeln dieser Art im Druck erschienen. Sie sind (ebenso wie die Einleitung, in welcher das bei der Berechnung angewandte Verfahren auf das genaueste beschrieben ist) in mancher Hinsicht noch jetzt wertvoll.

17) Es ist eine verbreitete Meinung, die Begründer des metrischen Systemes hätten in einem zu weit gehenden Bestreben, zu verallgemeinern und alles Erdenkliche der Decimalteilung zu unterwerfen, letztere auch bei den Winkelausdrücken durchsetzen wollen, statt sich mit deren strenger Durchführung bei den Mafsen und Gewichten zu begnügen. In Wahrheit bildet jedoch die Decimalteilung des Quadranten nicht eine willkürliche Zugabe, sondern eine wesentliche Voraussetzung des metrischen Systemes, weshalb es nichts weniger als folgerichtig gewesen ist, wenn man in so vielen Ländern das metrische System ohne die Decimalteilung des Quadranten angenommen hat. Die Erwägungen, von welchen sich die betreffende Commission bei ihren, dem französischen Nationalconvent gemachten Vorschlägen hat leiten lassen, sind von P. S. Laplace in seiner Exposition du système du monde (p. 72—75 der 3. Auflage, Paris 1808) ausführlich dargelegt worden. (In dieser Beziehung weniger eingehend ist der „Rapport fait à l'Académie des Sciences, sur le choix d'une unité de mesures, par M. M. Borda, Lagrange, Laplace, Monge & Condorcet", vom 19. März 1791, Histoire de l'Ac. des Sc., année 1788, Paris 1791, p. 7—16, und der „Rapport fait à l'Académie des Sciences, sur le système général de Poids et Mesures, par les Citoyens Borda, Lagrange et Monge", Histoire de l'Ac. des Sc., année 1789, Paris 1793, p. 1—18.) Nachdem man sich dafür entschieden hatte, die lineare Mafseinheit nicht von der Pendellänge, sondern von der Länge des Erdmeridianes abzuleiten, wünschte man die nautischen Mafse mit den astronomischen in Einklang zu bringen, wozu nötig war, als fundamentale Einheit einen aliquoten Teil des Erdmeridians zu wählen, welcher einer Einteilung des Kreises entsprach. „Ainsi le choix du mètre fut reduit à celui

de l'unité des angles. L'angle droit est la limite des inclinaisons d'une ligne sur un plan, et de la hauteur des objets sur l'horizon: d'ailleurs, c'est dans le premier quart de la circonférence, que se forment les sinus et généralement toutes les lignes que la trigonométrie emploie et dont les rapports avec le rayon ont été reduits en tables; il était dont naturel de prendre l'angle droit pour l'unité des angles et le quart de la circonférence pour l'unité de leur mesure. On le divisa en parties décimales et pour avoir des mesures correspondantes sur la terre on divisa dans les mêmes parties le quart du meridien terrestre." Also die Übereinstimmung der metrischen Seemeile, des Kilometers (welcher Name übrigens damals noch nicht gebraucht wurde) mit der centesimalen Bogenminute des Erdmeridians war es, worauf man besonderen Wert legte. Die berühmte Gradmessung von Dünkirchen bis Barcelona, welche zum Zweck der Bestimmung der genauen Länge des Meters 1792 und in den folgenden Jahren von Méchain und Delambre vorgenommen wurde, gab Gelegenheit, die neue Kreisteilung praktisch zu erproben, indem drei der vier benutzten Borda'schen Repetitionskreise mit dieser Teilung versehen waren (vergl. Anm. 32). Laplace verwendete aufser in dem oben genannten Werke namentlich in seinem Traité de Mécanique céleste (T. I Paris 1799, t. V Paris 1825) ausschliefslich die neue Teilung (wie auch die decimale Teilung des Tages). Bouvard veröffentlichte im Jahre 1808 astronomische Tafeln decimalen Systemes (Nouvelles Tables de Jupiter et de Saturne, calculées d'après la théorie de M. Laplace, et suivant la division décimale de l'angle droit). Als Werke von Zeitgenossen, in denen ebenfalls die neue Winkelteilung angewandt ist, seien erwähnt: A. M. Legendre, Éléments de Géométrie (7. édit. Paris 1808, s. namentlich p. 328ff.); S. F. Lacroix, Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie (nach der 7. Aufl. ins Deutsche übersetzt von L. Ideler, Berlin 1822); L. Puissant, Traité de Géodésie (2e édit. Paris 1819); ferner de Fleurieu, Application du système métrique décimale à l'hydrographie et aux calculs de la navigation, Paris an VIII (1800); du Bourguet, Traité de navigation, Paris 1808 (enthält u. a. eine Tafel der atmosphärischen Refractionen in neuer Winkelteilung). Natürlich ist man auch in Frankreich frühzeitig bestrebt gewesen, dem Bedürfnis nach logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für die neue Teilung zu genügen. Borda soll (nach Hoüel, s. Anm. 5) die Berechnung der seinigen, welche 1801 revidirt und ergänzt von Delambre veröffentlicht wurden, schon 1792 beendigt gehabt haben (nach anderen erst 1795); Callet hat schon 1795 der 2. Auflage seiner Logarithmensammlung trigonometrische Tafeln für centesimale Teilung beigegeben, die aber wegen zu geringer Ausdehnung für die Praxis noch wenig geeignet waren (vergl. wegen dieser und späterer Tafeln Anm. 20). Berühmt sind die „Grandes tables trigonométriques décimales du Cadastre", welche im Bureau du Cadastre unter Leitung seines Directors Prony infolge eines 1794 von der französischen Regierung erteilten Auftrages innerhalb zweier Jahre (nach einer andern Angabe in der Zeit von 1794—1799) berechnet wurden. Man hatte von Prony ausdrücklich verlangt, „non seulement à composer des tables qui ne laissassent rien à desirer quant à l'exactitude, mais à en faire le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui eût jamais été exécuté ou même conçu". und es darf gesagt werden, dafs er diese Aufgabe glänzend gelöst hat. (Vergl. Prony, Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques ...., lu le 1er germinal an 9 [22. März 1801], Mémoires de l'Institut national des sciences ..., t. 5, Paris an XII, p. 49—55; ferner ebenda, p. 56—66 den Rapport sur les grandes tables ..., welchen Delambre im Namen einer Commission, zu

der noch Lagrange und Laplace gehörten, am 11. germinal an 9 erstattete, und worin die bei der Berechnung angewandten Methoden auseinandergesetzt sind). Prony, dem seitens der republicanischen Regierung bedeutende Mittel zur Verfügung gestellt waren, teilte seine Rechner in drei Sectionen: Die erste wurde von 5—6 hervorragenden Mathematikern, worunter Legendre, gebildet und hatte sich mit dem analytischen Teil der Aufgabe, mit der Aufstellung der geeignetsten Formeln und der Berechnung einiger fundamentalen Werte zu beschäftigen; die zweite Section bestand aus 7—8 Rechnern, welche in der Analysis bewandert waren und aus den allgemeinen Formeln die Ausgangswerte und deren Differenzen berechnen und die von der dritten Section gelieferten Rechnungen prüfen mufsten; die dritte Section zählte 60—80 gewöhnliche Rechner ohne mathematische Bildung. Die Arbeit jeder Section wurde doppelt (mit verschiedenen Formeln in den beiden ersten Sectionen) ausgeführt, weshalb zwei Manuscripte (von je 17 Bänden Grofs-Folio) vorhanden sind, das eine in der Bibliothek des „Observatoire", das andere, welches bis 1858 sich im Besitze von Prony's Erben befunden hatte, in der Bibliothek des „Institut". (S. die Mitteilungen von Biot, Elie de Beaumont, Le Verrier und Lefort in den Comptes rendus der Pariser Akademie, t. 46, 1858, p. 911—912, 994—999; die neuere, sich an diese Tafeln knüpfende Litteratur — sie sind namentlich von Lefort auf ihre Genauigkeit geprüft worden — kann hier übergangen werden.) Abgesehen von den hier nicht in Betracht kommenden Logarithmen der natürlichen Zahlen und verschiedenen Hilfstafeln enthalten die „Tables du Cadastre" (nach Prony's Angabe, s. oben): 1) die Zahlenwerte der sin für jedes 10000-tel des Quadranten, mit 25 Stellen und 7 oder 8 Differenzen berechnet, um mit 22 Stellen und 5 Differenzen gedruckt zu werden; 2) die log sin für dieselben Intervalle mit 14 Stellen und 5 Differenzen berechnet; 3) die log der Verhältnisse der sin zu den arc für die 5000 ersten 100000-tel des Quadranten mit 14 Stellen und 3 Differenzen berechnet; 4) die Verhältnisse der log tang zu den log sin und 5) die log der Verhältnisse der tang zu den arc in demselben Umfange wie 3). Die log sin und log tang sollten mit 12 Stellen und 3 Differenzen veröffentlicht werden. Ungefähr zwei Drittel der Tafeln waren gesetzt und 100 Platten stereotypirt, als infolge der plötzlichen Entwertung des Papiergeldes die Arbeit eingestellt werden mufste. Ein hervorragendes Mitglied (Blagden?) des Board of Longitude in London machte 1819 (oder 1820 nach andern Angaben) im Auftrage der englischen Regierung dem Bureau des Longitudes in Paris den Vorschlag, einen Auszug aus diesen Tafeln auf gemeinschaftliche Kosten Englands und Frankreichs zu drucken, und die englische Regierung erbot sich, für diesen Zweck 5000 £ vorzuschiefsen: aber das Anerbieten wurde abgelehnt. (Vgl. Lefort a. a. O.; Ch. Babbage, Economy of machinery and manufactures, London 1832, französische Übersetzung von Éd. Biot, 2e édit. Paris 1834, p. 252; Glaisher a. a. O. Anm. 8, p. 57.) Die 1891 von dem französischen Service géographique de l'Armée herausgegebenen achtstelligen Logarithmentafeln (s. Anm. 20) sind ein Auszug aus den Tables du Cadastre. Wenn trotz dieser vielversprechenden Anfänge die neue Winkelteilung auch von der Mehrzahl der französischen Gelehrten bald wieder verlassen worden ist, so darf man nicht vergessen, dafs dem gesamten metrischen System (dessen Gebrauch, abgesehen von der Winkel- und Zeitteilung, in Frankreich erst 1840 obligatorisch wurde) ein ähnliches Schicksal gedroht hat, wofür die Gründe wesentlich politischer Natur waren. (Vergl. de Rey-Pailhade, Anm. 23, p. 6: „Le maître de la France d'alors, Bonaparte, premier consul, trouvant que ces réformes rappelaient trop la Révolution, fit faire machine en arrière, à tel point que le système métrique décimal tout entier faillit sombrer.")

18) Wegen Baden und Hessen vergl. W. Jordan und K. Steppes, Das deutsche Vermessungswesen, 1. Bd., Stuttgart 1882, S. 272 u. 286. (In Baden begann die eigentliche Triangulation 1820, nachdem 1812 bis 1814 die ersten Versuche stattgefunden hatten. In Hessen wurde 1819 die Triangulation begonnen, nachdem 1809 die Basis Darmstadt-Griesheim gemessen worden war, vergl. General-Bericht über die mitteleuropäische Gradmessung für d. Jahr 1864, Berlin 1865, S. 15—16.) In Frankreich ist seit 1818 die Decimalteilung des Quadranten die einzig gebräuchliche in der höheren Geodäsie, auch für die geographischen Coordinaten (vgl. L. Puissant, Nouvelle description géométrique de la France, Paris 1832—1853; Berthaut, La carte de France 1750—1898, Étude historique, t. I, Paris 1898). In Belgien ist ebenfalls für die Dreiecksmessungen I. Ordnung (durch das Institut cartographique militaire, früher Dépôt de la Guerre) die neue Teilung von Anfang an eingeführt worden. (Die Veröffentlichungen beginnen 1851, meist unter dem Titel: Triangulation du royaume de Belgique.)

19) In Baden wurde sofort bei Beginn der heutigen Cataster-Vermessungen, um 1852, die neue Teilung ausschliefslich eingeführt. In Belgien und Frankreich ist die Einführung der neuen Teilung in das Cataster gleichzeitig mit derjenigen in die Landesvermessung erfolgt, in Hessen 1824 (vergl. „Die Catastervermessungsarbeiten im Grh. Hessen", Darmstadt 1897). Preussen: Dafs die neue Teilung facultativ zugelassen ist, geht aus mehreren Stellen, z. B. auf S. 12 und 16 der „Anweisung vom 25. October 1881 für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuercatasters (Berlin 1881) hervor. Württemberg: In der technischen Anweisung für die Arbeiten zur Erhaltung und Fortführung der Flurkarten und Primärcataster ist in § 10 gesagt: „Die Winkel können in neuer Teilung (n. T.), den rechten Winkel (R) zu 100°, oder in alter Teilung (a. T.), den rechten Winkel zu 90°, gemessen und angegeben werden." Jedoch sind die in der „Technischen Anweisung" enthaltenen Zahlenbeispiele alle in neuer Teilung ausgedrückt, und auf dem kgl. württembergischen Catasterbureau wird (zufolge mündlicher Mitteilung seines jetzigen Vorstandes, des Herrn Oberfinanzrat W. Schlebach) ausschliefslich neue Teilung angewendet. — Beim italienischen Cataster ist die neue Teilung ebenfalls zugelassen; man findet dieselbe z. B. in staatlichen Prüfungsaufgaben angewendet (vergl. Rivista di topografia e catasto, vol. IX, 1896/97, p. 64; vol. X, 1897/98, p. 15).

20) Die gedruckten älteren Tafeln für Decimalteilung des Quadranten sind: 1) J. E. Bode, Astronom. Jahrbuch f. d. Jahr 1798 . . ., Berlin 1795, S. 217—223. (7-stellige Zahlenwerte u. Logarithmen der trigonometrischen Functionen für jeden halben Centesimalgrad des Quadranten.) — 2) Fr. Callet, Tables portatives de logarithmes . . ., Paris 1795. (7-stellige Logarithmen der trigonom. Functionen von Minute zu Minute n. T., 14-stellige Zahlenwerte u. Logarithmen der Function sin von 10 zu 10 Min. n. T.) — 3) Joh. Ph. Hobert und L. Ideler, Neue trigonometrische Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten, Berlin 1799. (Einander gegenüberstehend die 7-stelligen Zahlenwerte und Logarithmen der trigonometrischen Functionen für jedes Zehntausendtel des Quadranten, bei den Winkeln bis 0,03 Q für jedes Hunderttausendtel.) — 4) Ch. Borda-J. B. J. Delambre, Tables trigonométriques décimales . . ., Paris an IX (1801). (Log sin, tg, sec 7-stellig von Minute zu Minute n. T., log sin, tg 11-stellig von 10 zu 10 Minuten n. T.) — 5) Ch. Plauzoles, Tables de Logarithmes . . ., Paris 1809. (6-stellige Logarithmen der trigonom. Functionen für jedes Zehntausendtel des Quadranten.) — Von den obigen Tafeln ist die letztere — 1830 in 4. Stereotyp-Auflage erschienen, aber

jetzt vergriffen — schon ganz bequem zu gebrauchen. — Aus neuerer Zeit sind zu nennen: 6) J. Hoüel, Recueil de formules et de tables numériques, Paris 1866. (Zahlenwerte und Logarithmen der trigonom. Functionen, 3-stellig für jedes Hundertel, 4-stellig für jedes Tausendtel des Quadranten; die Zahlenwerte allein 10-stellig für jedes Hundertel des Quadranten.) — 7) F. G. Gaufs, Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten, Berlin 1873. (Logarithmen der trigonom. Functionen 5-stellig von Minute zu Minute n. T., Zahlenwerte derselben 4-stellig von 10 zu 10 Minuten n. T.) — 8) F. G. Gaufs, Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel für Decimaltheilung des Quadranten, Berlin 1873. (Logarithmen der trigonom. Functionen von 10 zu 10 Minuten n. T.) — 9) H. Gravelius, Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten, Berlin 1886. (Umfang im ganzen wie bei den Tafeln von Gaufs, Nr. 8, sehr ausführliche Umwandlungstafeln.) — 10) J.-L. Sanguet, Tables trigonométriques centésimales, Paris 1889. (5- und 4-stellig, enthält auch centesimale astronomische Tafeln.) — 11) Service géographique de l'Armée, Tables trigonométriques centésimales à cinq décimales . . ., suivies des mêmes tables à quatre décimales, Paris 1889. (Enthält, wie einige der oben genannten Sammlungen, auch Tafeln für alte Winkelteilung, aber auf unangenehm blauem Papier!) — 12) Service géographique de l'Armée, Tables des logarithmes à huit décimales . . ., Paris 1891. (8-stellige Logarithmen der trigonometrischen Functionen, nur für neue Teilung, von 10 zu 10 Secunden n. T.) — 13) H. Gravelius, Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten . . ., Berlin 1892. (Zahlenwerte und Logarithmen der trigonom. Functionen von 10 zu 10 Minuten n. T.) — 14) W. Jordan, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (centesimale) Teilung mit sechs Decimalstellen, Stuttgart 1894. (Von 0—20 Neugrad ist das Intervall 10 Neusecunden, von da an 1 Neuminute; enthält auch die log sin für jeden Grad n. T. mit 15 Stellen.) — Bei den obigen Angaben ist der etwaige sonstige Inhalt der betreffenden Sammlungen an Tafeln der Logarithmen der natürlichen Zahlen, Umwandlungstafeln u. s. w. unberücksichtigt gelassen. Die von W. Jordan nach dem „Opus palatinum" von 1596 und unter diesem Titel herausgegebenen 7-stelligen Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10″ zu 10″ sind seitlich mit einem besonderen Eingang für neue Teilung versehen, können also auch für letztere gebraucht werden. So ist denn gegenwärtig, was die neue Winkelteilung betrifft, auch für die weitgehendsten Bedürfnisse gesorgt (s. auch Anm. 21). Von der Decimalteilung des alten Grades kann dies in keiner Weise gesagt werden, da die in Anm. 13 genannten englischen Tafeln aus dem 17. Jahrhundert äufserst selten sind und den heutigen Anforderungen nicht entsprechen, während es an neueren Tafeln dieser Art aufser den 4- und 5-stelligen von Bremiker Anm. 15, nur 5-stellige von F. A. Westrick (Münster 1892), sowie 4-stellige von Rohrbach (Gotha 1893) und A. Schülke (Leipzig 1895) giebt.

21) Wir haben hier z. B. Tafeln zum Gebrauch der Feldmesser, insbesondere bei der Anwendung der Tachymetrie, im Auge und nennen: 1) D. W. Ulffers, Tafeln zur Berechnung von Dreiecks-, Vierecks- und Polygon-Netzen ohne Logarithmen, 4. Aufl. Koblenz 1870. (Werte von $r : \sin\varphi$, $r \cos\varphi$, $r \sin\varphi$ für $r = 10, 20, \ldots 90$ und nach Minuten n. T. fortschreitend mit 4—6 geltenden Ziffern; auch für alte Teilung zu gebrauchen.) — 2) F. M. Clouth, Tafeln zur Berechnung goniometrischer Coordinaten für neue Teilung, Halle a. S. 1871. (Enthält die natürlichen sin und cos mit 6 Stellen und ihre 9 ersten Vielfachen mit 4 Stellen für jede Neuminute des Quadranten. Das Argument ist nebenbei auch in

alter Teilung ausgedrückt.) — 3) V. Soldati, Tavolo tacheometriche . . ., 3a ediz., Bologna 1888. (Sie geben $g \sin v$ und $g \sin v \cos v$ für die Werte von v von 10 zu 10 Secunden n. T. und verschiedene Werte von g.) — 4) G. Orlandi, Manuale e tavole di celerimensura, Milano 1889. (Enthalten die Werte $C \sin 2\varphi$, $C \cos 2\varphi$, $D \sin \Theta$, $D \cos \Theta$ für φ von 5 zu 5 Minuten n. T., Θ von 10 zu 10 Minuten n. T.) — 5) N. Jadanza, Tavole tacheometriche centesimale, Torino 1893. — 6) Léon Pantarotto, Tables trigonométriques pour les calculs des levés au tachéomètre sans avoir recours à la règle logarithmique . . ., Constantinople 1893. (6-stellige Zahlenwerte von sin und cos für jeden Grad n. T., von tg, cot, $\sin^2$, $\cos^2$ für jede Minute n. T.) — Den ersten logarithmisch-trigonometrischen Rechenschieber für neue Winkelteilung scheint Porri eingeführt zu haben (vergl. J.-F. Salneuve, Cours de topographie et de géodésie, 2e édit. Paris 1850, p. 40).

22) Nur folgende Äufserungen seien hier angeführt: „In Deutschland findet die neue Teilung seit der allgemeinen Einführung der tachymetrischen Methode für gewisse Messungen mehr und mehr Eingang" (E. Hammer, Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1892, S. 582). — „Seitdem die neuen 6-stelligen Logarithmentafeln (von Jordan) herausgegeben sind, werden Instrumente mit neuer Teilung immer mehr gesucht." (Aus einem Schreiben der Firma Dennert & Pape, mathematisch-mechanisches Institut in Altona, an W. Jordan, Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1895, S. 88.) — „Nach Mitteilung verschiedener gröfserer mechanischer Werkstätten werden gerade in neuester Zeit mehr Theodoliten mit neuer Teilung verlangt." (L. Winckel, Zeitschr. f. Vermessungswesen 1897, S. 185.) Dem Bedürfnis der mathematisch-mechanischen Werkstätten, an ihren Kreisteilmaschinen die neue Teilung neben der alten anzubringen, ist die physikalisch-technische Reichsanstalt bereits 1890 entgegengekommen, indem sie Einrichtungen getroffen hat, um sog. Mutterkreise für neue Teilung liefern zu können. (Vergl. Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 10. Jahrg., 1890, S. 418.) Nach Mitteilung von Hobert und Ideler, a. a. O. 20), S. VI, hat in Deutschland die erste Teilscheibe für decimale Teilung 1799 der Berliner Mechaniker Wagner eingerichtet.

23) In einer Sitzung des Bureau des Longitudes in Paris, vergl. Comptes rendus de l'Académie des Sc., t. 70, 1870, p. 1233—1236. C. Bremiker hat sich 1872, a. a. O. 15), ebenfalls dafür ausgesprochen, den ganzen Kreis als Einheit decimal zu teilen; er meint zugleich, dafs man den tausendsten Teil des Kreises Grad nennen könnte. Die Unzweckmäfsigkeit einer solchen Einteilung bei trigonometrischen Rechnungen zeigen sehr deutlich die Tafeln von J. de Mendizábal Tamborrel (Tables de logarithmes à huit décimales . . ., Paris 1891); der volle Winkel, „gone" genannt, ist mit γ bezeichnet, sodafs ein rechter Winkel gleich $0{,}25\,\gamma$ wird, ferner 1 décigone $= 0{,}1\,\gamma$; 1 microgone $= 0{,}000001\,\gamma$ u. s. w. Ein neuerer Vertreter desselben Princips, De Rey-Pailhade (von dessen zahlreichen einschlägigen Schriften angeführt sei: L'extension du système décimal, Paris 1897) teilt den ganzen Kreis in 100 cirs. Weitere Litteratur findet man bei De Rey-Pailhade a. a. O., sowie E. Hammer, Die Fortschritte der Kartenprojectionslehre . . ., Geograph. Jahrbuch, Bd. 20, S. 430—431, 1899. Gelegentlich einer von dem Vorstande des Deutschen Mechaniker-Tages 1889/1890 veranstalteten Umfrage bei einer grofsen Zahl ausübender Mechaniker ist die „grundlegende Frage, ob sich Decimalteilung des Quadranten oder des ganzen Kreises empfehle, ausnahmslos zu Gunsten der ersteren Teilungsart" entschieden worden (Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 10. Jahrg. 1890, S. 417). W. Förster hat in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 9. Jahrg. 1889, S. 475—476 (vorher schon in dem Vorwort zu den 5-stelligen Tafeln

von Gravelius 20) S. IX) ausgeführt, es gebe manche Gebiete, in denen sachgemäfs nach ganzen Umdrehungen als Einheiten gerechnet werde, z. B. bei Schraubentrommeln, Torsionskreisen und dergl.; für solche Fälle könne es auch zweckmäfsig sein, trigonometrische Tafeln herzustellen, die sich auf eine decimale Einteilung des ganzen Umkreises beziehen und dadurch bei gewissen Rechnungen, z. B. der Bestimmung der periodischen Fehler von Schrauben, nicht ganz unerhebliche Erleichterungen böten. In solchen Fällen werde es jedoch meist keiner sehr grofsen Genauigkeit der Winkelausdrücke und somit in den Logarithmentafeln sehr weniger Stellen bedürfen. Jedenfalls sei die fragliche Ausdrucksform von Winkelangaben an umfassender praktischer Bedeutung auch nicht entfernt mit derjenigen in Decimalteilen des Quadranten zu vergleichen. Hier sei noch bemerkt, dafs Henri de Sarrauton (L'heure décimale et la division de la circonférence, Paris 1897) der Einteilung des Tages in 24 Stunden zuliebe den ganzen Kreisumfang in 240 Grade zu 100 Minuten, die Minute zu 100 Secunden, teilen will; in den Pariser Comptes rendus t. 126, 1898, p. 194 teilt derselbe mit, dafs Lebègue und Maurice Méry damit beschäftigt sind, trigonometrische Tafeln für diese Art der Kreisteilung zu berechnen.

24) Bouquet de la Grye, Note sur la décimalisation du temps et de la circonférence, Paris 1896; der doppelte Quadrant wird in 100, also der rechte Winkel in 50 Teile geteilt, die je ein „mer" heifsen sollen, von μερίζειν = teilen.

25) Dem Streben, solche Vorteile zu erlangen, ist es jedenfalls zu danken, wenn jetzt schon allgemein Bruchteile von Secunden als Decimalbrüche und zuweilen Secunden als Decimalteile von Minuten geschrieben werden, während im 17. Jahrhundert manchmal noch mit Tertien, Quarten und Quinten gerechnet wurde!

26) Wenn man den Quadranten als Einheit nimmt und der Zehnteilung unterwirft, setzt sich jeder Winkelausdruck aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch zusammen, ähnlich wie ein gewöhnlicher Logarithmus aus Charakteristik und Mantisse, und die Addition oder Subtraction einer beliebigen Anzahl von Quadranten entspricht der Änderung der Charakteristik des Logarithmus. Es hat hierauf z. B. Hoüel a. a. O. 5) hingewiesen.

27) E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 2. Aufl., Stuttgart 1897, S. 4. Es entspricht dies den vor hundert Jahren in Frankreich üblichen Benennungen „degré nouveau", „minute nouvelle" u. s. w. Die Franzosen befinden sich in der angenehmen Lage, für den alten und den neuen Grad zwei verschiedene Namen zu haben, nämlich „degré" und „grade", welch letztere Benennung von J. B. J. Delambre (Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien, Paris an VII [1798], p. 17) eingeführt worden ist. Im Deutschen es umgekehrt zu machen, nämlich statt Neugrad und Neuminute „degré" und „minute" (mit französischer Aussprache) zu sagen, wie Bohn will (Zeitschrift f. Vermessungswesen 1891, S. 314—315), geht wohl nicht an. Die von Gravelius in seinen Logarithmentafeln 20) gebrauchten Benennungen „Centigrad" für den centesimalen Grad, „Centiminute" für die centesimale Minute u. s. w. erscheinen nicht glücklich gewählt, denn sie erwecken angesichts der jedermann geläufigen Regel, nach welcher im metrischen System die Namen für die Teile der Einheiten gebildet werden, falsche Vorstellungen und können um so leichter zu Verwechslungen führen, als in Frankreich thatsächlich „centigrade" in der Bedeutung von Hundertel-Neugrad oder Neuminute u. s. w. gebraucht wird (vergl. Sanguet und Ch. Lallemand, Zeitschr. f. Vermessungswesen 1899, S. 212).

28) In den Bezeichnungen herrscht bei der neuen Winkelteilung grofse Verschiedenheit, wie folgende Zusammenstellung der hauptsäch-

lichsten, bis jetzt zur Verwendung gekommenen Schreibweisen eines und desselben Winkels von z. B. 1,37869 Quadranten zeigt:

a) Hobert u. Ideler (1799) . . . 1,37869 oder 1,37869 Q = 1,37869 R
   Plauzoles (1809) . . . . $1^{Q},37869$
   Ideler (1822), Hoüel (1866) . . . . $1^{q},37869$
b) Schulze (1783) . . . . $137_{0}86,90_{,,}$
   Bode (1795), Laplace (1799), Borda-Delambre (1801) u. s. w. . . . . $137^{0}, 869$
   Commissaires des poids et mesures (1791), Borda-Delambre (1801), Legendre (1808), Gudermann (1833) F. G. Gaufs (1873) u. s. w. . . . . $137^{0}86'90''$
   Gravelius (1886) . . . . $137^{\ominus}86^{-}90^{=}$
c) Delambre (1798) Westphal (1891) . . . . $137^{G},869$
   Delambre (1806) . . . . $137^{g}869$
   Puissant (1819) . . . . $137^{g},869$ oder $137^{g}86'90''$
   Salneuve (1850) . . . . $137^{g},8690''$
   Service géographiques de l'Armée (1889) . . . . . . $137^{c}86'90''$
   Sanguet (1889) . . . . $137^{G}86'90''$
   Jordan (1891) . . . . $137^{g}86^{c}90^{cc}$

Man erkennt in diesen Bezeichnungen zwei verschiedene Grundsätze, auf der einen Seite das strenge Festhalten an dem rechten Winkel oder Quadranten als Einheit (a), auf der andern Seite das Bestreben, die einmal hergebrachte Einteilung in Grade, Minuten u. s. w. möglichst beizubehalten, unter Ersetzung des Teilers 60 durch 100, d. h. der Sexagesimalteilung durch Centesimalteilung (b und c). Die den letzteren Weg einschlugen, haben entweder die alten Zeichen weiter benutzt (b), allenfalls tief gestellt (Schulze) oder umgelegt (Gravelius), oder aber neue Zeichen, hauptsächlich für den neuen Grad, in Anwendung gebracht (c). Schulze und Callet sind noch schwankend; der erstere sagt a. a. O. Anm. 16): „Wollte man übrigens bei dieser Eintheilung die einmal eingeführten Benennungen der Grade, Minuten, Secunden u. s. w. beibehalten, so könnte man den rechten Winkel . . . in 10(!) Grade, jeden Grad in 100 Minuten . . . eintheilen, oder um die Gleichförmigkeit desto besser zu beobachten, könnte man auch den rechten Winkel in 100 Grade, jeden Grad in 100 Minuten . . . eintheilen.“ Callet (1795) schreibt 137 deg. 86,9 M. und daneben 1,37869. Hobert und Ideler (in der Einleitung zu ihren Tafeln Anm. 20, S. XII), Ideler allein (in seiner Übersetzung von Lacroix' Trigonometrie, Berlin 1822, S. 18, Fufsnote) und nicht minder Hoüel haben sich scharf gegen den Gebrauch von Graden u. s. w. bei der neuen Teilung gewendet. Hoüel z. B. führt in der Vierteljahrsschr. der astronom. Gesellsch., 1. Jahrg., 1866, S. 97 aus, durch die Bezeichnung „degré nouveau“ u. s. w. werde der Schein erweckt, als ob die Winkeleinheit $\frac{1}{100}$-Quadrant, also eine willkürliche sei. „C'est le quadrant, qui est bien réellement l'unité ancienne, aussi vieille que la géométrie, son adoption n'étant nullement une invention nouvelle, mais le retour à une idée primitive et nécessaire, et sa division décimale n'étant autre chose que l'extension à cette unité du procédé suivi pour toutes les autres.“ Diese Mahnungen scheinen gänzlich unbeachtet geblieben zu sein, und es wird wohl nicht mehr gelingen, den Grad zu beseitigen. Immerhin könnte von der Teilung des Grades in zwei Unterabteilungen (Minuten und Secunden) abgesehen werden, wie das früherer Übung entspräche (s. in obiger Zusammenstellung Bode, Delambre, Salneuve) und neuerdings von A. Westphal (Zeitschr. f. Instrumentenkunde 11. Jahrg. 1891, S. 195) wieder gefordert worden ist. Man würde für gewöhnlich den Neugrad als einzige

Einheit benutzen und für kleine Winkel (unter einem Grad) die Neusecunde (wie Laplace in seiner Mécanique céleste), oder wie Westphal a. a. O. vorschlägt, den Milligrad (^{M} oder $^{G''}$, gleich 3,24 alten Secunden). Was die Zeichen selbst betrifft, so haben die von Gravelius und Jordan vorgeschlagenen manche Zurückweisung erfahren, weil sie weniger bequem zu schreiben sind, als die vorher üblichen; es gilt dies auch für G und g (welches aufserdem schon Gramm bedeutet) im Verhältnis zu $^{\circ}$ und $'$. Bei einer durch Jordan (Zeitschr. f. Vermessungswesen 1891, S. 159—160) veranlafsten Aussprache (ebenda, S. 216—217, 251—253, 312—315) sind mehrere Geodäten, voran Helmert, für die Beibehaltung der alten Zeichen eingetreten, welche in der Praxis noch zu keinen Unzuträglichkeiten geführt haben soll; andererseits haben Jordan (a. a. O., S. 314) und Hammer (a. a. O. 27), S. 546 oben) eine Unterscheidung der Zeichen für alte und neue Teilung in Lehrbüchern für unbedingt notwendig erklärt. Vielfach wird diese Unterscheidung durch die Zusätze a. T. (alte Teilung) und n. T. (neue Teilung) bewirkt — Helmert hat a. a. O. die einfacheren A bezw. N oder C vorgeschlagen —, welche allerdings bei Formeln unbequem sind.

29) W. Jordan macht insbesondere über die Addition und Subtraction von $2R$ in seinem Handbuch der Vermessungskunde, Auflage von 1877, § 97, nachdem er auf S. 287 je ein Zahlenbeispiel für die Berechnung eines polygonalen Zuges mit alter und mit neuer Kreisteilung vorgeführt hat („die zweite Rechnung ist beigefügt, weil gerade bei solchen Zügen die Vorteile der neuen Teilung augenfällig sind"), auf S. 288 die Bemerkung: „Beim fortgesetzten Ändern um $\pm 180^{\circ}$ wird man wohl dreimal so viel Rechenfehler begehen, als beim fortgesetzten Ändern um $\pm 200^g$."

30) Diejenigen, welche die Frage der Zehnteilung bei Zeit- und Winkelgröfsen gleichzeitig regeln wollen und den Tag als natürliche Zeiteinheit ansehen, halten es für logisch richtiger, statt des rechten den vollen Winkel als Einheit zu nehmen, wodurch in der Geographie und Astronomie allerdings Vereinfachungen entstehen können. Über diesem einen Gesichtspunkt dürfen aber die andern nicht aufser acht gelassen werden. Zu den im Text und in Anm. 23 angeführten Gründen, warum für den allgemeinen Gebrauch der rechte Winkel als Einheit vorzuziehen ist, kommt hinzu, dafs bei der geometrischen Erklärung der trigonometrischen Functionen ebenso wie bei den Cartesischen Coordinaten der rechte Winkel, der in der elementaren Geometrie von jeher als Einheit aufgefafst worden ist, vorausgesetzt werden mufs. Zudem ist, worauf de Rey-Pailhade a. a. O. 23), S. 16 selbst hingewiesen hat, der Übergang von der einen Winkelteilung (voller Winkel = 100 cirs) zu der andern (voller Winkel = 400 Neugrad) ein so einfacher, dafs beide recht wohl neben einander bestehen können. In den beiden Bänden der Pariser Comptes rendus vom Jahre 1870 hat Yvon Villarceau mit Hartnäckigkeit die Wahl des vollen Winkels (den er „tour" nennt und mit τ bezeichnet) als Einheit verfochten (t. 70, pp. 1233—1236, 1390; t. 71, p. 362—368), welcher Wahl auch R. Wolf zuneigt (t. 70, p. 1221), während A. d'Abbadie (t. 70, pp. 1111—1115, 1221; t. 71, p. 335—336), J. Hoüel (t. 70, p. 1387—1398) und Radau (t. 71, p. 335) nicht weniger entschieden für den rechten Winkel eingetreten sind. Hoüel spricht a. a. O. die Überzeugung aus, dafs bei allem, was die Mécanique céleste, die Geodäsie, Topographie, Physik und reine Mathematik betrifft, der rechte Winkel die natürliche Einheit ist; in einer Anmerkung weist er noch darauf hin (a. a. O. p. 1388), dafs Jacobi, „celui peut-être de tous les géomètres qui a le plus excellé dans le choix des notations", sich wohl gehütet hat, die Perioden der elliptischen Functionen anders auszudrücken, als in elliptischen Quadranten.

31) Für 7-stellige Tafeln z. B. ist das Intervall von 10″ a. T. zu grofs, von 1″ a. T. zu klein, dagegen dasjenige von 10 Neusecunden oder 0,00001 Q sehr geeignet, worauf bereits Houël a. a. O. 28), S. 96 hingewiesen hat. Auch ermöglicht es die neue Winkelteilung, alle Tafeln (die trigonometrischen wie die gewöhnlichen logarithmischen) gleichmäfsig anzuordnen, ein nicht zu unterschätzender Vorteil.

32) Delambre schrieb 1806 in dem Werke „Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, . . .“, t. I, p. 98: „Cette division (en grades ou degrés décimaux) est beaucoup plus commode pour l'usage du cercle répétiteur, et le seroit également pour les verniers de tous les instruments quelconques. Plusieurs personnes tiennent encore à l'ancienne division par habitude et parce qu'elles n'ont fait aucun usage de la nouvelle; mais aucun de ceux qui les ont pratiquées toutes deux ne veut retourner à l'ancienne.“ Dieses Urteil ist um so bemerkenswerter, als Delambre mangels geeigneter trigonometrischer Tafeln gezwungen war, alle beobachteten Winkel in alte Grade u. s. w. umzuwandeln, wozu er sich nicht einmal besonderer Tafeln bediente, sodafs für ihn die grofsen Erleichterungen beim trigonometrischen Rechnen, in denen wir den Hauptvorzug der neuen Teilung erblicken, gar nicht vorhanden waren. In gleichem Sinne, wie Delambre, hat sich in neuerer Zeit eine Reihe von Geodäten geäufsert, z. B. J. J. Vorländer (Über die Einteilung des Kreises zu den Zwecken der Feldmefskunst, Zeitschr. f. Vermessungswesen 1872, S. 101—105); Sanguet (welcher in der Vorrede zu seinen Tables trigonometr. centésim., Paris 1889, sagt, dafs durch die neue Winkelteilung der Zeitaufwand im Verhältnis 3 : 2, die „chance d'erreur“ im Verhältnis 4 : 1 verkleinert werde, „aussi bien dans les observations que dans les calculs“); General Derrécagaix (in der Vorrede zu den 8-stelligen Logarithmentafeln des Service géographique de l'Armée, Paris 1891: eine lange Erfahrung habe die Vorzüge der Decimalteilung des Quadranten bestätigt „et établi définitivement sa supériorité sur la division sexagésimale, aussi bien dans les instruments que dans la pratique des calculs“). W. Jordan hat in seinem Handbuch der Vermessungskunde, Auflage von 1877, S. 288 noch auf einen nicht geringen Vorteil hingewiesen, den die Anwendung der neuen Teilung in der niederen Geodäsie gewährt. Es können hier, wovon er die Zulässigkeit an Beispielen zeigt, alle Winkel auf 0,001 g (10 Neusecunden) abgerundet werden, was gegenüber der alten Teilung die Ersparnis einer Ziffer beim Ablesen und Schreiben eines jeden Winkels bedeutet und beim Rechnen weitere Vereinfachungen zur Folge hat, an und für sich sowohl als bei der Benützung 5-stelliger Tafeln hinsichtlich der Interpolationen.

33) Wir wüfsten überhaupt keinen Grund, warum in der elementaren Geometrie Winkel in Graden ausgedrückt werden sollten, statt in Rechten. Von der Gröfse des rechten Winkels hat jeder eine Vorstellung, von der des Grades nicht. Herr A. Schülke, der wiederholt den fraglichen Einwand gegen die Decimalteilung des Quadranten erhoben hat, z. B. in seinem Aufsatze „Zur Decimalteilung des Winkels“, Zeitschr. f. mathemat. u. naturw. Unterricht, 27. Jahrg., 1896, S. 339—344, widerlegt sich dort auf S. 343 selbst (jedenfalls ohne es zu wollen), indem er ganz richtig bemerkt: „Wo nur immer Bruchrechnung gelehrt wird, spricht man ohne Bedenken von $\frac{1}{3}$ m, $\frac{1}{5}$ kg u. s. w., trotzdem die Schüler wissen, dafs m und kg gewöhnlich decimal geteilt werden; sollte ein ähnliches Verfahren bei den Winkeln auf den Oberclassen gröfsere Schwierigkeiten bereiten?“ Früher wurde auch in trigonometrischen Formeln der Buchstabe *R* zur Bezeichnung des rechten Winkels benutzt, wie z. B. aus den Lehrbüchern

von K. D. v. Münchow, Grundlinien der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Bonn 1826, und C. A. Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie, Jena 1844, zu ersehen ist, in denen man Formeln, wie $\sin(R - \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}R = 1$, häufig begegnet. Vielleicht wäre es zweckmäfsig, namentlich für die zu erwartende Übergangszeit, in welcher alte und neue Teilung beide im Unterricht zu berücksichtigen sein werden, zu jener Schreibweise zurückzukehren. (Die in Anm. 19 erwähnte „Technische Anweisung" für württembergische Catastergeometer hat öfters die Schreibung $\frac{1}{3}R$ für 30° a. T.)

34) Von solchen Vorzügen, die darauf beruhen, dafs die Zahl 60 mehr Teiler enthält als 100, konnte nur die Rede sein, solange noch Kreisteilungen mit dem Zirkel ausgeführt und geprüft wurden, was längst nicht mehr der Fall ist. Hier sei erwähnt, dafs vor der allgemeinen Einführung der neueren Teilmethoden (vgl. etwa R. Wolf, Handbuch der Astronomie, 2. Bd., Zürich 1892, S. 29 f.) namentlich in England bei astronomischen Instrumenten häufig der Quadrant in 96 Teile geteilt wurde, weil diese Einteilung durch fortgesetztes Halbiren des Bogens von 60° erhalten werden kann — $90^\circ : 96 = 60^\circ : 2^6$ — und sich deshalb zu damaliger Zeit leichter und genauer herstellen liefs, als die Einteilung in 90°. Beide Einteilungen des Quadranten, in 90 und in 96 Teile, wurden oft bei einem und demselben Instrument auf zwei concentrischen Kreisen angebracht, und die beiden Ablesungen dienten zur wechselseitigen Prüfung und genaueren Bestimmung von Winkeln (vergl. etwa Delambre, Astronomie théorique et pratique, t. I, Paris 1814, p. 128; J. T. Mayer, Unterricht zur praktischen Geometrie, 4. Aufl., 1. Teil, Göttingen 1814, S. 354 f.).

35) Man beachte, dafs in der reinen Mathematik sehr oft sog. Hilfswinkel vorkommen — bei der goniometrischen Auflösung quadratischer und cubischer Gleichungen, beim Rechnen mit complexen Gröfsen in der sog. kanonischen Form ($re^{i\varphi}$), bei den trigonometrischen Substitutionen der Integralrechnung, in der Theorie der elliptischen Integrale und Functionen, u. s. w. — Winkel, die nicht durch Beobachtung mit Instrumenten gefunden, sondern errechnet werden. Es ist schlechterdings nicht einzusehen, warum man in solchen Fällen, wenn einmal der Übergang von den allgemeinen Ausdrücken in Buchstaben zu bestimmten Zahlenwerten nötig ist, auf die grofsen Vorteile verzichten soll, welche die Anwendung der neuen Winkelteilung gewährt. Das Gleiche gilt von Tafeln solcher Functionen, bei denen das Argument oder ein Parameter oder der Functionswert selbst einen Winkel bedeutet; mit Rücksicht hierauf haben Decimalteilung des Quadranten angewendet z. B.: C. Gudermann in seinen Tafeln der „Längezahlen" der Kreisbögen, nämlich der Function $L\varphi = \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$, (Theorie der Potential- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen, besonders abgedruckt aus Crelle's Journal, Bde. 6, 7, 8, 9, Berlin 1833, Tafel I, S. 161—260, und Tafel III, S. 339—350); J. Hoüel in seinen 4-stelligen Tafeln der elliptischen Integrale und der Thetafunctionen (Recueil de formules et de tables numériques, Paris 1866, table XVI, p. 57—59); der Berichterstatter in seinem 3-stelligen Entwurf einer Tafel der Additionslogarithmen für complexe Gröfsen (Zeitschr. f. Mathemat. u. Physik, Bd. 40, 1895, S. 23—30).

36) Unter Hinweis auf die Anmerkungen 18, 19, 22 und 32 seien hier noch folgende bezeichnende Äufserungen aus den Kreisen der Feldmesser mitgeteilt: „... derjenige, welcher sich seither mit der alten Teilung plagte und die Vorzüge der neuen Teilung erkannt hat ..."; „... weil,

wie ich aus eigener langjähriger Erfahrung weifs, eine grofse Zahl derjenigen, welche in der Feldmesserpraxis mit der neuen Teilung messen und rechnen, die alte Teilung überhaupt nicht mehr anwendet" (Eberhardt, Zeitschrift f. Vermessungswesen 1891, S. 312 f.). — „Ich mufs gestehen, dafs ich früher auch zu denen gehörte, welche sich für die neue Kreisteilung . . . nicht besonders erwärmen konnten, nachdem ich mich aber im Lauf der Jahre überzeugt habe, welch bedeutender Gewinn an Zeit und Sicherheit der Rechnung bei Anwendung der neuen Teilung erzielt wird, möchte ich unter keinen Umständen bei den Messungen und Rechnungen der Catasterverwaltung wieder zur alten Teilung zurückkehren" (W. Schlebach, Zeitschr. f. Vermessungswesen 1893, S. 597 f.). — „Mögen diese Zeilen dazu beitragen, der Decimalteilung (des Quadranten), der doch allein die Zukunft gehört, neue Freunde zu erwerben" (Buerger, Zeitschrift f. Vermessungswesen 1899, S. 64). — Übrigens sind es gerade die praktischen Geodäten (Feld- und Landmesser), die am allermeisten mit Winkeln und trigonometrischen Rechnungen zu thun haben; ihnen gegenüber sind die rechnenden Astronomen, höheren Geodäten u. s. w. an Zahl äufserst gering. Da nun die feldmesserischen Arbeiten immer intern bleiben — nur die Ergebnisse: Coordinaten, Karten und Pläne treten in die Öffentlichkeit —, so können für dieselben, ohne Schädigung der Interessen anderer, beliebige Instrumente und Rechenmethoden eingeführt werden. Deshalb wird man vernünftigerweise, die nötige Einsicht vorausgesetzt, die Methoden wählen, die am schnellsten und sichersten zum Ziele führen, also auch am billigsten sind. Wir berühren damit die wirtschaftliche Seite der Frage, die uns wichtig genug erscheint, um ihr einige Worte zu widmen. In Deutschland und Deutsch-Österreich sind beim Cataster, bei Stadtvermessungen u. s. w. etwa 5000 Landmesser rechnerisch thätig. Auf trigonometrische Rechnungen möge jeder nur 500 Stunden jährlich verwenden; die Zeitersparnis bei Benutzung der neuen Winkelteilung betrage nur 1/10 (manche nehmen einen viel gröfseren Bruchteil an, z. B. Sanguet 31) 1/3) und die Arbeitsstunde werde mit 1 Mark (wenig genug) bezahlt. Dann kommen wir zu dem überraschenden Ergebnis, dafs allein in Deutschland und Deutsch-Österreich durch die allgemeine Einführung der neuen Teilung in der niederen Geodäsie jährlich zum allermindesten 250 000 Mark erspart würden! In der Physik liegen insofern die Verhältnisse ähnlich wie in der Geodäsie, als die Ergebnisse, die sie andern Wissenschaften zukommen läfst, kaum jemals in Winkelangaben bestehen, und ein Bruch mit der Vergangenheit ihr nicht schwer fallen würde. Der in Anm. 17 erwähnte Rapport von Borda, Lagrange und Monge aus dem Jahre 1793 enthält bereits die Bemerkung: „Enfin, l'Académie pense qu'il sera utile d'employer cette division même dans les instruments de physique."

37) Trotzdem wir die Frage der Winkelteilung nur vom Standpunkte des Mathematikers, Physikers und Geodäten zu beurteilen haben, mögen hier noch einige Bemerkungen über die Stellung der Astronomen zu derselben Platz finden, wobei wir nur Äufserungen wiedergeben wollen, die aus den letzten Jahrzehnten stammen. Die unbedingte, nicht selten in schroffster Form zum Ausdruck gebrachte Ablehnung der decimalen Teilung des Quadranten seitens der Astronomen scheint noch vorzuherrschen, jedoch haben auch gewichtige Stimmen sich dafür erhoben. Wenn auf der einen Seite noch immer behauptet wird, durch die Rücksicht auf die vorhandenen kostbaren Instrumente, die zahlreichen ausgedehnten Tafeln und den gewaltigen Vorrat an früheren Beobachtungen seien die Astronomen durchaus verhindert, der neuen Teilung näher zu treten, so hat andererseits bezüglich der Anwendung der letzteren in der Astronomie z. B. A. d'Abbadie in den Comptes rendus der Pariser Akademie, t. 70, 1870,

p. 1113 ausgeführt: „. . . la conversion des valeurs d'un système dans l'autre n'est qu'un travail insignifiant, auprès des simplifications considérables que l'adoption de la division décimale du quadrant amènerait dans les calculs auxilières". In demselben Sinne hat sich W. Förster z. B. 1886 in dem Vorworte zu den 5-stelligen Logarithmentafeln von Gravelius Anm. 20), S. V und VI geäufsert; derselbe findet, dafs die Summe der Vorteile, welche die Anwendung der Decimalteilung des Quadranten bei den trigonometrischen Rechnungen bietet, in der Bilanz im allgemeinen selbst dann noch ansehnlich überwiegt, „wenn diese Berechnungen ihren Ausgang an Instrumenten mit alter Einteilung nehmen und die Schlufsergebnisse wieder in Ausdrücke nach alter Teilung umsetzen müssen"; und auf derselben Seite ist nochmals von den „grofsen Vorzügen für den astronomischen Rechner" die Rede, „welche die neue Teilung selbst dann noch entfaltet, wenn er die Daten der Rechnung aus den von der Messung in alter Teilung gelieferten Winkelausdrücken umsetzen und die Schlufsergebnisse der Rechnung zur Vergleichung mit der Messung wieder in alte Teilung zu übertragen hat". Dafs man nicht bei Versuchen im Kleinen stehen geblieben ist, zeigt eine in den Pariser Comptes rendus t. 71, 1870, p. 335 abgedruckte Mitteilung von G. Airy an d'Abbadie, wonach ersterer bei seinen Untersuchungen über die Masse des Jupiters und namentlich bei seinen Mondreductionen, „la plus grande réunion de calculs qu'on ait jamais entreprise en astronomie", ausschliefslich die Decimalteilung des Quadranten angewendet hat. Ähnliches wird von Le Verrier berichtet, z. B. in dem von General Derrécagaix geschriebenen Avant-Propos zu den 8-stelligen Tafeln des Service géographique de l'Armée 20). So wird man R. Hoppe Recht geben müssen, der im Archiv der Mathem. u. Physik, (2) 15, 1897, litterar. Ber. LX, S. 49 mit Bezug auf unsere Frage sagt: „Die Form der Beobachtungsresultate kann offenbar ihrer Ausdrucksform in der Rechnung keinen Zwang auferlegen." Natürlich bedurfte und bedarf es keiner internationalen Beschlüsse zu derartigen Anwendungen der neuen Winkelteilung in der Astronomie: sie sind in das Belieben jedes einzelnen gestellt. Aber auch eine weiter gehende Verwendung der Decimalteilung des Quadranten in der Astronomie kann nicht zu den Unmöglichkeiten gehören, wie man glauben machen will; wie hätte sonst W. Förster, gewifs ein competenter Beurteiler, 1889 in seinen auf der Naturforscher-Versammlung in Heidelberg verlesenen Darlegungen (s. Zeitschr. f. Instrumentenk. 9. Jahrg. 1889, S. 355) den Ausspruch wagen können: „Hiernach kann kein Zweifel mehr obwalten, dafs dieser Einteilungsart für alle Winkelmefsinstrumente, welche zu astronomischen u. s. w. Zwecken dienen, die Zukunft gehört!" Zum Schlusse werde noch des Einflusses der Mittelschulen gedacht, welcher der Verbreitung der neuen Teilung bis jetzt nicht eben günstig gewesen ist. Lehrreich in dieser Beziehung ist eine Mitteilung von W. Jordan, der von 1868—1881 Professor der Geodäsie an der technischen Hochschule in Karlsruhe war, in der Zeitschr. f. Vermessungswesen 1891, S. 114, wonach die Hälfte aller in den geodätischen Übungen dort benützten Instrumente alte, die Hälfte neue Teilung hatte, aber alles auf alte Teilung umgerechnet werden mufste, weil die Studirenden von ihren früheren Schulen nur logarithmisch-trigonometrische Tafeln in alter Teilung mitbrachten. In Frankreich wurde 1895 auf der Versammlung der Association française pour l'avancement des sciences in Bordeaux auf den Antrag der Sectionen für Mathematik, Astronomie und Geodäsie in einer allgemeinen Sitzung der Wunsch ausgesprochen, dafs in den Schulen die decimale Einteilung des Kreises in 400 Grad ebenso gelehrt werde, wie die sexagesimale Teilung (s. Comptes-rendus de la 24e Session de l'Ass. etc., I, p. 187).

2. Gutachten über die decimale Winkel- und Zeitteilung.

Von J. **Bauschinger** in Berlin.

Von geographischen und nautischen Kreisen Frankreichs ist der Vorschlag ausgegangen, das jetzt allgemein in Gebrauch befindliche Sexagesimalsystem der Winkel- und Zeitteilung durch ein einheitliches decimales System zu ersetzen, mit der Motivirung, dafs hauptsächlich durch die Complicirtheit der Rechnung im gegenwärtigen System eine allgemeinere Anwendung der nautischen Rechnungen in der Marine verhindert werde. Es ist von vorn herein zuzugeben, dafs die praktische Nautik sich gegenwärtig überall auf einem bedauerlich tiefen Niveau befindet, und dafs Bestrebungen, dasselbe zu heben, nur mit Freude begrüfst werden müfsten, und es ist ferner auch zuzugeben, dafs die nautischen Rechnungen durch das Decimalsystem eine (vom Standpunkte eines geübten Rechners allerdings unerhebliche) Erleichterung erfahren; es mufs aber eingehend geprüft werden, ob so radicale Änderungen, wie die der Zeit- und Winkelteilung, welche so tief in verschiedene andere Wissenschaften, wo Nachteile des bisherigen Systems nicht hervorgetreten sind, und in die Gepflogenheiten des täglichen Lebens eingreifen, auf Grund der Forderungen eines so kleinen und jungen Interessenkreises, wie die Nautik, zugelassen werden können, ohne andere Forschungsgebiete zu schädigen. Im vorliegenden Gutachten soll das vom Standpunkte der Astronomie aus geschehen, welche in dieser Angelegenheit hervorragend beteiligt ist, nicht nur, weil die Nautik von ihr abhängt, sondern hauptsächlich, weil sie ohne Frage den häufigsten Gebrauch von Winkeln und von Zeitgröfsen macht

Es braucht hier nicht darauf eingegangen zu werden, welche Zeit- und Winkelteilung als die zweckmäfsigste zu schaffen wäre, wenn man sie jetzt einzuführen hätte. In dem amtlichen „Rapport“ der französischen Commission ist diese Untersuchung objectiv und erschöpfend durchgeführt, und die Gründe für und wider gegen jedes System sind vollständig aufgeführt. Es ist auch im folgenden nicht möglich, wesentlich andere Gründe vorzuführen, als sie bereits im „Rapport“ angegeben sind, nur die Gewichte derselben werden anders verteilt erscheinen. Ebenso wenig wollen wir uns auf eine Kritik der verschiedenen Vorschläge einlassen, sondern lediglich jenen behandeln, den die französische amtliche Commission in letzter Linie als durchführbar erklärt hat, da es wohl als sicher gelten kann, dafs die weitergehenden Vorschläge ohne jede Aussicht auf Verwirklichung sind.

Es mufs die allgemeine Bemerkung vorangeschickt werden, dafs sich bis jetzt in keiner Wissenschaft, mit Ausnahme der Nautik, das Bedürfnis nach einer Änderung der Winkel- und Zeitteilung

geltend gemacht hat; so ist man in der Astronomie und Geodäsie bisher stets mit der historischen Teilung gut zurecht gekommen, und ein Versuch, der im Anfang unseres Jahrhunderts gemacht wurde, zugleich mit dem metrischen Maſssystem den decimal geteilten Quadranten in die Astronomie einzuführen, ist trotz der Unterstützung durch die gewaltige Autorität von Laplace ohne jeden Erfolg geblieben.

Es muſs ferner hervorgehoben werden, daſs dank dem ehrwürdigen Alter der jetzigen Teilung dieselbe von allen Culturvölkern der Erde angenommen worden ist, so daſs auf diesem Gebiete allgemein menschlicher Einrichtungen eine Einigkeit herrscht, wie sie auf anderen Gebieten erst mit Überwindung groſser Schwierigkeiten hergestellt werden muſste oder erst herzustellen ist. Einigkeit in solchen Einrichtungen ist aber unendlich viel mehr wert, als die Einführung des besten Systems, neben dem das alte fortbestehen muſs. Diese Einigkeit sollte durch keinen Versuch in Frage gestellt werden.

Der französische Vorschlag besteht in folgenden zwei Punkten:

I. Die Einheiten des Winkels und der Zeit sollen unter Aufgebung der Sexagesimalteilung nach dem Decimalsystem in Unterabteilungen zerlegt werden.

II. Als Einheit des Winkels sollen der 100. Teil des Kreisquadranten (der Decimalgrad), als Einheit der Zeit die bisherige Stunde gewählt werden, so daſs 400 Decimalgrade mit 24 Stunden Zeit äquivalent sind.

Vom astronomischen Standpunkt aus müssen diese Vorschläge zurückgewiesen werden, wie jetzt eingehend motivirt werden soll.

Ad I (Decimalteilung).

Die Vorzüge einer decimalen Teilung für alle Rechenoperationen liegen auf der Hand und brauchen hier nicht auseinandergesetzt zu werden; da aber mit Winkel- und Zeitgröſsen nur Rechenoperationen allereinfachster Art vorgenommen werden müssen, wenigstens in allen Fällen, wo nichtberufsmäſsige Rechner (z. B. Seeleute) damit zu thun haben, so macht auch die sexagesimale Teilung keine nennenswerten Schwierigkeiten. Zudem kann ja doch in allen den Fällen, wo die decimale Teilung erhebliche Vorteile bietet, z. B. bei Interpolationen, leicht genug durch eine Division mit 6 von der sexagesimalen Teilung auf die decimale übergegangen werden. Solche kleine Unvollkommenheiten bei einer oder der anderen Anwendung sind einmal notwendig mit einer Einrichtung verknüpft, die, wie die Winkel- und Zeitteilung, den verschiedenartigsten Zwecken dienen muſs. Dagegen besitzt die sexa-

gesimale Teilung noch einen Vorzug vor der decimalen: sie hat eine gröfsere Anzahl von einfachen Teilern, ein Umstand, der dem geübten Rechner manche Bequemlichkeit verschafft und auch bei der praktischen Ausführung und Prüfung einer Teilung auf Zifferblättern und geteilten Kreisen nicht unerhebliche Vorteile gewährt.

Den Vorzügen der decimalen Teilung für die Rechnung stehen sehr erhebliche Nachteile derselben für die Beobachtung gegenüber, wenigstens soweit es sich um astronomische Beobachtungen handelt. Die Decimalbogensecunde und die Decimalzeitsecunde sind zu klein; es ist erstere gleich 0,324″, letztere 0,36ˢ. Richtet man die Ablesetrommel so ein, dafs man ganze Decimalsecunden abliest und Zehntel schätzt, so wird dies eine Genauigkeit der Ablesung, die wesentlich gröfser ist als die der Einstellung; richtet man aber die Ablesung so ein, dafs man Zehner von Decimalsecunden abliest und Zehntel hiervon schätzt, so bleibt die Genauigkeit der Ablesung hinter der der Einstellung zurück. Der Mechaniker wird also zu künstlichen Teilungen greifen müssen, welche dem Astronomen wieder die Rechenarbeit erschweren. — Die Decimalzeitsecunde ist sowohl für den Beobachter zu klein, indem er Aug- und Ohrbeobachtungen in derselben nicht anstellen könnte, als auch wird der Uhrmacher keine Decimalsecundenuhr herstellen können, da das Pendel zu kurz würde; man würde zu Doppel- oder dreifachen Secunden greifen müssen, für den Astronomen eine Quelle unaufhörlicher lästiger Arbeit.

Ad II (Einheiten).

Die bisherige Stunde ist als Einheit der Zeit beibehalten worden, weil keine andere Teilung des Tages besondere Vorzüge aufwies, und weil man es für unmöglich hielt, sie aus dem bürgerlichen Leben zu entfernen. Die Ersetzung des Grades durch den Decimalgrad, wobei das grofse Publicum wenig oder gar nicht betroffen wird, glaubt man dagegen den verschiedenen Wissenschaften, insbesondere der Astronomie, zumuten zu dürfen. Ich behaupte, der Gewinn würde ein minimaler, der Schaden, welcher der Astronomie erwächst, aber ein so enormer sein, dafs sich meines Erachtens die Astronomen niemals entschliefsen dürfen, den Decimalgrad zu adoptiren, auch wenn sonst eine allgemeine Annahme erfolgen sollte.

Der Vorteil des Decimalgrades ist, dafs bei Addition von Winkeln der Überschufs über 2π durch Subtraction von 40 statt von 36 gebildet wird, und dafs der Quadrant 100 Grad statt 90 beträgt. Ich glaube, dafs auch ein ungeübter Rechner diese Erleichterung nicht zu hoch anschlagen wird.

Was den Übergang vom Winkel zur Zeit und umgekehrt anlangt, so ist derselbe im alten wie im neuen System gleich leicht

auszuführen, denn eine Division, bezw. Multiplication mit 15 oder mit 6 dürfte auf der gleichen Stufe stehen. Ein gehörig angeleiteter Rechner wird in dem einen wie in dem anderen Falle das Resultat ohne Tafel und ohne Zwischenrechnung sofort anschreiben können.

Dagegen geht der einfache Zusammenhang zwischen Winkel und Zeit, der im alten System durch die Gleichungen gegeben ist:

$$1^h = 15^0 \qquad 1^0 = 4^m$$
$$1^m = 15' \qquad 1' = 4^s$$
$$1^s = 15''$$

und für die Überschlagsrechnungen so sehr viele Vorteile bietet, im neuen System völlig verloren, denn hier haben wir die incommensurablen Beziehungen:

$$1^H = 16^g,666 \ldots.$$
$$1^M = 16^{`},666 \ldots.$$
$$1^S = 16^{``},666 \ldots.$$

Auf diese Punkte soll jedoch kein besonderes Gewicht gelegt werden; der Hauptgrund, der jedem Astronomen die Annahme des neuen Systems unmöglich macht, liegt in der Unterbrechung der Tradition, beziehungsweise in der Notwendigkeit, alle alten Beobachtungen und Tafeln in das neue System umzurechnen. Dafs dies schlechterdings unmöglich ist, hat sich schon im Anfang dieses Jahrhunderts herausgestellt; am Ende desselben, wo eine fast unübersehbare Reihe von neuen Beobachtungen und Tafeln (Planetentafeln, Refractionstafeln, Sternkatalogen u. s. f.) hinzugekommen, wäre eine Änderung etwa gleichbedeutend mit der Forderung, 10 Jahre lang auf jede Fortarbeit zu verzichten und lediglich das vorhandene Material in die neue Form umzusetzen. Wäre der Vorschlag etwa um die Mitte des vorigen Jahrhunderts aufgetaucht, so möchte er auch für den Astronomen discutabel gewesen sein, heute kommt er ohne Zweifel zu spät. Um einigermafsen einen Begriff von der Gröfse der auszuführenden Umrechnung zu geben, sei angeführt, dafs der Fixstern-Katalog der astronomischen Gesellschaft 188000 Positionen, der Pariser Katalog 30000, der Bessel'sche Zonenkatalog 70000, Lalande's Histoire céleste 47000 Positionen enthält. Das sind nur einige wenige der hauptsächlichsten Kataloge. Alle diese Positionen zusammen mit den in den Katalogen angegebenen Hilfsgröfsen (Präcession, Säcular-Variation, Eigenbewegung) wären umzurechnen, ehe sie mit im neuen System angestellten Beobachtungen verglichen und verbunden werden könnten. Das wäre auf dem Gebiete der Stellar-Astronomie auszuführen. Auf dem Gebiete der Planeten-Astronomie würde sich die Arbeit vielleicht noch umständlicher gestalten; hier sind nicht nur die seit Jahrhunderten angehäuften Beobachtungen aller Planeten, sondern auch

die Resultate der Theorie, d. h. die Planetentafeln, einer völligen Umrechnung zu unterwerfen.

Es liegt auch nicht so, dafs mit einer einmaligen Umrechnung dieser Sammelwerke die Arbeit ein- für allemal geleistet wäre, sondern der Fortschritt in der Astronomie bedingt ein fortwährendes Zurückgehen auf die Originalbeobachtungen, aus denen jene Sammelkataloge entstanden. Die Arbeit des Umrechnens würde also eigentlich für den Astronomen niemals ein Ende erreichen.

Gegenüber dieser den Astronomen zugemuteten Arbeitslast kommt anderen Nachteilen ein geringeres Gewicht zu. Doch soll wenigstens noch erwähnt werden, dafs alle mit grofser Mühe fein untersuchten Kreisteilungen, auf denen die Fundamente der Astronomie ruhen, sowie alle Normaluhren, deren Gang durch jahrelange Beobachtungen die erforderliche Vollkommenheit erlangt hat, mit Einführung des neuen Systems antiquirt werden und durch neu zu beschaffende und neu zu untersuchende Kreise und Uhren zu ersetzen sind. Die hierzu erforderlichen Geldmittel und Arbeitskräfte sind keineswegs zu unterschätzen.

Fragen wir nun zum Schlufs, welches der Preis ist, um den die Astronomie alle diese Nachteile auf sich nehmen würde, so kann nur geantwortet werden, dafs der astronomische Rechner in Zukunft von 10 und 40 statt von 9 und 36 abzuziehen haben würde, und dafs bei einigen Interpolationen die Verwandlung in Decimalteile erspart bliebe. Angesichts dessen erscheint es gewifs eine unerhörte Forderung, lediglich deshalb, dafs von einem einzelnen Beruf gewisse, an sich einfache Rechnungen noch leichter ausgeführt werden können, Jahrtausende alte, bewährte, von allen Völkern angenommene und in alle Lebenskreise und Wissenschaften eindringende Cultureinrichtungen beseitigen und durch keineswegs vollkommene ersetzen zu wollen. Der näher liegende Weg erscheint doch der zu sein, die Ausbildung und Einübung der Seeleute so zu vervollkommnen, dafs sie auch die etwas schwierigere Arbeit bewältigen können.

Leitsätze:

I. In der Astronomie kann von den bisherigen Einheiten der Zeit und des Winkels unter keinen Umständen abgegangen werden.

II. Die decimale Unterteilung der bisherigen Einheiten empfiehlt sich nicht für den astronomischen Gebrauch im allgemeinen.

III. Wollen andere Wissenschaften von der decimalen Teilung der bisherigen Einheiten durchgehenden Gebrauch machen, so ist vom astronomischen Standpunkt dagegen um so weniger etwas zu erinnern, als die Astronomen dieselbe schon längst anwenden, wo es zweckmäfsig ist.

---

3. Die Decimalteilung des Winkels vom Standpunkte des Unterrichts.

Von **A. Schülke** in Osterode, Ostpr.

Für den Unterricht kommen bei dieser Frage namentlich zwei verschiedene Gesichtspunkte in Betracht. Einerseits drängt der stetige Fortschritt von Wissenschaft und Technik zu einer immer eingehenderen Behandlung der Mathematik auf dem Gymnasium und verlangt eine immer vollständigere Beherrschung des vorgeschriebenen Unterrichtsstoffes. Andererseits aber warnt der fortwährend ertönende Ruf „Überbürdung" vor einer stärkeren Anspannung der Kräfte und macht es vielmehr dem Lehrer zu einer ernsten Pflicht, jede Vereinfachung anzubringen, die mit dem Lehrziel verträglich ist.

Eine solche Vereinfachung bildet die Decimalteilung des Winkels, für deren Einführung seit längerer Zeit*) ein starkes Bedürfnis besteht. Da es jedoch nicht zweckmäfsig wäre, wenn der Unterricht ohne Fühlung mit der Wissenschaft eigene Wege einschlagen würde, so ist es mit Dank zu begrüfsen, dafs Herr Professor Gutzmer auf der vorigen Naturforscher-Versammlung infolge meiner Anregung die Bildung einer Commission zur Prüfung dieser Frage beantragt hat (Verhandlungen der Gesellschaft D. N. u. Ä. 1898, II. S. 19). Durch die Arbeiten dieser Commission ist die Frage in sehr vollständiger Weise klargelegt. Es hat sich gezeigt, dafs die Wissenschaft solchen Äufserlichkeiten keinen principiellen Wert beilegt, dafs sie vielmehr in jedem Falle die Bezeichnung so wählt, wie es für die besonderen Zwecke angemessen ist. Denn die Geodäsie empfiehlt die Decimalteilung des Quadranten, die Astronomie bleibt bei der bisherigen Sechzigteilung, daneben**) aber verwendet sie — ebenso wie Nautik und Physik — in geeigneten Fällen die Decimalteilung des Grades. Diese Sachlage wird auch durch die internationale Behandlung der Frage, welche 1900 in Paris erfolgen soll, voraussichtlich nicht geändert werden. Es erscheint mir nämlich ausgeschlossen, dafs diejenigen, welche jetzt bereits Decimalteilung benutzen, zu der schwerfälligen alten Bezeichnung zurückkehren; ebensowenig aber werden, selbst wenn Deutschland und Frankreich die Decimalteilung einführen wollten, England und Amerika folgen. Denn die Decimalrechnung ist zwar sehr viel leichter als die Rechnung mit verschiedenen Einheiten, aber sie mufs immerhin gelernt werden, und in Deutschland haben wir gesehen,

---

*) Die geschichtliche Entwickelung dieser Frage habe ich in der Ztschr. f. math. Unt. 1896, S. 339, dargestellt.

**) Siehe den dritten Leitsatz in dem Bericht des Herrn Professor Bauschinger.

wie viel Zeit darüber verging, bis die Kenntnis in das Volk eindrang. Nun sind die Schiffsführer und Steuerleute in England meist keine ausgebildeten Mathematiker, und sie haben bei Längen und Gewichten keine Gelegenheit, die Decimalrechnung zu erlernen. Da aber ein Fehler in der Ortsbestimmung bei der Schiffahrt leicht von verhängnisvollen Folgen begleitet ist, so können England und Amerika mit Rücksicht auf ihren überseeischen Handel die Decimalteilung des Winkels nicht einführen. Aber sollte deshalb unsere Jugend, welche seit fast dreifsig Jahren Decimalrechnung treibt, diesen Vorteil nicht ausnützen dürfen?

Wir können es demnach wohl als Thatsache ansehen, dafs die Wissenschaft auch in der Folgezeit diese drei Teilungen weiter brauchen wird, und zwar überwiegend den alten Grad. Nun läfst sich zwar auf dem Gymnasium die Kenntnis dieser drei Teilungen und ihre Umwandlung in einander übermitteln, aber es ist unmöglich, bei der Rechnung alle drei Arten gleichmäfsig zu berücksichtigen. Wir sind daher gezwungen, zu untersuchen, welche Teilung für Unterrichtszwecke am passendsten ist. Dies ist gestern bereits in der Unterrichtsabteilung geschehen, und wir haben einstimmig einen Beschlufs gefafst, aber wir legen Gewicht darauf, dafs auch die Wissenschaft unsere Gründe kennen und hoffentlich anerkennen wird.

Dabei möchte ich zunächst hervorheben, dafs wir nicht allein spätere Mathematiker auszubilden haben. In Preufsen z. B. beginnen, nach dem Centralblatt der Unterrichts-Verwaltung, jährlich etwa 17 000 Schüler in Untersecunda Trigonometrie, davon verlassen viele schon nach der Abschlufsprüfung die Lehranstalten, nur 5 600 gelangen zur Reifeprüfung, und davon widmen sich 1700 dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften, dem Staatsbau-, Ingenieur- und Bergfach, sowie dem Militärdienst. Nur dieser geringe Bruchteil — in Preufsen*) etwa ein Zehntel der ursprünglichen Zahl — erfährt auf der Hochschule eine Vollendung seiner mathematischen Bildung, für alle übrigen mufs die Schule allein sorgen, und da unterliegt es denn keinem Zweifel, dafs der Unterricht um so mehr Frucht tragen wird, je einfacher und übersichtlicher die Rechnungen sich gestalten, d. h. bei der Decimalteilung des Winkels. Denn die schwerfälligen drei Einheiten (Grad, Minute, Secunde) und die schwierigere Interpolation bei den Secunden bilden keinen geeigneten Bildungsstoff, vor allem aber ein Hindernis für den Anfänger, dessen Gröfse der Fachmann leicht zu unter-

*) In Bayern und Württemberg ist das Verhältnis etwas günstiger, weil die Trigonometrie später beginnt; dafür ist dort bei der geringeren Stundenzahl eine zweckmäfsige Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Zeit um so wichtiger.

schätzen geneigt ist. Die übrigen Vorzüge der Decimalteilung sind gestern bereits in der Unterrichtsabteilung erwähnt worden.

Aber welche Teilung sollen wir wählen? Diese Frage ist nicht damit abgethan, dafs man die Decimalteilung des Grades als Halbheit ablehnt. Auch die jetzige Bezeichnung ist nicht consequent, denn in der ganzen Welt ist bei der Zeit- und Bogensecunde die Zehnteilung üblich, während Ptolemäus in seinem Almagest noch die Secunde in 60 Tertien einteilte. Andererseits ist für viele Zwecke, namentlich in der Astronomie, nicht ein Rechter, sondern vier Rechte die natürliche Einheit. Wir sind aber keine Fanatiker des Zehnersystems, wir wollen nur feststellen, was nützlich und nach der geschichtlichen Entwicklung erreichbar ist, und da kommen die Decimalteilung des Grades und die des Quadranten in die engere Wahl.

Beide geben in rechnerischer Beziehung und bei Umwandlung von Winkel in Zeit die gleichen Vorteile, weil $1\,h = 15^0$, $1^0 = 4$ min., und $1\,h = 16^2/_3\,g = {}^{100}/_6\,g$, $1\,g = 3{,}6$ min. ist. Bei der neuen Teilung ist die Bildung von Complement- und Supplementwinkel etwas bequemer, und ebenso die Bestimmung von Winkeln, die gröfser sind als vier Rechte; aber solche Winkel kommen im Unterricht kaum jemals vor, und sie bilden auch in anderen Fächern wohl nur einen kleinen Bruchteil der Fälle, in denen überhaupt mit Winkeln gerechnet wird. Endlich ist auf der Erdoberfläche 1 g angenähert gleich 100 km. Dagegen hat die neue Teilung den bemerkbaren Nachteil, dafs die häufig vorkommenden Winkel von 30^0 und 60^0 in der unbequemen Form $33^1/_3\,g$ und $66^2/_3\,g$ erscheinen und direct in der Tafel nicht einmal enthalten sind. Sodann sind die Stundenzonen (mitteleuropäische Zeit) $16^2/_3\,g$ statt 15^0 von einander entfernt, und die Seemeile wird $^1/_{54}\,g$ statt $^1/_{60}{}^0$.

Ferner ist für die Wahl von Bedeutung, wie weit die Teilung bisher verbreitet ist, und welche Schwierigkeiten einer weiteren Einführung entgegenstehen, damit nicht die Reform an der „Tücke des Objects“ scheitert. Die neue Teilung hat namentlich in der Geodäsie Eingang gefunden, und zwar in Baden, Hessen und Württemberg, sowie Belgien und Frankreich, mehr als in Preufsen. Dagegen wird die Decimalteilung des Grades in der Astronomie in geeigneten Fällen vielfach benutzt, selbst von den Engländern (z. B. auf der ersten Seite des Nautical Almanac); auch findet sie sich in der Nautik (z. B. im Handbuch der Navigation, herausgegeben vom Reichs-Marine-Amt, und in der Schiffahrtskunde von Bolte, die von dem Director der Seewarte, Herrn Neumayer, mit einem Vorwort versehen ist) und in der Physik (Leitfaden der praktischen Physik von Kohlrausch). Ein ziemlich einwurfsfreier Beweis für die Verbreitung scheint mir aber darin zu liegen, dafs von den beiden bekannten fünfstelligen Logarithmentafeln von

Bremiker und Gaufs, die nahezu gleichzeitig 1872 und 1873 entstanden sind, die neue Teilung von Gaufs im vorigen Jahre die zweite Auflage erfahren hat, Bremiker aber mit der Decimalteilung des Grades in diesem Jahre die achte. Was sodann die Leichtigkeit der Einführung anbetrifft, so ist offenbar die letztere der neuen Teilung überlegen. Denn für die überwiegende Mehrzahl unserer Schüler ist der Anschlufs an die Astronomie, Nautik und Geographie, welche den alten Grad beibehalten, wichtiger, als die Übereinstimmung mit der Geodäsie. Sodann ist bereits, wie das astronomische Jahrbuch und die August'sche Tafel zeigt, die Sitte sehr verbreitet, Secunden durch Bruchteile von Minuten zu ersetzen. Ferner giebt es weite Gebiete, namentlich bei vorbereitenden Rechnungen und in der Technik, in denen eine genaue Winkelbestimmung auf Secunden überhaupt unmöglich ist, und in denen jetzt Grade und Minuten angegeben werden. In allen diesen Fällen ist die Umrechnungsarbeit sehr gering, und sie verschwindet ganz, wenn, wie in geographischen Karten, kleinen trigonometrischen Tabellen und vielen Instrumenten, z. B. Transporteur, Tangentenbussole, nur ganze Grade angegeben sind und bei der Ablesung Zehntel geschätzt werden. Dagegen würde die neue Teilung eine grofse Erschwerung in der Benutzung der Litteratur bedeuten, die Astronomen haben die schon begonnene Einführung wieder aufgegeben, und der Unterricht könnte dieselbe erst dann empfehlen, wenn eine hinreichende Anzahl von bedeutenden Werken, namentlich aus Astronomie, Nautik und Geographie, in der neuen Teilung erschienen wäre.

Wie steht es aber mit der Vorbereitung der künftigen Fachmathematiker? Für diese ist zunächst die Sechzigteilung keine Schwierigkeit, sondern nur eine Frage der Zweckmäfsigkeit. Sodann verlangt die Geodäsie die neue Teilung, die Astronomie die alte; ich darf daher wohl ein physikalisches Gleichnis brauchen. Ein Punkt, der der Wirkung von zwei Kräften ausgesetzt ist, kann keiner von beiden allein folgen, er mufs vielmehr die Richtung der Diagonale einschlagen, und als solch' einen Mittelweg möchte ich die Decimalteilung des Grades bezeichnen. Eine vollkommene Übereinstimmung der Rechnungen im Unterricht mit denen der Wissenschaft ist noch aus einem andern Grunde nicht durchzuführen. Die Wissenschaft braucht häufig, namentlich in der Geodäsie und Astronomie, äufserst genaue Messungen bis auf Bruchteile von Secunden; im Unterricht können wir aber die Erscheinungen immer nur in den Grundzügen besprechen, wir betrachten z. B. die Erde als Kugel, die Erdbahn als Kreis u. s. w. Wenn wir trotzdem die Rechnungen in derselben Genauigkeit durchführen würden, so wäre das ebenso zweckmäfsig, als wenn man Brot mit einem Rasirmesser schneiden wollte.

Von welcher Seite man also auch die Frage in Angriff nehmen

mag, für den Unterricht ist die Decimalteilung des Grades allen übrigen vorzuziehen, und ich glaube, selbst die Anhänger der neuen Teilung könnten dies aus tactischen Gründen vorläufig zugeben. Denn es ist sehr schwer, im Unterricht einschneidende Änderungen zu treffen, und man wird immer besser thun, schrittweise vorzugehen. Und selbstverständlich würde, wenn erst eine gröfsere Zahl von Anstalten zur Decimalteilung des Grades übergegangen ist, die Einführung der neuen Teilung sich leichter vollziehen, als jetzt, — wenn dann überhaupt noch ein Bedürfnis dazu vorhanden sein wird.

Auf jeden Fall erreichen wir durch meinen Vorschlag gegenüber dem gegenwärtigen Zustand erhebliche Vorteile, und ebenso wie bei dem marschirenden Soldaten auch eine geringe Verminderung des Gepäcks eine Vermehrung der Leistungsfähigkeit bedeutet, so ist diese Erleichterung der mechanischen Arbeit für unsere Schüler von grofser Wichtigkeit, zumal es in der Schulmathematik nur wenige Punkte giebt, die überhaupt weggelassen werden können. — Dagegen hat der Unterricht an der Decimalteilung der Zeit kein Interesse, denn die Zahl der Aufgaben, in denen mit Zeit gerechnet wird, ist im Unterricht und im Leben so gering, dafs der erreichte Vorteil in gar keinem Verhältnis zu der Gröfse und Schwierigkeit der Umwandlung stehen würde. Wir müssen also ein Vorgehen in dieser Hinsicht ganz der Astronomie und Nautik überlassen. Wenn Eisenbahnen und Verkehrswesen in der doppelten Zählung der Stunden von 1—12 innerhalb eines Tages Schwierigkeiten finden, so möchte ich vorschlagen, auf diese Gebiete die astronomische Zählung von 1—24 auszudehnen. Denn das bürgerliche Leben verläuft hauptsächlich in den Stunden von 7—12 a und 1—10 p; wenn also überhaupt etwas geändert werden sollte, so erscheint es mir zweckmäfsiger, die fünf Vormittags- als die zehn Nachmittagsstunden abzuändern. Im Unterricht ist jedoch hierzu weder Bedürfnis noch Neigung vorhanden.

Für die zahlreichen Anhänger der alten Teilung zum Schlusse noch zwei Bemerkungen! Ein Vergessen der historischen Teilung ist nicht zu befürchten, die vorhandene Litteratur und der fortwährende Gebrauch in der Astronomie zwingt den Lehrer, in Übungsaufgaben die eine Teilung in die andere umzuwandeln. Auch zeigen die römischen Zahlen, dafs die Kenntnis einer tausendjährigen Gewohnheit nicht erlischt, selbst wenn sie beim Rechnen keine Anwendung mehr findet. Sodann ist es psychologisch leicht zu erklären, dafs man sich viel eher entschliefst, etwas Neues in den Unterricht einzuführen, als etwas Altes, Liebgewordenes aufzugeben. Das Herz hängt am Alten, und scheiden müssen thut weh! Aber davon kommt eben die Überbürdung, dafs wir die Forderungen der Gegenwart berücksichtigen müssen und die der Vergangenheit nicht aufgeben wollen.

Also im Interesse der Einfachheit und Übersichtlichkeit der Rechnungen, in der Absicht, Zeit und Arbeitskraft unserer Schüler für wichtigere Aufgaben zu verwenden, empfehle ich, die alte Sechzigteilung aufzugeben. Aber der Gewinn liegt für den Unterricht nur in der Decimalteilung des Grades; der weitere Übergang zu der des Quadranten würde uns keine Vorteile, wohl aber manche Nachteile bringen. Daher unterbrechen Sie den historischen Zusammenhang nicht weiter, als unbedingt notwendig, lassen Sie uns die Verbindung mit Astronomie, Nautik und Geographie, d. h. lassen Sie uns den bisherigen Grad!

Leitsätze:

I. Für den Unterricht ist die Decimalteilung des alten Grades zu empfehlen.

II. Die Umwandlung der verschiedenen Winkelteilungen in einander ist zu üben.

Discussion.

An diese Vorträge knüpft sich eine eingehende Discussion. Um dieselbe nicht ins Ungemessene anwachsen und dennoch die verschiedenen Meinungen klar zum Ausdruck gelangen zu lassen, wird der Vorschlag des Herrn Geheimrat F. Klein-Göttingen angenommen, vor allem einzelne berufene Vertreter der bei der Frage der Winkel- und Zeitteilung in Betracht kommenden Gebiete zu bitten, sich zur Sache zu äufsern.

Es spricht zunächst:

Herr Prof. Dr. Seeliger, Director der Sternwarte zu München.

Derselbe betont, dafs er im grofsen und ganzen zu demselben Resultat gelangt sei, wie der unmittelbare Vorredner, Herr Schülke. Die Decimalteilung bietet überall so einleuchtende Vorteile dar, dafs darüber Worte zu verlieren unnötig ist. Bei ihrer Einführung wird man sich aber zuerst darüber zu einigen haben, was als die Einheit, welche decimal zu teilen ist, angenommen werden soll. Man wird dabei logische und praktische Gesichtspunkte gelten lassen müssen. Die ersteren scheinen zu erfordern, als Einheit den Winkel zu nehmen, dessen Bogen gleich dem Radius ist. Daran wird aber wohl niemand im Ernste denken, schon in Rücksicht auf trigonometrische Rechnungen nicht. Ist aber ein mathematisch völlig consequentes System nicht anwendbar, so ist es ziemlich gleichgültig, ob man den Quadranten, den halben oder ganzen Umkreis oder endlich irgend einen andern Winkel als decimal zu teilende Einheit wählt. Hier haben nur praktische Gründe zu entscheiden, wobei folgende Gesichtspunkte nicht ohne Wichtigkeit zu sein scheinen.

Die Einführung einer neuen Mafseinheit wird nur dann Nutzen versprechen, wenn Hoffnung auf ihre ganz allgemeine und ausnahmslose Annahme vorhanden ist, und wenn diese Einheit mit anderen Mafseinheiten, mit denen sie fortwährend in Verbindung gebracht wird, in einem bequemen, also einfachen Verhältnis steht. Nun besitzen wir aber in dem Grade eine solche Winkeleinheit, welche alle Culturvölker seit jeher benutzen. Es hiefse alle jene enormen Schwierigkeiten und Verwickelungen, mit welchen neu eingeführte Mafseinheiten — z. B. die metrischen — zu kämpfen hatten, und welche noch immer nicht ganz behoben sind, von neuem heraufbeschwören, wollte man z. B. die Decimalteilung des Quadranten einführen. Man sollte doch froh sein, eine ganz allgemein gebräuchliche Winkeleinheit zu besitzen, und diesen kostbaren Besitz nicht zu gefährden suchen.

Die Beziehung des Winkelmafses zu ändern, insbesondere zum Zeitmafs, ist freilich von dem ersten Herrn Referenten absichtlich bei Seite gelassen worden. Das dürfte aber doch nicht als zulässig erachtet werden. Astronomen, Geographen und nicht selten auch Geodäten können diese Beziehung unmöglich aufser acht lassen. Mit der Einführung der Decimalteilung des Quadranten müfste notwendigerweise die jetzige Stunde als Zeiteinheit durch eine andere Zeiteinheit ersetzt werden. Es bedarf keiner Auseinandersetzung, dafs dies aus Rücksichten auf das praktische Leben geradezu undenkbar ist. In dieser Beziehung dürften übrigens alle Meinungen zusammentreffen. Der Astronom aber hat besondere Ursache, sich gegen eine etwaige Verdrängung des jetzigen Grades energisch zu wehren, da für ihn ein möglichst einfaches Verhältnis des Winkel- und Zeitmafses von der gröfsten Wichtigkeit ist.

Die Schwierigkeiten und Umständlichkeiten, welche dem Astronomen durch irgend eine Veränderung der jetzigen Einteilung des Winkels bereitet werden, hat Herr Prof. Bauschinger lebhaft geschildert, und es ist kein Zweifel, dafs der Astronom nur wünschen kann, dafs alles beim alten bleibe. Andererseits aber glaubt Redner, dafs der allgemeine Wunsch nach einer decimalen Teilung so lebhaft sei, dafs man ihm auf die Dauer nicht werde widerstehen können. Die Beibehaltung des jetzigen Grades und seine decimale Teilung verringert indessen die genannten Schwierigkeiten nicht unerheblich. Dieselbe wird schon seit längerer Zeit, besonders seitdem brauchbare Tafelwerke, z. B. die Bremiker'schen fünfstelligen Tafeln, vorliegen, in der Astronomie thatsächlich benutzt, so in der Doppelstern-Astronomie ziemlich allgemein und mit grofsem Vorteil.

Man kann die Zulassung der Decimalteilung des Winkels mit Beibehaltung des jetzigen Grades als einen Compromifs betrachten. Ohne solche Compromisse geht es aber in keinem Gebiete ab, in welchem sich verschiedene Interessen treffen. Redner hält diesen

Compromifs für die Grenze, bis zu welcher die Astronomen eventuell Entgegenkommen zeigen können, und er glaubt auch, dafs er ausführbar sei. In diesem Sinne also könne er sich den Vorschlägen des Herrn Schülke anschliefsen.

Hierauf erhält das Wort:

Herr Geheimrat W. Foerster, Director der Sternwarte zu Berlin.

Prof. Foerster erklärt als Astronom seine wesentliche Zustimmung zu den Ansichten der Herren Professoren Bauschinger und Seeliger in Betreff der Decimalteilung der Winkel- und der Zeitgröfsen.

Seiner Ansicht nach sind allerdings die Vorzüge der 360-Teilung des Umkreises, der 90-Teilung des Quadranten und der fortgesetzten 60-Teilung des neunzigsten Teiles des Quadranten an sich unerheblich gegenüber dem aufserordentlichen Gewinn an Erleichterung und Sicherung aller trigonometrischen Rechnungsarbeiten, den man durch die 100-Teilung des Quadranten und deren fortgesetzte 100-Teilung erreichen kann.

Gegenüber diesem grofsen dauernden Gewinn würden schliefslich auch die Schwierigkeiten und Aufwendungen nicht entscheidend ins Gewicht fallen, welche durch die Umbildungen der astronomischen Messungseinrichtungen und durch die erforderlichen Umsetzungen eines sehr grofsen Teiles der bereits vorhandenen zahlenmäfsigen Ergebnisse der Astronomie in die neue Teilung bedingt wären, obwohl solche Übergangsnöte in der That unsäglich drückend, trübend und hemmend sehr lange Zeit auf der astronomischen Arbeit lasten würden.

Die Beibehaltung der alten Einteilungsform der Winkelgröfsen in den Mafsbestimmungen der Astronomie, sowie ihrer geodätischen, geophysischen, nautischen und geographischen Anwendungen ist aber nach Prof. Foerster's Ansicht in einer für absehbare Zukunft völlig entscheidenden Weise dadurch geboten, dafs man gar nicht hoffen darf, die gegenwärtige Einteilungsform der Zeitgröfsen, zu welcher die alte Einteilung der Winkelgröfsen ein so einfaches, fast decimales Verhältnis (ein Zehntel plus ein halbes Zehntel) hat, in irgend erheblicher Weise umzugestalten, um sie etwa der 100-Teilung des Quadranten entsprechender zu machen und überhaupt das decimale Einteilungsprincip in ihr zur Geltung zu bringen.

Auf dem Gebiete der Einteilung der Zeitgröfsen ist die Gewohnheitsmacht des ganzen Arbeits- und Verkehrslebens der Menschheit so entscheidend, und andererseits auch die wissenschaftliche Mafsbestimmung so sehr mit den Zeitangaben der Arbeit und des Verkehrs verwachsen, dafs es gänzlich ausgeschlossen erscheint,

in absehbarer Zeit irgendwie eingreifende Veränderungen der Einteilungsform der Zeitgröfsen herbeizuführen.

Hier liegt die Sache anders als auf dem Gebiete der Winkeleinteilung und ganz anders als auf dem Gebiete des Mafs- und Gewichtswesens. Auf letzterem Gebiete hat das decimale metrische System die grofse Wohlthat gebracht, statt der vielen verschiedenen und meistens nicht nach inneren Zweckmäfsigkeits-Gesichtspunkten entstandenen Systeme von Einheiten und Einteilungen eine gemeinsame und an sich zweckentsprechend bedachte Einrichtung zur nahezu einheitlichen Durchführung zu bringen.

Auf dem Gebiete der Zeitmessung sind wir dagegen in der glücklichen Lage, ein der ganzen Culturwelt gemeinsames System der Einteilung und Angabe schon zu besitzen, und zwar ein System, welchem auch viele Gesichtspunkte innerer Zweckmäfsigkeit in nahem Anschlusse an die für die Zeitmessung mafsgebenden Himmelsbewegungen zu Grunde liegen.

Die Culturwelt ist noch nicht im Besitze hinreichender Organisationskraft, um diese so wichtige Gemeinsamkeit in der geltenden Form der Zeitangaben im Hinblick auf eine andere, in manchen Punkten vielleicht zweckmäfsiger erscheinende Form fallen lassen zu können. Ein Versuch dieser Art wäre jetzt nur als ein Abenteuer zu bezeichnen, durch welches aller Voraussicht nach überwiegend Verwirrung angerichtet werden würde.

Hierzu kommt auch noch die Erwägung, dafs die Zeitsecunde der geltenden Einteilungsform gerade jetzt in der Physik, sowie in der gesamten Mechanik und Technik in einer enormen Anzahl von Apparaten, Messungseinrichtungen, Mafsbestimmungen und Festsetzungen zu einer Bedeutung gelangt ist, welche sie früher im menschlichen Arbeitsleben auch nicht entfernt in demselben Grade hatte.

Angesichts aller dieser Erwägungen wirft nun Prof. Foerster die Frage auf, wie sich die deutsche Wissenschaft in Betreff der Einladung Frankreichs zur Beteiligung an einer im nächsten Jahre in Paris zu veranstaltenden internationalen Beratung über decimale Einteilungsformen der Winkel- und der Zeitgröfsen verhalten solle?

In Frankreich sind manche Kreise, denen Gesichtspunkte des nationalen Ruhmes näher liegen als rein wissenschaftliche Gesichtspunkte, von dem wohlverdienten Erfolge, den Frankreich mit der Ausbreitung des metrischen Systems in der Culturwelt erreicht hat, derartig erfüllt, dafs sie das mit dem metrischen System innig verbundene decimale Einteilungsprincip etwas überschätzen oder vielmehr die Schwierigkeiten, welche der universellen und unterschiedslosen Durchführung desselben dauernd entgegenstehen, unterschätzen. Hingegen darf man sicher sein, dafs in der französischen Wissenschaft die Sachlage im wesentlichen ebenso beurteilt wird,

wie in der deutschen Wissenschaft. Es wird aber recht wichtig sein, dafs gegenüber dem Decimal-Enthusiasmus mancher in Frankreich und auch in anderen Ländern lebhaft agitirenden Kreise diese ruhigeren Auffassungen der französischen Wissenschaft unsere ausdrückliche Unterstützung finden.

Aufserdem aber wird nach Prof. Foerster's Ansicht bei einer internationalen Beratung über das vorliegende Thema Gelegenheit zu manchen aufklärenden Erörterungen und zu vielen nützlichen Anregungen sein.

Auch in der Astronomie und in ihren Anwendungen giebt es nicht wenige Gruppen von Fällen, in denen die 100-Teilung des Quadranten von zweifellosem Vorteil ist, insbesondere bei solchen längeren Berechnungen, bei welchen die gemessenen Winkelgröfsen in alter Einteilung blofs die Ausgangspunkte bilden, während innerhalb des ganzen Verlaufes der Rechnung lediglich mit der 100-Teilung operirt werden kann, und erst am Schlusse der Rechnung das Nettoergebnis wieder in die alte Teilung umzusetzen ist.

Durch ein solches Verfahren kann notorisch trotz des Hinzukommens der anfänglichen und der schliefslichen Umsetzung aus der einen Teilung in die andere der Gesamtaufwand an rechnerischer Arbeit und Anstrengung erheblich herabgemindert werden. Hierbei ist es aber recht wesentlich, dafs die tabellarischen oder maschinellen Hilfsmittel für jene Umsetzungen so bequem als irgend möglich eingerichtet werden.

Auch bei der Bearbeitung der mikrometrischen Messungen, aus welchen die Bewegungen in den engeren Sternsystemen rechnerisch abgeleitet werden, kann die 100-Teilung des Quadranten sehr gut Anwendung finden und auch durch die entsprechende Einrichtung der mikrometrischen Apparate, insbesondere durch die Einführung dieser Teilung in den sogenannten Positionskreisen unterstützt werden.

Nach Prof. Foerster's Mitteilung besteht auch bei vielen competenten Geodäten kein Zweifel darüber, dafs die Anwendung der 100-Teilung des Quadranten in der ganzen sogenannten niederen Geodäsie für die Messungen und besonders für die Berechnungen entscheidende Vorzüge darbietet und sich in denjenigen Ländergebieten, in welchen sie schon seit längerer Zeit eingeführt ist, durchaus bewährt hat, wogegen in der höheren Geodäsie wegen der näheren Verbindung mit der Astronomie und der Zeitmessung an der alten Teilung festzuhalten sein würde.

Recht nützlich würde es sein, wenn gerade im Hinblick auf gemischte Anwendungen der alten Winkelteilung und der 100-Teilung des Quadranten internationale Vereinbarungen über die zweckmäfsigste, volle und abgekürzte, Bezeichnung der letzteren Einteilungsstufen getroffen werden könnten.

Es wird auch gewisse Anwendungsgebiete geben, in denen decimale Einteilungen gewisser Einheitsstufen der jetzt noch geltenden alten Einteilungsformen von zweifellosem Vorteil sind, z. B. die decimale Einteilung des Grades und der Stunde in ähnlicher Weise, wie man schon seit längerer Zeit auf die fortgesetzte 60-Teilung der Secunde verzichtet und diese Einheit decimal eingeteilt hat. Auch für die Anwendung der Decimalteilung des Grades giebt es in der Astronomie schon bewährte Beispiele.

Es ist einleuchtend, dafs nähere Verständigungen über solche partielle Erleichterungen, unter Vermeidung jeglichen verallgemeinernden Zwanges, recht nützlich sein können.

Auch weist Prof. Foerster schliefslich darauf hin, dafs eine internationale Beratung über die ganze Gruppe von Fragen, welche sich auf Winkel- und Zeitangaben beziehen, für die Gesamtheit förderlich werden kann, z. B. hinsichtlich der noch immer nicht ganz allgemein angenommenen Einführung der Greenwicher Zeit als Grundlage der Zeitangaben in allen Ländern und hinsichtlich der ferneren Entwickelung der gegenwärtigen Übergangszustände dieser Einrichtungen, endlich auch auf dem Gebiete der kalendarischen Einrichtungen u. s. w.

Als Vertreter der Nautik stimmt Herr Geheimer Admiralitätsrat Dr. Neumayer zu Hamburg diesen Ausführungen zu und hebt insbesondere hervor, dafs die Nautik gar kein Interesse daran habe, die jetzt übliche Zeiteinteilung zu ändern.

Den Standpunkt der reinen Mathematik zur Decimalteilung bringt hierauf Herr Geheimrat F. Klein-Göttingen zum Ausdruck, indem er ausführt, dafs die abstracte Mathematik an der wesentlich praktischen Frage sehr wenig beteiligt sei.

Von den Vertretern der Physik spricht zunächst:

Herr Hofrat Prof. Dr. Boltzmann-Wien.

Er bemerkte etwa folgendes: Gerade so wie die Mathematiker dürften auch die Physiker kein sehr actuelles Interesse an der Frage der Kreisteilung haben. Für sie hat die gegenwärtige Kreiseinteilung keine erheblichen Unbequemlichkeiten; andererseits haben sie kein so grofses Tafel- und Zahlenmaterial wie die Astronomen. Sie würden sich also einer anderen Kreiseinteilung, falls eine solche mit Rücksicht auf die Geodäten und andere Praktiker beschlossen würde, ohne allzu grofse Schwierigkeiten anschliefsen können. Einigen Nutzen hätte für den Physiker die Decimalteilung des Grades. Dagegen erscheint es sehr unwesentlich, ob der Quadrant in 90 oder 100 Teile geteilt wird. Es dürfte auch für die Geodäten nur die Decimalteilung des Grades, nicht die Hundertteilung des Quadranten

von praktischem Nutzen sein. Jedenfalls scheinen Prof. Boltzmann die Nachteile, die aus einer Störung der gegenwärtig herrschenden Einheitlichkeit der Kreiseinteilung sich ergeben würden, viel gröfser als die Vorteile einer Hundertteilung des Quadranten. Die Secunde als Zeiteinheit aufzugeben, würden sich die Physiker wohl nur schwer entschliefsen, da fast alle physikalischen Grundeinheiten auf der Secunde als Zeiteinheit basiren.

Herr Prof. Dr. E. Warburg, Director des Physikalischen Instituts zu Berlin, spricht sich im Anschlufs hieran dahin aus, dafs die Decimalteilung der Zeitgröfsen unbedingt abzulehnen sei, und dafs auch die Decimalteilung des Quadranten eine nicht zu empfehlende Neuerung bilde. Anders verhalte es sich mit der bereits vielfach geübten Decimalteilung des Grades. Jedoch liege weniger daran, wie entschieden werde, als dafs einstimmig entschieden werde, und dafs nicht verschiedenartige Kreisteilungen im Gebrauch seien. Schon aus diesem Grunde erscheine es zunächst notwendig, die Ansichten namhafter Präcisionsmechaniker einzuholen, wozu eine Gelegenheit sich bald bieten werde.

Vom Standpunkte des Geodäten äufsert sich nunmehr:

Herr Prof. Dr. Max Schmidt-München.

Seines Wissens habe man bei geodätischen und catastertechnischen Messungen und Berechnungen, bei welchen die centesimale Winkelteilung bereits seit längerer Zeit in Gebrauch sei, mit dieser Art der Gradteilung nur günstige Erfahrungen gemacht. Gleichwohl teile er persönlich die von den Herren Foerster und Seeliger gegen die allgemeine Einführung der Decimalteilung geäufserten Bedenken, würde es aber im Falle der Beibehaltung der alten Gradteilung auf Grund seiner als praktischer Rechner mit der sexagesimalen und decimalen Einteilung des Grades gemachten Erfahrungen für sehr zweckmäfsig und erwünscht erachten, die Unterabteilungen des Grades wesentlich decimal zu gliedern, da hierdurch nicht unwesentliche Vorteile für das trigonometrische Zahlenrechnen zu erreichen seien.

Herr Prof. Dr. R. Mehmke-Stuttgart stellt, da ihm die Ausführungen des Herrn Foerster namentlich gegen den Schlufs den Eindruck erweckt zu haben scheinen, als ob derselbe gegen die neue Winkelteilung (Decimalteilung des Quadranten) spreche, zunächst fest, dafs derselbe dafür gesprochen habe. Ferner führt Prof. Mehmke aus, dafs seines Wissens noch niemand den Astronomen zugemutet habe, die in so grofser Zahl vorhandenen (mit Instrumenten alter Teilung gemachten) früheren Beobachtungen in Angaben nach neuer Teilung umzuwandeln; sollten sie sich aber je dazu ent-

schliefsen, so würde dadurch auf keinen Fall, wie Herr Bauschinger behaupte, alle wissenschaftliche Arbeit auf zehn Jahre unmöglich gemacht werden, denn die fragliche Umwandlung könnte durch untergeordnete Hilfskräfte geschehen. Aufserdem liefse sich für diesen Zweck eine Specialrechenmaschine construiren von der Art, dafs nach Niederdrücken der Tasten, welche einer Winkelangabe in alter Teilung entsprechen, im Zählwerk der Maschine der gesuchte Winkelausdruck in neuer Teilung erscheint. Man könnte sogar eine Druckvorrichtung für die Resultate anbringen. Eine solche Maschine würde nicht einmal sehr teuer kommen. — Schliefslich äufsert Prof. Mehmke, dafs in den Kreisen der Geodäten und namentlich der Mechaniker die von Herrn Dr. Schülke befürwortete Decimalteilung des alten Grades auf keine Zustimmung werde rechnen können. Viele mechanische Institute haben ihre Teilmaschinen auch für neue Winkelteilung eingerichtet, so dafs sie Theodoliten nach dieser Teilung ebenso leicht liefern können wie solche nach alter Teilung (die physikalisch-technische Reichsanstalt ist seit 1891 in der Lage, entsprechende Mutterteilungen für Teilmaschinen zu liefern), wenn aber jetzt eine dritte Art der Winkelteilung eingeführt werden sollte, so würden die mechanischen Institute nicht sehr erbaut davon sein.

Zu diesen letzteren Ausführungen ergreift hierauf Herr Ludwig Tesdorpf-Stuttgart als Vertreter der Präcisionsmechaniker das Wort. Derselbe schickte voraus, dafs er bezüglich der eventuellen Stellungnahme der deutschen Präcisionsmechaniker zu der behandelten Frage noch auf demselben Standpunkte stehe wie seinerzeit auf dem Mechanikertage zu Bremen. Die ausführenden Techniker müfsten sich in dieser Angelegenheit neutral verhalten und dürften den Anforderungen der Wissenschaft in keiner Weise hinderlich entgegentreten. Den Mechanikern genügen die alte Sexagesimalteilung und die neue Decimalteilung des Quadranten vollständig; von dieser Seite liege kein Streben vor, sich die Arbeit durch weitere Teilungsarten zu erschweren. Wenn jedoch die Wissenschaft auf die angeregte Decimalteilung des alten Grades Wert legen sollte, so würden die Präcisionsmechaniker auch vor dieser Anforderung nicht zurückschrecken.

Der stellvertretende Vorsitzende, Herr Geheimrat F. Klein-Göttingen, fafst das Ergebnis der heutigen Discussion in einem Schlufswort dahin zusammen, dafs sich eine weitgehende Übereinstimmung der Ansichten ergeben habe. Er beantragt:

Die Versammlung wolle beschliefsen, dafs die Deutsche Mathematiker-Vereinigung über die heutige gemeinsame Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe einen

ausführlichen Bericht erstatten und denselben im Namen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte Seiner Durchlaucht dem Herrn Reichskanzler unterbreiten möge mit dem Ersuchen, zu dem im nächsten Jahre zu Paris stattfindenden Congrefs betreffend die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen Sachverständige zu entsenden, die sich zuvor über die in den verschiedenen Fachkreisen herrschenden Auffassungen, wie sie in der heutigen Besprechung zu Tage getreten sind, allseitig informiren müfsten.

Dieser Antrag wird einstimmig angenommen*).

Über Riemann's Vorlesungen von 1861—62 über Abel'sche Functionen.

Von **M. Noether** in Erlangen.

Der Vortragende bespricht den Schlufsteil dieser Vorlesungen, von welchen noch vollständige Nachschriften von Prym und Minnigerode existiren, die ihm freundlichst zur Verfügung gestellt worden sind. Durch die im Februar 1862 dreistündig, im März bis zum 10. täglich gehaltenen Vorlesungen erfährt die bisherige einzige Veröffentlichung aus diesen Partien, nämlich der von Hrn. H. Weber in die Werke aufgenommene Aufsatz über die Abel'schen Functionen für den Fall $p = 3$, wesentliche Ergänzungen. Dieselben beziehen sich in erster Linie auf die Charakteristikentheorie; sie zeigen u. a., dafs Riemann wenigstens für $p = 3$ die Definition eines Systems von sieben Gruppencharakteristiken mit der Summe 0 durch die Eigenschaft, dafs sie zu je zweien „azygetisch" (nach einem neueren Sprachgebrauch) sein sollen, in der That besafs, und dafs er für $p = 3$ überhaupt alle Kernpunkte der neueren Charakteristikentheorien, unter Vermeidung nicht-invarianter Elemente, gekannt hat — freilich zunächst nur unter inductiven Schlüssen. Sie beziehen sich weiterhin auf einen grofsen Teil der Theorien, welche später von Hrn. H. Weber in seiner Preisschrift über den Fall $p = 3$ wiederum gefunden worden sind: so auf die einfache algebraische Darstellung von Thetaquotienten, deren Argumente Summen von $2p - 2$ Integralen erster Gattung sind, insbesondere für $p = 3$ auf die Darstellung der Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente durch die sechs algebraischen Moduln, und auf deren Umkehrung.

Interessant ist ferner, zu beobachten, wie die 1865 publicirten

*) Wie auf S. 6 dieses Jahresberichtes bemerkt ist, hat der Vorstand seinen Auftrag unmittelbar nach der Versammlung erledigt.

Sätze über das identische Verschwinden der Thetafunctionen hier inductiv am hyperelliptischen Falle entstehen; vor allem aber die Aufstellung der (später auch von Frobenius abgeleiteten) Formel, welche für $p = 3$ die Determinante aus den Differentialquotienten dreier ungerader (azygetischer) Thetafunctionen als Product von fünf geraden Thetafunctionen, für die Nullwerte der Argumente, ausdrückt.

Es ist beabsichtigt, den besprochenen Teil der Riemann'schen Vorlesungen im Wortlaut zu veröffentlichen.

Über die symmetrischen Functionen.

Von **P. Gordan** in Erlangen.

Hat man 2 Gleichungen

$$f_1 = x^m + a_1 x^{m-1} \dots a_m = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m)$$
$$f_2 = x^n + b_1 x^{n-1} \dots b_n = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n),$$

so heifst das Doppelproduct

$$\prod_{i,\varkappa} (\alpha_i - \beta_\varkappa)$$

die Resultante.

Es ist symmetrisch in den α und in den β und daher eine ganze Function der Coefficienten a und b. Gewöhnlich stellt man sie als solche durch die Determinanten von Bezout und Sylvester dar. Diese Methode lehrt uns die Eigenschaften der Resultante kennen und genügt auch in einfachen Fällen zur Berechnung ihres Wertes. Sie versagt aber, wenn die Zahlen m und n wachsen, da hierdurch die Anzahl der Reihen in den Determinanten gleichfalls wächst.

In diesem Falle ist es von Vorteil, die Resolventen-Methode anzuwenden.

Die Resolvente φ

$$\varphi = \prod_{i,\varkappa} \left(x - \frac{\beta_\varkappa}{\alpha_i}\right) = x^{mn} + c_1 x^{mn-1} \dots c_{mn}$$

habe die Coefficienten c_ϱ; in ihnen lautet der Wert der Resultante

$$R = (-1)^{mn} a_m^n \sum c \, .$$

Die Newton'schen Formeln werden gewöhnlich dazu benutzt, die Summen der Potenzen der Wurzeln α

$$s_k(a) = \alpha_1^g + \alpha_2^g \dots \alpha_m^g$$

einer Gleichung

$$x^m + a_1 x_1^{m-1} \dots a_m = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m)$$

aus ihren Coefficienten a zu bestimmen; man kann sie aber auch so verwerten, dafs man umgekehrt die Coefficienten a aus den Potenzsummen $s_g(a)$ der Reihe nach berechnet.

Für unsere Resolvente berechnet man die Potenzsummen $s_g(c)$ aus der Formel

$$s_g(c) = \sum_{i,\varkappa} \frac{\beta_\varkappa^g}{\alpha^g} = s_g(b)\, s_{-g}(a)$$

und aus ihnen die c und R.

Man kann aber auch eine Endformel für die Resultante aufstellen. Setzt man nämlich:

$$F = 1 + a_1 x + a_2 x^2 \dots \; a_m x^m = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \dots (1 - \alpha_m x)$$

$$\vartheta = - \log F,$$

so wird:

$$\vartheta = \sum_g s_g(a) \frac{x^g}{g}$$

$$F = e^{-\vartheta} = \sum (-1)^h \frac{x^h}{h!} = \sum \eta_\varkappa s_1(a)^{\varkappa_1} s_2(a)^{\varkappa_2} \dots x^g,$$

wo:

$$\eta_\varkappa = \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \dots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \dots}; \quad h = \varkappa_1 + \varkappa_2 \dots, \quad g = \varkappa_1 + 2\varkappa_2 \dots$$

Vergleicht man auf beiden Seiten die Coefficienten der Potenzen x^g, so wird:

$$a_g = \sum \eta_\varkappa s_1(a)^{\varkappa_1} s_2(a)^{\varkappa_2} \dots$$

Für die Coefficienten c unserer Resolvente ergeben sich die Werte:

$$c_g = \sum_\varkappa \eta_\varkappa \, s_1(c)^{\varkappa_1} \, s_2(c)^{\varkappa_2} \dots$$

Trägt man sie in R ein, so wird:

$$R = (-1)^{mn} a_m^n \sum_\varkappa \frac{(-1)^{\varkappa_1 + \varkappa_2 \dots}}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \dots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \dots} \Big(s_{-1}(a)\, s_1(b)\Big)^{\varkappa_1} \Big(s_{-2}(a)\, s_2(b)\Big)^{\varkappa_2} \dots$$

Es genügt, die Summe über die $\varkappa$ auszudehnen, bei denen:

$$\varkappa_1 + 2\varkappa_2 \dots \dots \leq mn$$

ist. Die übrigen Glieder heben sich weg.

Über homogene Functionen.

Von **P. Gordan** in Erlangen.

Der Vortragende betrachtete Systeme S von Producten

$$R = x_1^{\varkappa_1}\, x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}.$$

Ein solches System besteht aus denjenigen R, bei denen die Exponenten $\varkappa$ durch gegebene Relationen verknüpft sind. Es wurde gezeigt, dafs man für jedes S ein Teilsystem Σ bestimmen kann:

$$\Sigma : P_1, P_2, \ldots,$$

das die drei Eigenschaften besitzt:

1. Die Anzahl der Producte P ist endlich.
2. Keines der P ist durch ein anderes teilbar.
3. Jedes R in S ist durch mindestens eines der P teilbar.

In weiterer Ausführung wird der Vortrag an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Über den Zahlbegriff.

Von **David Hilbert** in Göttingen.

Wenn wir in der Litteratur die zahlreichen Arbeiten über die Principien der Arithmetik und über die Axiome der Geometrie überschauen und mit einander vergleichen, so nehmen wir neben zahlreichen Analogien und Verwandtschaften dieser beiden Gegenstände doch hinsichtlich der Methode der Untersuchung eine Verschiedenheit wahr.

Vergegenwärtigen wir uns zunächst die Art und Weise der Einführung des Zahlbegriffes. Ausgehend von dem Begriff der Zahl 1, denkt man sich gewöhnlich durch den Procefs des Zählens zunächst die weiteren ganzen rationalen positiven Zahlen 2, 3, 4 . . . entstanden und ihre Rechnungsgesetze entwickelt; sodann gelangt man durch die Forderung der allgemeinen Ausführung der Subtraction zur negativen Zahl; man definirt ferner die gebrochene Zahl, etwa als ein Zahlenpaar — dann besitzt jede lineare Function eine Nullstelle —, und schliefslich die reelle Zahl als einen Schnitt oder eine Fundamentalreihe — dadurch erreicht man, dafs jede ganze rationale indefinite, und überhaupt jede stetige indefinite Function eine Nullstelle besitzt. Wir können diese Methode der Einführung des Zahlbegriffs die *genetische Methode* nennen, weil der allgemeinste Begriff der reellen Zahl durch successive Erweiterung des einfachen Zahlbegriffes erzeugt wird.

Wesentlich anders verfährt man beim Aufbau der Geometrie. Hier pflegt man mit der Annahme der Existenz der sämtlichen Elemente zu beginnen, d. h. man setzt von vorne herein drei Systeme von Dingen, nämlich die Punkte, die Geraden und die Ebenen, und bringt sodann diese Elemente — wesentlich nach dem Vorbilde von Euklid — durch gewisse Axiome, nämlich die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Congruenz und der Stetigkeit*), mit einander in Beziehung. Es entsteht dann die notwendige Aufgabe, die Widerspruchslosigkeit und Vollständigkeit dieser Axiome zu zeigen, d. h. es mufs bewiesen werden, dafs die Anwendung der aufgestellten Axiome nie zu Widersprüchen führen kann, und ferner, dafs das System der Axiome zum Nachweis aller geometrischen Sätze ausreicht. Wir wollen das hier eingeschlagene Untersuchungsverfahren die *axiomatische Methode* nennen.

Wir werfen die Frage auf, ob wirklich die genetische Methode gerade für das Studium des Zahlbegriffs, und die axiomatische Methode für die Grundlagen der Geometrie die allein angemessene ist; auch scheint es von Interesse, beide Methoden gegenüberzustellen und zu untersuchen, welche Methode die vorteilhaftere ist, wenn es sich um die logische Untersuchung der Grundlagen der Mechanik oder anderer physikalischer Disciplinen handelt.

Meine Meinung ist diese: Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug.

In der Theorie des Zahlbegriffes gestaltet sich die axiomatische Methode wie folgt:

Wir denken ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit $a, b, c, \dots$ Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht:

I. *Axiome der Verknüpfung.*

I 1. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht durch „Addition" eine bestimmte Zahl c, in Zeichen:

$$a + b = c \quad \text{oder} \quad c = a + b.$$

I 2. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, so existirt stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so dafs

$$a + x = b \quad \text{bezw.} \quad y + a = b$$

wird.

*) Vergl. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Enthüllung des Gaufs-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig 1899.

I 3. Es giebt eine bestimmte Zahl — sie heifse 0 —, so dafs für jedes a zugleich

$$a + 0 = a \quad \text{und} \quad 0 + a = a$$

ist.

I 4. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht noch auf eine andere Art, durch „Multiplication“ eine bestimmte Zahl c, in Zeichen:

$$ab = c \quad \text{oder} \quad c = ab.$$

I 5. Wenn a und b beliebig gegebene Zahlen sind, und a nicht 0 ist, so existirt stets eine und nur eine Zahl x, und auch eine und nur eine Zahl y, so dafs

$$ax = b \quad \text{bezw.} \quad ya = b$$

wird.

I 6. Es giebt eine bestimmte Zahl — sie heifse 1 —, so dafs für jedes a zugleich

$$a \cdot 1 = a \quad \text{und} \quad 1 \cdot a = a$$

ist.

II. *Axiome der Rechnung.*

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Formeln:

II 1. $a + (b + c) = (a + b) + c$

II 2. $a + b = b + a$

II 3. $a(bc) = (ab)c$

II 4. $a(b + c) = ab + ac$

II 5. $(a + b)c = ac + bc$

II 6. $ab = ba.$

III. *Axiome der Anordnung.*

III 1. Wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen sind, so ist stets eine bestimmte von ihnen (etwa a) gröfser ($>$) als die andere; die letztere heifst dann die kleinere, in Zeichen:

$$a > b \quad \text{und} \quad b < a.$$

III 2. Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.

III 3. Wenn $a > b$ ist, so ist auch stets

$$a + c > b + c \quad \text{und} \quad c + a > c + b.$$

III 4. Wenn $a > b$ und $c > 0$ ist, so ist auch stets

$$ac > bc \quad \text{und} \quad ca > cb.$$

IV. *Axiome der Stetigkeit.*

IV 1. (Archimedisches Axiom.) Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addiren, dafs die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a + a + \cdots + a > b.$$

IV 2. (Axiom der Vollständigkeit.) Es ist nicht möglich, dem Systeme der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so dafs auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome I, II, III, IV 1 sämtlich erfüllt sind; oder kurz: die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Einige der Axiome I 1—6, II 1—6, III 1—4, IV 1—2 sind Folgen der übrigen, und es entsteht so die Aufgabe, die logische Abhängigkeit der genannten Axiome zu erörtern. Für die Untersuchung der Principien der Arithmetik liefert diese Aufgabe manchen neuen und fruchtbaren Gesichtspunkt. Wir erkennen beispielsweise folgende Thatsachen:

Die Existenz der Zahl 0 (Axiom I 3) ist eine Folge der Axiome I 1, 2 und II 1; sie beruht also wesentlich auf dem associativen Gesetz der Addition.

Die Existenz der Zahl 1 (Axiom I 6) ist eine Folge der Axiome I 4, 5 und II 3; sie beruht also wesentlich auf dem associativen Gesetz der Multiplication.

Das commutative Gesetz der Addition (Axiom II 2) ist eine Folge der Axiome I, II 1, 4, 5; dasselbe erscheint also im wesentlichen als eine Folge des associativen Gesetzes der Addition und der beiden distributiven Gesetze.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}(a+b)(1+1) &= (a+b)1 + (a+b)1 = a+b+a+b, \\ &= a(1+1) + b(1+1) = a+a+b+b;\end{aligned}$$

folglich

$$a + b + a + b = a + a + b + b,$$

und daher nach I 2

$$b + a = a + b.$$

Das commutative Gesetz der Multiplication (Axiom II 6) ist eine Folge der Axiome I, II 1—5, III, IV 1, dagegen nicht schon eine Folge der Axiome I, II 1—5, III; jenes Gesetz kann hiernach aus den übrigen Axiomen dann und nur dann gefolgert werden, wenn man das Archimedische Axiom (Axiom IV 1) hinzuzieht. Diese Thatsache hat für die Grundlagen der Geometrie eine besondere Bedeutung.*)

*) Vgl. D. Hilbert l. c. Kap. VI.

Die Axiome IV 1 und IV 2 sind von einander unabhängig; sie enthalten keine Aussage über den Begriff der Convergenz oder über die Existenz der Grenze, und dennoch folgt, wie man zeigen kann, aus ihnen der Bolzano'sche Satz von der Existenz der Verdichtungsstelle. Wir erkennen mithin die Übereinstimmung unseres Zahlensystems mit dem gewöhnlichen Systeme der reellen Zahlen.

Um die Widerspruchslosigkeit der aufgestellten Axiome zu beweisen, bedarf es nur einer geeigneten Modification bekannter Schlufsmethoden. In diesem Nachweise erblicke ich zugleich den Beweis für die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen oder — in der Ausdrucksweise G. Cantor's — den Beweis dafür, dafs das System der reellen Zahlen eine consistente (fertige) Menge ist.

Die Bedenken, welche gegen die Existenz des Inbegriffs aller reellen Zahlen und unendlicher Mengen überhaupt geltend gemacht worden sind, verlieren bei der oben gekennzeichneten Auffassung jede Berechtigung: unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns hiernach nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Gesetze zu denken, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern vielmehr — wie eben dargelegt ist — ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch das obige *endliche und abgeschlossene* System von Axiomen I—IV gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur Gültigkeit haben, falls man sie mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann.

Würden wir in ähnlicher Weise den Beweis für die Existenz eines Inbegriffs aller Mächtigkeiten (oder aller Cantor'schen Alephs) erbringen wollen, so würde dieser Versuch mifslingen: in der That der Inbegriff aller Mächtigkeiten existirt nicht, oder — in der Ausdrucksweise G. Cantor's — das System aller Mächtigkeiten ist eine nichtconsistente (nichtfertige) Menge.

Göttingen, den 12. October 1899.

Über das Dirichlet'sche Princip.

Von **David Hilbert** in Göttingen.

Das Dirichlet'sche Princip ist eine Schlufsweise, welche Dirichlet — durch einen Gedanken von Gaufs veranlafst — zur Lösung der sogenannten Randwertaufgabe angewandt hat, und die sich kurz wie folgt charakterisiren läfst. Man errichte auf der xy-Ebene in den Punkten der gegebenen Randcurve Lote und trage auf diesen die betreffenden Randwerte ab. Unter den Flächen $z = f(x, y)$, die von der so entstehenden Raumcurve berandet sind, denke man sich eine solche Fläche ausgesucht, für welche der Wert des Integrals

$$J(f) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

ein Minimum ist. Diese Fläche ist, wie man leicht vermöge der Variationsrechnung zeigt, notwendig eine Potentialfläche. Mit dem Hinweise auf eine Betrachtung solcher Art hat Riemann den Beweis der Existenz der Lösung der Randwertaufgabe für erledigt gehalten und dann unbedenklich seine grofsartige Theorie der Abelschen Functionen hierauf begründet.

Es ist zuerst von Weierstrafs erkannt worden, dafs die hier angewandte Schlufsweise des Dirichlet'schen Princips nicht stichhaltig ist: in der That, wäre nur eine endliche Anzahl von Zahlwerten vorgelegt, so dürften wir ohne weiteres schliefsen, dafs es unter ihnen einen kleinsten Zahlwert giebt; unter einer unbegrenzten Anzahl von Zahlwerten jedoch braucht ein kleinster Zahlwert nicht notwendig vorhanden zu sein; es bedarf vielmehr eines besonderen Beweises, dafs in dem erörterten Falle thatsächlich eine Fläche $z = f(x, y)$ existirt, für welche der zugehörige Integralwert $J(f)$ ein kleinster ist.

Die wichtigen Untersuchungen von C. Neumann, H. A. Schwarz und H. Poincaré haben gezeigt, dafs unter gewissen sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Natur der Randcurve und der Randwerte die Randwertaufgabe gewifs lösbar ist, und dadurch ist auf dem umgekehrten Wege die Existenz jener Minimalfunction $f(x, y)$ sichergestellt.

Das Dirichlet'sche Princip verdankte seinen Ruhm der anziehenden Einfachheit seiner mathematischen Grundidee, dem unleugbaren Reichtum der möglichen Anwendungen auf reine und physikalische Mathematik und der ihm innewohnenden Überzeugungskraft. Aber seit der Weierstrafs'schen Kritik fand das Dirichlet'sche Princip nur noch historische Würdigung und erschien jedenfalls als Mittel zur Lösung der Randwertaufgabe abgethan. Bedauernd spricht C. Neumann aus, dafs das so schöne und dereinst so viel benutzte Dirichlet'sche Princip jetzt wohl für immer dahingesunken sei; nur A. Brill und M. Noether rufen neue Hoffnung in uns wach, indem sie der Überzeugung Ausdruck geben, dafs das Dirichlet'sche Princip, gewissermafsen der Natur nachgebildet, vielleicht in modificirter Fassung einmal eine Wiederbelebung erfährt.

Das folgende ist ein Versuch der Wiederbelebung des Dirichlet'schen Princips.

Indem wir bedenken, dafs die Dirichlet'sche Aufgabe nur eine besondere Aufgabe der Variationsrechnung ist, gelangen wir dazu, das Dirichlet'sche Princip in folgender allgemeineren Form auszusprechen:

Eine jede Aufgabe der Variationsrechnung besitzt eine Lösung, sobald hinsichtlich der Natur der gegebenen Grenz-

bedingungen geeignete einschränkende Annahmen erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäfse Erweiterung erfährt.

Wie uns dieses Princip als Leitstern zur Auffindung von strengen und einfachen Existenzbeweisen dienen kann, zeigen folgende zwei Beispiele:

I. Auf einer gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ zwischen zwei gegebenen Punkten P und $P^{(1)}$ die kürzeste Linie zu ziehen.

Es sei l die untere Grenze für die Längen aller Curven auf der Fläche zwischen den beiden gegebenen Punkten. Aus der Gesamtheit dieser Verbindungscurven suchen wir solche Curven C_1, C_2, C_3, ... aus, deren Längen L_1, bezw. L_2, L_3 ... sich der Grenze l nähern. Auf C_1 tragen wir von P aus die Länge $\frac{1}{2}L_1$ ab und erhalten dadurch auf C_1 den Punkt $P_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}$; sodann tragen wir von P aus auf C_2 die Länge $\frac{1}{2}L_2$ ab bis $P_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, ferner auf C_3 die Länge $\frac{1}{2}L_3$ bis $P_3^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ u. s. f. Die Punkte $P_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, $P_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, $P_3^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, ... mögen etwa den Punkt $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ als eine Verdichtungsstelle haben, wo $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ wiederum ein Punkt der Fläche $z = f(x, y)$ ist.

Das nämliche Verfahren, welches wir soeben auf die Punkte P und $P^{(1)}$ angewandt haben, und das uns auf einen Punkt $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ führte, wenden wir nunmehr auf die Punkte P und $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ an und gelangen dadurch zu einem Punkte $P^{\left(\frac{1}{4}\right)}$ auf der gegebenen Fläche. Desgleichen erhalten wir einen Punkt $P^{\left(\frac{3}{4}\right)}$ der gegebenen Fläche, wenn wir das genannte Verfahren auf die Punkte $P^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ und $P^{(1)}$ anwenden. Entsprechend finden wir die Punkte $P^{\left(\frac{1}{8}\right)}$, $P^{\left(\frac{3}{8}\right)}$, $P^{\left(\frac{5}{8}\right)}$, $P^{\left(\frac{7}{8}\right)}$, $P^{\left(\frac{1}{16}\right)}$, ... Diese sämtlichen Punkte und ihre Verdichtungsstellen bilden auf der Fläche $z = f(x, y)$ eine stetige Curve, welche die gesuchte kürzeste Linie ist.

Der Nachweis für diese Thatsache wird leicht geführt, wenn man die Curvenlänge als Grenzwert der Längen einbeschriebener Polygonzüge definirt. Wie wir zugleich sehen, genügt für unsere Betrachtung die Annahme, dafs die gegebene Function $f(x, y)$ nebst dem ersten Differentialquotienten nach x und nach y stetig ist.

II. Eine Potentialfunction $z = f(x, y)$ zu finden, die auf einer gegebenen Randcurve in der xy-Ebene gegebene Randwerte annimmt.

Der Einfachheit halber setzen wir für die gegebene Randcurve stetige Tangente und Krümmung, und für die Randwerte eine stetige Ableitung voraus. Wir stellen uns nun die zu Anfang dieses

Vortrags erwähnte Raumcurve her und bestimmen dann einen festen dieser Raumcurve eigentümlichen Winkel φ von folgender Beschaffenheit: wenn $z = F(x, y)$ irgend eine analytische oder stückweise analytische Fläche ist, deren Rand durch die Raumcurve gebildet wird, so läfst sich aus $z = F(x, y)$ stets eine Fläche $z = \hat{F}(x, y)$ construiren, so dafs der zu $z = \hat{F}(x, y)$ gehörige Integralwert $J(\hat{F})$ kleiner oder gleich dem zu $z = F(x, y)$ gehörigen Integralwert $J(F)$ wird, und zugleich $z = \hat{F}(x, y)$ an keiner Stelle eine Tangente besitzt, deren Winkel mit der xy-Ebene gröfser als φ ausfällt. Man gelangt zu einem solchen Winkel φ, indem man diejenigen Stellen ins Auge fafst, an denen die Stärke des Abfalles der Fläche $z = F(x, y)$ gegen die xy-Ebene (d. h. die Gröfse arctang $\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$) eine gewisse Gröfse überschreitet, und zeigt, dafs die Fläche $z = F(x, y)$ in der Umgebung dieser Stellen stets durch ein Stück einer Ebene

$$z = ax + by + c$$

oder (am Rande) durch ein Stück einer trichterförmigen Potentialfläche

$$z = \frac{a(x+\alpha) + b(y+\beta)}{(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2} + c$$

ersetzt werden kann — unter a, b, c, α, β solche Constante verstanden, dafs die Ebene bezw. die Tangenten des betreffenden Stückes der trichterförmigen Potentialfläche gegen die xy-Ebene weniger steil geneigt sind.

Es sei i die untere Grenze der Integralwerte J für alle Flächen, deren Rand durch die gegebene Raumcurve gebildet wird. Aus der Gesamtheit dieser Flächen suchen wir solche Flächen

$$z = F_1(x, y), \quad z = F_2(x, y), \quad z = F_3(x, y), \ldots$$

aus, deren zugehörige Integralwerte

$$J_1 = J(F_1), \quad \text{bezw.}\ J_2 = J(F_2), \quad J_3 = J(F_3), \ldots$$

sich der Grenze i nähern. Wir ersetzen dann jede der Flächen

$$z = F_1,\ z = F_2,\ z = F_3, \ldots$$

bezw. durch solche Flächen

$$z = \hat{F}_1,\ z = \hat{F}_2,\ z = \hat{F}_3, \ldots,$$

die an keiner Stelle eine Tangente besitzen, deren Winkel mit der xy-Ebene gröfser als φ ausfällt.

Nunmehr suchen wir aus der unendlichen Reihe der Functionen $\hat{F}_1$, $\hat{F}_2$, $\hat{F}_3$, ... eine solche Reihe von Functionen f_1, f_2, f_3, ... aus, dafs der Grenzwert

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} f_n(x, y)$$

für alle diejenigen Punkte x, y innerhalb der gegebenen ebenen Randcurve existirt, deren Coordinaten x, y rationale Zahlen sind. Da andererseits für sämtliche Punkte innerhalb der Randcurve

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x}\right| < \operatorname{tang} \varphi, \qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial y}\right| < \operatorname{tang} \varphi$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ausfällt, so folgt leicht, dafs die unendliche Reihe von Functionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ für das Innere der Curve einschliefslich des Randes gleichmäfsig convergirt, d. h. es ist

$$f(x, y) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} f_n(x, y)$$

eine stetige Function der Veränderlichen x, y.

Die Fläche $z = f(x, y)$ ist die gesuchte Potentialfläche. Der Nachweis hierfür bietet keine Schwierigkeit; er gelingt am einfachsten, wenn wir die Existenz der Minimalfunction, d. h. die Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis und eine beliebige stetige Randfunction benutzen; doch läfst sich der Nachweis auch auf directem Wege erbringen.

Neben der Einfachheit und Durchsichtigkeit des eben kurz gekennzeichneten Schlufsverfahrens erblicke ich den Hauptvorteil der neuen Methode darin, dafs sie nur die Minimums-Eigenschaft benutzt und von der speciellen Natur der Aufgabe, d. h. von den besonderen Eigenschaften der geodätischen Linie bezw. der Potentialfunction keinen Gebrauch macht; das Schlufsverfahren ist daher auch auf allgemeinere Probleme der Flächentheorie und der mathematischen Physik anwendbar.

Göttingen, den 11. October 1899.

Bemerkungen zur Variationsrechnung.

Von **A. Sommerfeld** in Clausthal.

In seiner Abhandlung „Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen" (Crelle, Bd. 17, 1837) hat Jacobi ohne Beweis ein Kriterium aufgestellt, welches notwendig erfüllt sein mufs, wenn ein Maximum oder Minimum statthaben soll. Nachdem noch 1853 Bertrand die Notwendigkeit dieses Kriteriums bezweifelt hatte, gab Weierstrafs in seinen Vorlesungen den ersten Beweis dafür, indem er sich auf das einfachste Variationsproblem

beschränkte. Herr H. A. Schwarz hat, wie ich aus der Nachschrift einer seiner Vorlesungen ersehen habe, diesen Beweis erheblich vereinfacht. Ich habe mich nun überzeugt, dass das Schwarz'sche Verfahren, entsprechend ausgestaltet, auch in allen höheren Fällen zu einem einfachen und strengen Beweise des (sinngemäfs erweiterten) Jacobi'schen Kriteriums führt, z. B. im Falle eines Doppelintegrals, welcher den Gegenstand dieses Vortrags bilden soll.

Vorgelegt sei das Integral

$$J = \iint F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

in welchem F eine analytische Function ihrer Veränderlichen, z die Unbekannte, p und q ihre Ableitungen nach x und y bedeuten. Die Integration ist erstreckt über irgend ein Gebiet G in der xy-Ebene. Es soll z (bei vorgegebenen Randwerten auf der Begrenzung von G) als Function von x und y so bestimmt werden, dafs J einen gröfst- oder kleinstmöglichen Wert annimmt.

Indem man z um eine stetige, auf der Begrenzung von G verschwindende Function ζ von x und y, und dementsprechend p und q um $\pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\varkappa = \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ vermehrt, bildet man die erste Variation J_1, d. h. die Glieder erster Ordnung in der Taylor'schen Entwickelung von J nach Potenzen von ζ, π und $\varkappa$ und schliefst aus dieser auf die Differentialgleichung des Problems, welche man als erstes oder Lagrange'sches Kriterium bezeichnen kann. Ist letztere gelöst, so sind des weiteren z, p und q, also auch die sogleich vorkommenden Gröfsen $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}, \ldots$ bekannte Functionen von x und y.

Darauf berechnet man die zweite Variation J_2, d. h. man bestimmt die Glieder zweiter Ordnung in der genannten Taylor'schen Entwickelung, nämlich

$$(1)\quad J_2 = \iint (A_{00}\zeta^2 + A_{11}\pi^2 + A_{22}\varkappa^2 + 2A_{01}\zeta\pi + 2A_{02}\zeta\varkappa + 2A_{12}\pi\varkappa)\, dx\, dy,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$A_{00} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\quad A_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2},\quad A_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2},\quad A_{01} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p},\quad A_{02} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial q},$$

$$A_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}.$$

Nimmt man an, dafs aufser ζ auch π und $\varkappa$ innerhalb G stetige Functionen von x und y sind, so läfst sich J_2 durch geeignete partielle Integration folgendermafsen umformen:

$$(2)\qquad J_2 = \iint \zeta L(\zeta)\, dx\, dy + \int \zeta (P\, dy - Q\, dx),$$

das erste Integral über das Innere, das zweite über die Begrenzung von G erstreckt. Dabei bedeutet $L(\zeta)$ einen linearen (und sich selbst adjungirten) Differentialausdruck zweiter Ordnung, nämlich

$$L(\zeta) = A_0\zeta - \frac{\partial}{\partial x}(A_{11}\pi + A_{12}\varkappa) - \frac{\partial}{\partial y}(A_{21}\pi + A_{22}\varkappa),$$

$$A_0 = A_{00} - \frac{\partial A_{01}}{\partial x} - \frac{\partial A_{02}}{\partial y}, \quad A_{21} = A_{12},$$

während P und Q Abkürzungen für die folgenden Ausdrücke sind:

$$P = A_{01}\zeta + A_{11}\pi + A_{21}\varkappa, \quad Q = A_{02}\zeta + A_{12}\pi + A_{22}\varkappa.$$

Aus (2) schliefst man nun auf ein zweites notwendiges Kriterium, welches man das Legendre'sche nennen wird, weil es dasjenige Kriterium verallgemeinert, welches Legendre für einfache Integrale angegeben hat. Es besagt, dafs die quadratische Form

$$A_{11}X^2 + 2A_{12}XY + A_{22}Y^2 \tag{3}$$

in dem Gebiete G nirgends indefinit sein darf, dafs sie also definit oder semidefinit (d. h. von positiver oder verschwindender Determinante) sein muss, u. zw. beständig $\geqq 0$ im Falle des Minimums, beständig $\leqq 0$ im Falle des Maximums. Das Statthaben des Gleichheitszeichens, d. h. des semidefiniten Charakters macht des weiteren einige Schwierigkeiten, ähnlich wie in der Theorie der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Veränderlicher der Fall, wo die Glieder zweiter Ordnung eine semidefinite Form bilden. Für die Differentialgleichung $L(\zeta) = 0$ besagt dieses Kriterium, dafs sie von „elliptischem" oder „parabolischem", nicht aber von „hyperbolischem Typus" sein darf.

Dies vorausgeschickt, bezeichnen wir als Jacobi'sches Kriterium die folgende Aussage: Für das Zustandekommen eines Maximums oder Minimums ist es notwendig, dafs es keine Lösung u der Differentialgleichung $L(u) = 0$ gebe, welche in einem ganz im Innern von G gelegenen Gebiete g mitsamt ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig und im allgemeinen von Null verschieden ist, und welche auf der Begrenzung C desselben verschwindet.

Zum Beweise nehmen wir an, es gebe eine Lösung u von den genannten Eigenschaften, und definiren mit ihrer Hilfe die Variation ζ das eine Mal so, dafs die zweite Variation positiv, das andere Mal so, dafs sie negativ wird. Wir setzen zu dem Ende

$$\begin{cases} \text{in } g & : \ \zeta = u + \varepsilon U \\ \text{in } G - g : & \ \zeta = \varepsilon U, \end{cases} \tag{4}$$

(unter $G - g$ das Restgebiet von G verstanden, welches nach Fortnahme von g übrig bleibt). Hier bedeutet U eine sonst willkürliche stetige Function mit stetigen ersten Differentialquotienten, welche nur der Bedingung zu genügen hat, auf der Randcurve von G zu verschwinden und die im folgenden erforderlichen Differentialquotienten zu besitzen. ε setzen wir als kleine Zahl voraus, über die

wir so verfügen können, dafs das Vorzeichen der zweiten Variation nur von den Gliedern mit dem Factor ε (nicht von denen mit dem Factor ε^2) abhängt.

Da nach den Gl. (4) ζ, aber nicht π und $\varkappa$ innerhalb G stetig ist, gehen wir bei der Berechnung der zweiten Variation von dem Integrale (1) aus. Dieses zerfällt in ein Integral über $G - g$ und ein solches über g. Das erstere ist nach (4) von der Ordnung ε^2, so dafs wir es nicht hinzuschreiben brauchen. Da andererseits in dem Gebiete g auch π und $\varkappa$ stetig sind, so können wir das Integral über g in die Form (2) umsetzen. Schreiben wir wieder nur die Glieder von der Ordnung ε hin und berücksichtigen, dafs im Innern von g der Wert von $L(u)$, auf der Randcurve C der Wert von u verschwindet, so haben wir

$$(5)\qquad J_2 \equiv \varepsilon \iint\limits_g u L(U) dx dy$$

$$+ \varepsilon \int\limits_C U \left\{ \left(A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy - \left(A_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx,$$

mit dem Zeichen $\equiv$ andeutend, dafs die Gleichheit nur in den Gliedern erster Ordnung besteht.

Darauf ziehen wir eine Verallgemeinerung des Green'schen Satzes für beliebige lineare Differentialausdrücke heran. Sie lautet, angewandt auf den sich selbst adjungirten Differentialausdruck L und auf das Gebiet g:

$$\iint\limits_g \left(u L(U) - U L(u) \right) dx dy =$$

$$= \int\limits_C \left\{ A_{11} \left(U \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial U}{\partial x} \right) + A_{12} \left(U \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} dy$$

$$- \int\limits_C \left\{ A_{21} \left(U \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial U}{\partial x} \right) + A_{22} \left(U \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} dx$$

und geht direct in den Green'schen Satz der Potentialtheorie über, wenn wir $A_{11} = A_{22} = 1$, $A_{12} = A_{21} = A_0 = 0$ machen. Unter den vorliegenden Verhältnissen ($L(u) = 0$ in g, und $u = 0$ auf C) zeigt sie, dafs das erste Glied der rechten Seite von (5) gerade gleich dem zweiten wird.

Führen wir noch die (im Sinne des Uhrzeigers gerechnete) Bogenlänge s als Integrationsvariable ein, so erhalten wir als definitive Form der zweiten Variation:

$$(6)\; J_2 \equiv 2\varepsilon \int\limits_C U \left\{ \left(A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n,x) + \left(A_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n,y) \right\} ds,$$

unter n die nach dem Innern von g positiv gerechnete Normale verstanden.

Nun war U eine in weiten Grenzen willkürliche Function. Jedenfalls können wir in der Weise über sie verfügen, dafs ihre Werte auf C das eine Mal dasselbe Vorzeichen haben wie der $\{\}$-Factor in der letzten Gleichung, das andere Mal das entgegengesetzte. Das eine Mal wird alsdann J_2 positiv, das andere Mal negativ — vorausgesetzt, dafs der genannte Factor auf C nicht identisch Null ist, worauf wir sogleich näher eingehen. Von dem somit constatirten Vorzeichenwechsel der zweiten Variation können wir aber sofort auf einen Vorzeichenwechsel der sog. vollständigen Variation, d. h. auf das Nichtvorhandensein eines Maximums oder Minimums schliefsen. Wir brauchen zu dem Zwecke nur die in (4) definirten Werte von ζ mit einer Zahl δ zu multipliciren und letztere so klein zu nehmen, dafs bei der Taylor'schen Entwickelung das Vorzeichen der vollständigen Variation lediglich von den in δ quadratischen Gliedern, d. h. eben von unserer zweiten Variation abhängt.

Es bleibt noch der Ausnahmefall zu erledigen, wo in (6) der Factor unter dem Integralzeichen längs C identisch verschwindet. Dies würde erstens eintreten, wenn zugleich

$$(7)\qquad A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad\text{und}\quad A_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Da nun $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ nicht gleichzeitig längs C verschwinden können, ohne dafs u im Innern von C identisch verschwindet, was gegen die Voraussetzungen ist, so muss $A_{11}A_{22}-A_{12}^2=0$, d. h. die Form (3) mufs überall längs C semidefinit sein. Verschwindet zweitens der Klammerfactor, ohne dafs die Gleichungen (7) einzeln bestehen, so bemerken wir, dafs u längs C constant (nämlich gleich Null) ist, und dafs daher

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varrho\cos(n,x),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varrho\cos(n,y)$$

wird, wo ϱ eine nicht identisch verschwindende Function von s ist. Der fragliche Factor heifst dann

$$\varrho\left(A_{11}\cos^2(n,x)+2A_{12}\cos(n,x)\cos(n,y)+A_{22}\cos^2(n,y)\right);$$

sein Verschwinden besagt abermals, dafs die Form (3) längs C von semidefinitem Charakter sein müfste, oder dafs diese Curve für unsere Differentialgleichung $L=0$ eine parabolische Curve ist.

Der Beweis für die Notwendigkeit des Jacobi'schen Kriteriums ist somit vollständig erbracht, es sei denn, dafs die oben genannte Curve C eine parabolische Curve für die Differentialgleichung $L=0$ ist oder, was dasselbe bedeutet, eine Curve semidefiniten Charakters für die zugehörige Form (3) darstellt.

Einen anderen Beweis für die Notwendigkeit unseres Kriteriums giebt Herr G. Kobb (Acta Math. Bd. 16, 1892—93, pag. 114), indem er einen Satz über die stetige Änderung des Integrals einer partiellen Differentialgleichung bei stetiger Änderung der Coefficienten derselben voraussetzt.

Über Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen.

Von **J. Sommer** in Göttingen.

Im folgenden soll ein Satz über geodätische Linien auf quadratischen Mannigfaltigkeiten entwickelt werden, zugleich als Anwendung eines wichtigen Satzes der Variationsrechnung, dessen Formulirung für den Fall einer unabhängigen Veränderlichen die nachstehende ist:

Hat man ein Problem der Variationsrechnung, in welchem für die von einem Punkt P ausgehenden Integralcurven eine Enveloppe existirt, so folgt aus dem Verhalten der Weierstrafs'schen Function E längs der Enveloppe: Wenn PA und PB zwei von P ausgehende Integralcurven sind, welche die Enveloppe in A bezw. B berühren, so ist das Integral erstreckt längs der Curve PA plus dem Integral genommen längs der Enveloppe von A nach B gleich dem Integral genommen auf der Integralcurve von P nach B.

Ein bemerkenswerter Specialfall dieses Satzes tritt ein, wenn die Enveloppe sich auf einen Punkt reducirt; alsdann ist der Wert des Integrals für alle Integralcurven genommen vom Punkte P bis zu dem neuen Schnittpunkt constant; dies bedeutet beim Problem der geodätischen Linien, dafs alle Linien gleich lang sind.

Ein Beispiel zu dem letzten speciellen Teil des Satzes ist das wohlbekannte Theorem:

Auf einem allgemeinen Ellipsoid gehen von einem Nabelpunkt ∞^1 geodätische Linien aus, die sich in dem, dem Ausgangspunkt diametral gegenüberliegenden Nabelpunkt wieder treffen. Die Längen der ∞^1 geodätischen Linien zwischen zwei solchen Nabelpunkten sind alle gleich.

Indem wir dieses Theorem zunächst für den R_4 verallgemeinern, erhalten wir folgenden Satz:

Satz. Auf einer quadratischen Mannigfaltigkeit im R_4 mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha-\lambda_0}+\frac{y^2}{\beta-\lambda_0}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda_0}+\frac{t^2}{\delta-\lambda_0}-1=0,$$

wo $\lambda_0 < \delta$, giebt es Linien, die Nabellinien, mit der Eigenschaft, dafs die Indicatrix in jedem Punkt eine Rotationsfläche ist. Von

einem Punkt der Nabellinie gehen ∞^2 geodätische Linien der Mannigfaltigkeit aus, deren Enveloppe einen conischen Doppelpunkt besitzt, welcher ebenfalls auf der Nabellinie liegt, d. h. es verlaufen zwischen dem Ausgangspunkt und diesem Doppelpunkt ∞^1 geodätische Linien von gleicher Länge.

Ein confocales System von $M_3^{(2)}$ im R_4 sei gegeben durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+\frac{t^2}{\delta-\tau}-1=0,$$

worin τ ein veränderlicher Parameter ist; λ, μ, ν, η seien die elliptischen Coordinaten eines Punktes. In dem confocalen System giebt es 4 ausgeartete $M_3^{(2)}$, welche auf die Focalflächen führen, analog den Focalcurven im R_3. Die 3 reellen Focalflächen sind:

1) das Ellipsoid E:

$$t=0, \quad \frac{x^2}{\alpha-\delta}+\frac{y^2}{\beta-\delta}+\frac{z^2}{\gamma-\delta}-1=0,$$

2) das einmantelige Hyperboloid H_1:

$$z=0, \quad \frac{x^2}{\alpha-\gamma}+\frac{y^2}{\beta-\gamma}-\frac{t^2}{\gamma-\delta}-1=0,$$

3) das zweimantelige Hyperboloid H_2:

$$y=0, \quad \frac{x^2}{\alpha-\beta}-\frac{z^2}{\beta-\gamma}-\frac{t^2}{\beta-\delta}-1=0.$$

Die geschlossenen Mannigfaltigkeiten λ werden von den beiden Hyperboloiden in reellen Nabellinien*) geschnitten.

Auf der $M_3^{(2)}$ werde nun ein Curvensystem C_g dadurch definirt, dafs die Tangenten an diese Curven gleichzeitig die beiden Focalflächen H_1 und H_2 schneiden. Durch einen beliebigen Punkt von λ_0 gehen 4 Curven des Systems, dagegen gehen von einem Punkt der Nabellinie, welche z. B. H_1 ausschneidet, ∞^1 Curven des Systems aus. Für das Curvensystem C_g bemerkt man nun zunächst, dafs es ein System geodätischer Curven auf der $M_3^{(2)}$ λ_0 ist.

In der That, es gehen von einem Punkt $S=(a, b, c, d)$ auf der Focalfläche H_1 ∞^1 Tangenten der $M_3^{(2)}$ λ_0 aus, welche zugleich die Focalfläche H_2 schneiden. Diese Tangenten berühren Curven des Systems C_g in Punkten P, die zusammen auf einer aus 2 Zügen bestehenden Linie der $M_3^{(2)}$ λ_0 liegen; wenn man dann in diesen Berührungspunkten die Normalen errichtet und deren Schnittpunkte mit dem R_3 $z=0$, bestimmt, so ergiebt eine kleine analytische Betrachtung als Gleichungen für den Ort dieser Schnittpunkte:

*) Vgl. meine Untersuchung: Über Focaleigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. Bd. 53.

$$\frac{aX}{\alpha-\gamma}+\frac{bY}{\beta-\gamma}-\frac{dT}{\gamma-\delta}-1=0$$

$$\frac{X^2(\alpha-\lambda_0)}{(\alpha-\gamma)^2}+\frac{Y^2(\beta-\lambda_0)}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{T^2(\delta-\lambda_0)}{(\gamma-\delta)^2}+\frac{1}{b^2(\gamma-\lambda_0)(\beta-\gamma)}$$

$$\Big\{\frac{[a(\alpha-\gamma)(\beta-\lambda_0)Y-b(\beta-\gamma)(\alpha-\lambda_0)X]^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)^2}$$

$$-\frac{[b(\beta-\gamma)(\delta-\lambda_0)T-d(\delta-\gamma)(\beta-\lambda_0)Y]^2}{(\delta-\gamma)^2(\beta-\delta)}$$

$$-[(\beta-\lambda_0)Y-b(\beta-\gamma)]^2\Big\}-1=0.$$

Von diesen beiden Gleichungen stellt die erste den Tangential-R_2 der Focalfläche H_1 im Punkt (a, b, c, d), und die zweite einen Kegel im R_3 $z=0$ mit der Spitze im selben Punkt dar. Der geometrische Ort der Schnittpunkte der Normalen in den Punkten P mit dem R_3 $z=0$ besteht also aus 2 Geraden g und g_1 durch den Punkt S, in dem Tangential-R_2 dieses Punktes liegend. Die beiden Geraden entsprechen den beiden geschlossenen Zügen, aus welchen die Curve der Punkte P besteht. Legt man durch eine Tangente SP und die Normale in P einen R_2, so schneidet dieser den Tangential-R_2 des Punktes S nach g (derjenigen Geraden eben, welche die Normale trifft), die $M_3^{(2)}$ λ_0 wird nach einer Ellipse geschnitten. Die der Tangente PS unendlich benachbarte Tangente dieser Ellipse schneidet nun ebenfalls die Gerade g, folglich auch die Focalfläche H_1, und ebenso zeigt man, dafs sie auch H_2 schneidet; die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten sind also Tangenten der Curven des Systems C_g; da der durch sie bestimmte Schmiegungs-R_2 die Normale der Mannigfaltigkeit enthält, so sind die untersuchten Curven C_g geodätische Curven.

Zugleich folgt weiter, dafs auf den Tangentenkegel vom Punkt S an die Curven C_g wieder ein Tangentenkegel an dieselben Curven von einem, dem ersten unendlich benachbarten Punkt S_1 der Fläche H_1 und auf der Geraden g folgt. Daraus ersieht man leicht, dafs die ∞^1 Curven C_g, die von einem Punkt der Nabellinie ausgehen, ein specielleres System bilden, und dafs sie sich alle wieder in einem Punkt der Nabellinie vereinigen, weil dies auch für die Tangenten zutrifft.

Damit ist der angeführte Satz bewiesen, und es folgt zugleich aus dem angeführten Satz der Variationsrechnung, dafs von den ∞^2 geodätischen Linien die ∞^1 Linien, welche sich wieder in einem Punkt der Nabellinie treffen, durch die specielle Eigenschaft ausgezeichnet sind, gleiche Länge zu besitzen.

Läfst man jetzt die eigentliche $M_3^{(2)}$ ausarten in das Innere eines Ellipsoids, so gehen die Nabellinien in die Focalcurven über, und die geodätischen Linien in Geraden. Das System der Curven

C_g geht dann in die Geraden über, welche die beiden Focalcurven schneiden. Von jedem Punkt der Focalellipse z. B. gehen ∞^1 solcher specieller geodätischer Linien C_g aus, welche an dem Ellipsoid reflectirt werden und sich wieder in einem Punkt der Focalellipse treffen. Die Längen aller der gebrochenen Linien zwischen zwei solchen conjugirten Punkten der Focalellipse sind gleich.

Am a. O. habe ich den Zusammenhang dieser Sätze mit den Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades und allgemeiner $M_3^{(2)}$ gezeigt und dort auch darauf hingewiesen, dafs die Ableitung als Anwendung des zu Anfang ausgesprochenen Satzes der Variationsrechnung aufgefafst werden kann. Die Eigenschaften ergeben sich durch die Übertragung bekannter Sätze auf höhere Räume und die Untersuchung der Ausartungen.

Die Erweiterung des abgeleiteten Satzes auf Räume von mehr als 4 Dimensionen ergiebt sich leicht. Im R_5 treten an die Stelle der Nabellinien Flächen, deren Punkte so zu einander conjugirt sind, dafs zwischen zwei derselben ∞^1 gleich lange geodätische Linien verlaufen.

Zwei merkwürdige Gruppen des Raums von fünf Dimensionen.

Von **Friedrich Engel** in Leipzig.

Killing hat zuerst gefunden, dafs es im R_5 eine vierzehngliedrige einfache Gruppe von Punkttransformationen giebt. Im Jahre 1893 machten Cartan und ich gleichzeitig (Comptes Rendus Bd. 116, S. 784 ff.; vgl. auch Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, S. 763 f.) zwei Gruppen des R_5 bekannt, die beide die von Killing angegebene Zusammensetzung haben, und ich bemerkte insbesondere, dafs diese beiden Gruppen durch eine Berührungstransformation mit einander ähnlich sind. Neuerdings hat Kowalewski in seiner Habilitationsschrift (Leipziger Berichte 1899) nachgewiesen, dafs diese beiden Gruppen die einzigen primitiven Gruppen von Punkttransformationen des R_5 sind, die aufser den von vornherein angebbaren primitiven Gruppen vorhanden sind. Ich will jetzt einige Eigenschaften der beiden Gruppen besprechen.

Die eine der beiden Gruppen kann so definirt werden: Man denke sich im R_5 einen linearen Complex:

$$dz + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2 = 0. \tag{1}$$

Durch jeden Punkt des R_5 gehen ∞^3 Complexgerade, die ein ebenes Bündel bilden, und in dem projectiven R_3 dieser ∞^3 Geraden ist durch den Complex (1) ebenfalls ein linearer Complex bestimmt. Jeder rationalen Curve 3. O. dieses R_3, die dem betreffenden Complexe des R_3 angehört, entspricht im R_5 ein von Geraden des Complexes (1) gebildeter rationaler Kegel 3. O., von dem man

ebenfalls sagen kann, dafs er dem Complexe (1) angehört. Wir wählen einen dieser Kegel 3. O. aus, nämlich den, dessen Spitze der Pol der unendlich fernen Ebene des R_5 ist, und suchen alle Geraden des Complexes (1), die diesen unendlich fernen Kegel schneiden. Die Schar dieser Geraden ist genau fünffach unendlich, und durch jeden Punkt des R_5 gehen ∞^1 solche Gerade, die einen dem Complexe (1) angehörigen Kegel 3. O. bilden.

Die eben definirte Schar von ∞^5 Geraden gestattet eine vierzehngliedrige Gruppe G_{14} von Punkttransformationen des R_5, und das ist die eine der beiden im Eingange erwähnten Gruppen. Die zweite Gruppe $\mathfrak{G}_{14}$ erhält man, wenn man durch eine Berührungstransformation des R_5 jene eben erklärten ∞^5 Geraden als Punkte eines neuen Raumes $\mathfrak{R}_5$ einführt. Wählt man die Coordinaten $\mathfrak{x}_1, \dots \mathfrak{x}_5$ des $\mathfrak{R}_5$ in geeigneter Weise, so besteht die $\mathfrak{G}_{14}$ aus allen Punkttransformationen des $\mathfrak{R}_5$, die das System der drei Pfaffschen Gleichungen

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_1 = 0\\ &d\mathfrak{x}_4 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_3 d\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_3) = 0\\ &d\mathfrak{x}_5 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_3 d\mathfrak{x}_2) = 0 \end{aligned}\right.$$

invariant lassen; dieses System drückt die Bedingungen aus, unter denen zwei unendlich benachbarte jener ∞^5 Geraden des R_5 einander schneiden.

Das Merkwürdige ist nun, dafs auch das System (2) wieder eine bei der $\mathfrak{G}_{14}$ invariante Schar von ∞^5 Geraden des $\mathfrak{R}_5$ bestimmt, und dafs diese ∞^5 Geraden bei der Berührungstransformation, die den Übergang von der G_{14} zur $\mathfrak{G}_{14}$ vermittelt, eben den ∞^5 Punkten des R_5 entsprechen. Wir haben also hier einen ähnlichen Fall wie bei Lies berühmter Berührungstransformation, die die Geraden des R_3 in die Kugeln überführt, denn diese verwandelt ja einerseits die ∞^3 Geraden eines linearen Complexes in die Punkte und andrerseits die Punkte in die ∞^3 Geraden, die den imaginären Kugelkreis schneiden. Da unsre Gruppen G_{14} und $\mathfrak{G}_{14}$ im Raume von fünf Dimensionen ebenso einzig in ihrer Art sind, wie die projective Gruppe eines linearen Complexes und die conforme Gruppe im gewöhnlichen Raume, so wird unsere Berührungstransformation im R_5 eine ähnliche Rolle spielen, wie die Liesche im gewöhnlichen Raume. Freilich ist dadurch ein wesentlicher Unterschied bedingt, dafs von den beiden Gruppen G_{14} und $\mathfrak{G}_{14}$ keine projectiv oder mit einer projectiven ähnlich ist.

Das System (2) ordnet jedem Punkte $\mathfrak{a}_1, \dots \mathfrak{a}_5$ des $\mathfrak{R}_5$ ein ebenes Bündel von ∞^1 durch ihn gehenden Geraden zu, das eine ebene, zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bestimmt. Die Gleichungen dieser Mannigfaltigkeiten lauten:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_3 - \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{x}_1 = 0 \\ \mathfrak{x}_4 - \mathfrak{a}_4 - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{x}_1) = 0 \\ \mathfrak{x}_5 - \mathfrak{a}_5 - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_3\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{x}_3) = 0. \end{cases}$$

Läfst man den Punkt $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_5$ auf einer der ∞^5 durch (2) definirten Geraden wandern, so dreht sich die zugeordnete Ebene (3) um die betreffende Gerade.

Die Gleichungen (3) bestimmen eine Berührungstransformation, bei der die Punkte des $\Re_5$ in die ∞^5 ebenen Mannigfaltigkeiten (3) übergehen und umgekehrt, und bei der zugleich die Gruppe $\mathfrak{G}_{14}$ und die Schar der früher erwähnten ∞^5 Geraden invariant bleibt.

Da die Schar der ∞^5 Mannigfaltigkeiten (3) offenbar bei der Gruppe $\mathfrak{G}_{14}$ invariant bleibt, so gilt dasselbe auch von dem Inbegriff aller in diesen Mannigfaltigkeiten enthaltenen Linienelemente. Diese werden durch die Gleichungen (3) und

$$(4)\qquad \begin{cases} d\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{a}_2 d\mathfrak{x}_1 = 0 \\ d\mathfrak{x}_4 - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{a}_3 d\mathfrak{x}_1) = 0 \\ d\mathfrak{x}_5 - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_3 d\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{a}_2 d\mathfrak{x}_3) = 0 \end{cases}$$

bestimmt, aus denen man durch Elimination der $\mathfrak{a}_k$ erhält:

$$(5)\qquad d\mathfrak{x}_3^2 + 2d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_5 + 2d\mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_4 = 0;$$

folglich bleibt auch diese Gleichung bei unsrer $\mathfrak{G}_{14}$ invariant, das heifst: die $\mathfrak{G}_{14}$ kann durch geeignete Wahl der Veränderlichen $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_5$ in eine Untergruppe der conformen Gruppe des $\Re_5$ übergeführt werden.

Die Gleichung (5) ordnet jedem Punkte des $\Re_5$ einen Kegel von ∞^3 Richtungen zu, auf dem das durch (2) bestimmte Büschel von ∞^1 Richtungen liegt; es giebt daher in jedem Punkte des $\Re_5$ noch ein ebenes Bündel von ∞^2 Richtungen, das mit dem durch (5) bestimmten Kegel gerade das durch (2) definirte Büschel von Richtungen doppeltzählend gemein hat. Hierin liegt, dafs unser G_{14} auch noch ein System von zwei Pfaffschen Gleichungen invariant läfst.

Die Gleichung (5) definirt im $\Re_5$ eine Schar von ∞^7 Geraden, die wir kurz als Pseudominimalgerade bezeichnen wollen. Jede dieser Geraden, die nicht auch noch den Gleichungen (2) genügt, liegt auf einer und nur einer der ∞^5 Ebenen (3), und umgekehrt ist jede Gerade, die einer der ∞^5 Ebenen (3) angehört, eine Pseudominimalgerade.

Die Schar der ∞^5 Geraden, die das Pfaffsche System (2) befriedigen, steht nun zu der Schar aller ∞^7 Pseudominimalgeraden in einer Beziehung, die grofse Ähnlichkeit hat mit der Beziehung zwischen den ∞^3 Geraden eines linearen Complexes im gewöhnlichen Raume und den sämtlichen ∞^4 Geraden dieses Raumes.

Über Complexcurven und ein Theorem von Lie.

Von **Konrad Zindler** in Wien.

Es wurden aus den Bedingungen, dafs eine Regelfläche einem (durch seine Monge'sche Differentialgleichung) gegebenen Complex angehören und zugleich abwickelbar sein soll, zwei Gleichungen hergeleitet. Aus diesen erhält man für die Aufgabe, die sämtlichen Curven des Complexes zu finden, eine gewöhnliche Differerential-gleichung erster Ordnung, die unter Umständen neben der ursprünglichen Monge'schen Gleichung nützlich sein kann; sie enthält der Natur der Sache nach noch willkürliche Functionen.

Hierauf wurde (zunächst an Beispielen) gezeigt, dafs der Satz von Lie, wonach die Torsion einer Complexcurve nur vom Linienelement abhängen soll (Geom. d. Berührungstransf. S. 308), nicht allgemein richtig ist; schliefslich wurde der Fehler im Beweise Lie's angegeben*). (Eine ausführlichere Mitteilung wird in den Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. XI erscheinen.)

Über hyperboloidische Gerade.

Von **K. Doehlemann** in München.

Es handelt sich um folgende Sätze:

Ist eine Fläche 2. Klasse gegeben, bezogen auf ein Fundamental-Tetraeder $ABCD$, und ein beliebiger Zahlenwert α, so kann man ein neues Tetraeder $A'B'C'D'$ in folgender Weise bestimmen: Um z. B. die Ecke A' zu finden, legt man durch die Kanten BC, CD, DB Ebenen, welche mit den durch diese Kanten bezw. an die Fläche gehenden Tangentialebenen und mit der Tetraederfläche BCD je ein Doppelverhältnis vom Werte α bilden. Diese 3 Ebenen schneiden sich im Punkte A'. Dann gehören die vier Verbindungslinien AA', BB', CC', DD' der gleichen Regelschar eines Hyperboloids an, sie haben ebenso wie die beiden Tetraeder, hyperboloidische Lage.

Die 12 Ebenen, die zur Construction benutzt wurden, berühren eine Fläche 2. Klasse.

Läfst man α variiren und betrachtet die ganze, für jeden Wert sich ergebende Regelschar, so bilden alle diese Geraden eine Strahlencongruenz von der 3. Ordnung und von der 9. Klasse. Die Punkte A', B', C', D' rücken bei variablem α auf vier Geraden a, b, c, d

*) Auch Demoulin war (worauf mich Herr Scheffers aufmerksam machte) zu demselben Satz gelangt, hat ihn später zurückgezogen und durch einen richtigen ersetzt. S. Comptes Rendus, Bd. 124 (Mai 1897), S. 1077—1079.

fort. Diese gehen bezw. durch die Ecken A, B, C, D immer und nur, wenn $ABCD$ ein Polartetraeder der Fläche 2. Klasse ist.

Analoge Sätze gelten für die Fläche 2. Ordnung sowie für einen Kegelschnitt. Nimmt man als Fläche 2. Klasse speciell den imaginären, unendlich fernen Kugelkreis, so bilden je drei der benutzten Ebenen mit der betreffenden Tetraederfläche den gleichen Winkel, etwa δ, und es folgt:

Setzt man auf die Flächen eines Tetraeders Pyramiden von gleicher Neigung δ, so liefern deren Spitzen, mit den gegenüberliegenden Tetraederecken verbunden, vier hyperboloidische Gerade.

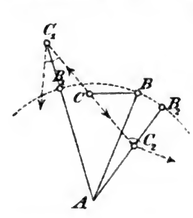
Wählt man $\delta = \frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich der Steiner'sche Satz, dafs die 4 Höhen eines Tetraeders einem Hyperboloid angehören.

Im übrigen vergleiche man meine Arbeit: Ueber hyperboloidische Gerade, die sich aus einem Tetraeder und einer Fläche 2. Ordnung ableiten lassen. Archiv für Math. und Physik, Bd. XVII, 1899.

Über ein Beispiel des Herrn Boltzmann zu der Mechanik von Hertz.

Von A. Brill in Tübingen.

In dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für 1898 weist Herr Boltzmann auf den Mangel an geeigneten Beispielen hin, die das Hertz'sche Buch über Mechanik dem Verständnis näher bringen können, und geht seinerseits in dankenswerter Weise mit der Angabe eines solchen voran. Er ersetzt die Bewegung einer vollkommen elastischen Kugel im Innern einer Hohlkugel im Sinne von Hertz, der weder Fernkräfte noch elastische Kräfte in dem geläufigen Sinne kennt, sondern statt dessen mit starren Verbindungen der Massen arbeitet, durch die Bewegung eines Systems von zwei durch ein Gelenk B mit einander verbundenen masselosen Stäben AB, BC, an deren freien Enden A, C sich Massenpunkte befinden, während die Gelenkstelle B einen Punkt von verschwindend kleiner Masse trägt.

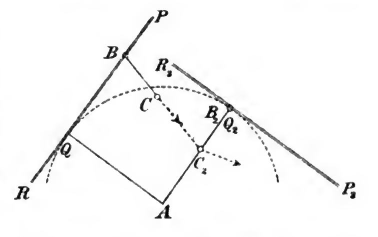


In der That, wenn man sich die Stabbewegung etwa dadurch vereinfacht denkt, dafs der eine Endpunkt A festgehalten wird, und für diesen Fall das Princip der lebendigen Kraft und das der Flächenräume anschreibt, bezogen auf ein ebenes Coordinatensystem, das den Punkt A zum Ursprung hat, und dessen Ebene durch A und die

Anfangsgeschwindigkeit von C bestimmt ist: so läfst sich aus der Combination dieser Gleichungen der Schlufs ziehen, dafs die geradlinige Bahn CC_1, die bei verschwindend kleiner Masse B der Endpunkt C des Stäbepaares einschlägt, und die an der Stelle, wo die Stäbe einen gestreckten Winkel $AB_1C_1 = \pi$ bilden, sich in eine andere, wieder geradlinige Bahn verwandelt, mit der Geraden AB_1C_1 denselben Winkel bildet, wie diejenige, in der C weitergeht. Die unendlich kleine Masse B nimmt in dem Augenblick, in dem die Bahn von C ihre Richtung ändert, die lebendige Kraft auf, deren Träger sonst C ist, und hilft durch ihre in diesem Moment unendlich grofse Geschwindigkeit über den „toten Punkt“ der gestreckten Lage hinweg.

Dies aber ist eben das Bild der Bewegung eines vollkommen elastischen Balles vom Radius ϱ, der sich ohne Kräftewirkung in einer Hohlkugel vom Innenradius $AB + BC + \varrho$ bewegt. Herr Boltzmann läfst die Stäbe AB, BC gleich lang sein, damit der Mittelpunkt des Balles durch den der Hohlkugel gehen kann. — Macht man aber $AB \neq BC$, und wählt man die Anfangsrichtung CC_2 von C so, dafs der Winkel ABC der beiden Stäbe einmal gleich Null wird, so verhält sich der Massenpunkt C an dieser Stelle C_2 gerade so wie an der Stelle, wo $\sphericalangle ABC = \pi$ wird. Er springt nämlich unter demselben Winkel gegen AC_2 ab, unter dem er ankam, und das System verhält sich wie eine elastische Vollkugel vom Radius ϱ, die — im Innern jener Hohlkugel — auf eine zu dieser concentrische Vollkugel vom Radius $AB - BC - \varrho$ (bezw. $BC - AB - \varrho$) auftrifft.

Diese Modification liefert somit das von Herrn Boltzmann a.a.O. gewünschte Bild des elastischen Stofses von zwei Vollkugeln. Will man die Complication mit der Hohlkugel vermeiden, so lasse man die beiden Stäbe, bei gleicher Längendifferenz, unbegrenzt wachsen. Oder aber: Man nötige den Endpunkt B des Gelenkes BC, den Träger der unendlich kleinen Masse, statt auf einer Kugel vom Radius AB, auf einer geradlinigen „Führung“ (etwa einer Röhre mit Schlitz) PQR zu bleiben, die durch einen Arm $AQ \perp PQR$ in constantem Abstand AQ von dem festen Punkt A gehalten wird, so also, dafs sie immer Tangente der Kugel vom Radius AQ bleibt, deren Mittelpunkt A ist. Ist der Endpunkt C des Stabes BC der Träger einer endlichen Masse, und $AQ > BC$,



so hat man wieder das Bild des elastischen Stofses von zwei Vollkugeln. Der Gedanke zu der letzterwähnten Anordnung rührt von Herrn Finsterwalder her.

Alle diese Bilder beschränken sich übrigens auf die Darstellung des Stofses von glatten Kugeln; sie versagen, wenn Reibung in Verbindung mit drehender Bewegung der Kugeln den Ausfallswinkel und die Ausfallsebene ändert.

Die Beispiele für verborgene Masse und Bewegung, die Hertz vorgeschwebt haben mögen, als er an einen Ersatz für die in der Natur auftretenden Fernkräfte dachte, sind jedoch, wiewohl er immer nur von „starren Verbindungen" spricht, kaum Stab- oder sonstige discrete Massen-Systeme, sondern wohl eine den Raum gleichförmig ausfüllende, in sich selbst verschiebliche Materie. Denn eben mit Beziehung hierauf weist die Einleitung (Mechanik, S. 31) auf die v. Helmholtz'sche Theorie der verborgenen Bewegungen hin, die man in dessen Abhandlungen über monocyklische Systeme und über das Princip der kleinsten Wirkung (Journ. für Math., Bde. 97, 100) entwickelt findet, wo auf flüssige und gasförmige Körper exemplificirt wird; ferner auf die Vorstellungen, zu denen Maxwell (in seinen Aufsätzen: Über physikalische Kraftlinien und: A dynamical theory of the electromagnetic field, Philos. Trans. Lond. 1864 u. s. w.) gelangt ist, wonach man sich zwischen zwei aus der Ferne scheinbar auf einander wirkenden Massen ein „verborgenes" flüssiges Mittel eingeschaltet zu denken hat, das mit den sichtbaren Massen, nach der Ausdrucksweise von Hertz, „gekoppelt" ist, und dessen Wirbel oder anderweitige cyklische „adiabatische" Bewegungen die Träger einer gewissen Menge von kinetischer Energie sind, welche die gewöhnliche Mechanik als potentielle Energie der sichtbaren Massen anzusprechen pflegt; Hertz weist ferner hin auf Lord Kelvin's Wirbeltheorie der Atome u. s. f.

Allerdings findet man im Texte selbst Vorstellungen dieser Art nicht entwickelt. Ja, die Aussage von Hertz über die Gestalt der zulässigen Bedingungsgleichungen, welche die „starren" Verbindungen definiren, die bei ihm an Stelle der Kräfte treten, scheint dieser Annahme zu widersprechen, indem blofs entweder endliche Gleichungen zwischen den Coordinaten oder, neben einer möglichen Lage des Systems, homogene lineare Gleichungen zwischen den Differentialen der Coordinaten des Systems (129) zugelassen werden, — eine Form, in die sich nach S. 43 der Einleitung alle Zusammenhänge der Natur müfsten einkleiden lassen. Setzt man nun ein raumerfüllendes Zwischenmittel voraus, das jedenfalls als incompressibel anzunehmen wäre, so drückt sich bereits die Bedingung der Unzusammendrückbarkeit nicht, wie Hertz es verlangt, als endliche Gleichung zwischen Coordinaten aus, sondern es treten z. B.

in die Lagrange'sche Incompressibilitäts-Bedingung die partiellen Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z eines Systempunktes nach den Anfangswerten a, b, c derselben ein. — Faſst man aber, wie dies Lagrange selbst gethan, diese Bedingung als den Ausdruck der rein geometrischen Thatsache auf, daſs der Inhalt des anfangs von den Punkten (a, b, c); $(a + da, b, c)$; $(a, b + db, c)$; $(a, b, c + dc)$ gebildeten Tetraeders sich mit der Zeit nicht ändert, so gewinnt auch diese Gleichung, wie man leicht zeigt (Mitteil. d. math.-naturw. Vereins in Württemberg 1900), die von Hertz zugelassene Form einer Gleichung zwischen den Coordinaten von vier (unendlich benachbarten) Systempunkten; sie sagt eben nur die „starre Verbindung zwischen den kleinsten Teilen" aus (Einl. S. 49).

Den Übergang von discreten zu continuirlich eine Linie erfüllenden Massenpunkten kann man übrigens, ohne der Hertz'schen Auffassung zu nahe zu treten, auch an den oben betrachteten Stabsystemen vornehmen, indem man von 2 Stäben zu n, und schlieſslich zu einer unausdehnbaren Kette übergeht, für welche sich wieder eine Bedingungsgleichung mit partiellen Differentialquotienten (vgl. z. B. Routh-Schepp, Dynamik, II, § 602) ergiebt.

Ein Medium, ausgestattet mit Eigenschaften der bezeichneten Art, mag sich Hertz auch in der Umgebung zweier sich stoſsenden elastischen Körper gedacht haben, fähig, diejenige lebendige Kraft, die im Moment des Contacts frei wird, eine kurze Zeit lang aufzunehmen, um sie dann wieder an die sichtbaren Massen abzugeben (No. 733). Indessen erklärt er sich darüber nicht näher, verweist vielmehr „die Einzelbetrachtung dieser besonderen Verhältnisse (beim Stoſs) aus dem Gebiet der allgemeinen Mechanik" (ebd.) ausdrücklich hinaus. Nichtsdestoweniger wird man Herrn Boltzmann zustimmen müssen, wenn er durch das von ihm behandelte Beispiel gerade diese besonderen Verhältnisse in den Mittelpunkt der Erörterung über Hertz' Mechanik rückt.

Zusatz. Nachträglich kommt mir die Rede zu Gesicht, die Herr Boltzmann: „Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in unserer Zeit," in einer der allgemeinen Sitzungen der Münchener Naturforscher-Versammlung gehalten hat (S. diesen Jahresbericht S. 71 ff.). Hiernach steht Herr Boltzmann hinsichtlich der Deutung der verborgenen Massen der Hertz'schen Mechanik auf einem ganz anderen Standpunkt. Denn er erklärt:

„Die Structur der ehemals gebräuchlichen Medien [das flüssige einbegriffen] und auch des Maxwell'schen Lichtäthers darf ihnen [den verborgenen Massen] nicht beigelegt werden, da ja in allen diesen Medien solche Kräfte wirkend gedacht wurden, welche Hertz gerade ausschlieſst."

Die Kräfte, die in einer wirbelnden incompressiblen Flüssigkeit, auf die keine äuſseren Kräfte wirken, auftreten, haben von Helm-

holtz und Maxwell allein aus den hydrodynamischen Grundgleichungen und der Incompressibilitäts-Bedingung abgeleitet. Dafs die letztere die auch von Hertz zugelassene Form hat, glaube ich nachgewiesen zu haben. Auf Grund dieser einen Gleichung leitet nun Lagrange das System der hydrodynamischen Gleichungen mit Hilfe allein des d'Alembert'schen Princips ab. Über das letztere verfügt aber auch Hertz; denn aus der Formulirung desselben in No. 393 ergiebt sich sogleich die von Lagrange benutzte Gleichung, wenn man die Coordinatenzuwächse δp_ϱ nicht als mögliche oder virtuelle, sondern, nach dem Vorgang der Mécanique analytique T. II, Sect. IV, Nr. 11, als von einander unabhängige Verrückungen behandelt, indem man die zwischen ihnen bestehenden Bedingungsgleichungen, mit unbestimmten Multiplicatoren versehen, zur linken Seite der erwähnten Gleichung addirt. Hat man aber das d'Alembert'sche Princip in diese Form gebracht, so vollzieht sich, im Sinne der Anmerkung zu No. 6 der Hertz'schen Mechanik, der Übergang von einer endlichen Zahl von Massenpunkten zu unendlich vielen, und von da zu den flüssigen Massen mit Hilfe jener Bedingungsgleichung genau wie bei Lagrange (Mécanique analytique T. II, Sect. IV, 17; Sect. XI, 2 ff.). Es ist also nicht abzusehen, warum die verborgenen Massen bei Hertz nicht auch flüssige Massen sein können.

Tübingen, 7. November 1899.

Die Geometrie der Dynamen.

Von E. Study in Greifswald.

„Dyname“ hat Plücker u. a. ein System von Kräften genannt, die an einem starren Körper angreifen. Als „Geometrie“ der Dynamen kann man daher die Lehre von der Darstellung der Systeme von Kräften durch geometrische Figuren und von der darauf zu gründenden constructiven Zusammensetzung einzelner Kräfte wie ganzer Systeme bezeichnen, und man kann dazu auch noch eine Reihe geometrischer Sätze rechnen, die auf den gemeinten Constructionen beruhen. Es gehören dahin u. a. Eigenschaften der sogenannten Nullsysteme, ferner die bekannte Regel für die Zusammensetzung infinitesimaler Bewegungen.

Der Verfasser hat, einer ehrenvollen Aufforderung des Vorstandes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Folge leistend, in der mathematischen Section der Naturforscherversammlung zu München einen Vortrag über eigene (zumeist bis jetzt nicht veröffentlichte) Untersuchungen gehalten, deren Ziel ist, die erwähnte Gruppe von Sätzen als einen Teil eines gröfseren Ganzen nachzuweisen, einer „Geometrie der Dynamen“ in Euklidischen und Nicht-Euklidischen

Mannigfaltigkeiten.*) Die folgende Mitteilung bringt in erweiterter Fassung den Inhalt dieses Vortrags. Es wird nur der Euklidische Raum betrachtet; wir wollen aber versuchen, in dieser Beschränkung einen einigermafsen vollständigen Überblick über die Thatsachen zu geben, die im Mittelpunkt der gemeinten Theorie stehen. Dabei werden wir auf eine genaue Angabe der Voraussetzungen eines jeden Satzes verzichten, um die Grundgedanken desto deutlicher hervortreten zu lassen: Eine Besprechung von Einzelheiten, wie sie die nicht immer ganz einfache Erörterung gewisser Grenzfälle mit sich bringt, würde dem Zwecke einer schnellen Orientirung nicht förderlich sein. Eine exacte Fassung der folgenden nur „im allgemeinen" richtigen Sätze wird man in einer im Druck befindlichen Arbeit des Verfassers finden, die demnächst im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig erscheinen wird. Hervorgehoben werden mag jedoch noch, dafs in allen Ausnahmefällen an Stelle der angegebenen Constructionen einfachere treten, und dafs wenigstens die durch eine Figur dargestellte Construction (Nr. III, 1) unter allen Umständen angewendet werden kann.

In der folgenden summarischen Aufzählung reproduciren wir unter I und II, a kurz die Definitionen und Lehrsätze, die den Kern dessen bilden, was in Lehrbüchern der Mechanik über unseren Gegenstand vorgetragen zu werden pflegt. Die „Intensität" einer Kraft wird hier als positiver und negativer Werte fähig gedacht. Über das Vorzeichen entscheidet eine der Wirkungslinie der Kraft nach Belieben beizulegende Richtung, und diese selbe Richtung entscheidet dann auch über den Sinn einer positiven Drehung um die Wirkungslinie, also über die Vorzeichen der Winkel von Ebenen durch diese Gerade.

I. Die geometrische Addition der Vectoren.

Ein Vector $\mathfrak{B}_\xi^\eta$ ist ein Paar eigentlicher (im Endlichen gelegener) Punkte ξ, η. Ein Vector darf beliebig parallel verschoben werden. (Definition der Gleichheit von Vectoren.) Alle Vectoren mit zusammenfallenden Punkten ξ, η werden als einander gleich betrachtet und gleich Null gesetzt. (Definition des Vectors Null.) Vectoren $\mathfrak{B}_o^\xi$ und $\mathfrak{B}_o^\eta$ mit gemeinsamem Anfangspunkt o werden durch die Parallelogrammconstruction „geometrisch addirt", zu einem neuen Vector $\mathfrak{B}_o^\zeta$ vereinigt, in Zeichen:

$$\mathfrak{B}_o^\xi + \mathfrak{B}_o^\eta = \mathfrak{B}_o^\zeta.$$

*) Vgl. Sitzber. der K. Sächs. Akademie, 8. Jan. 1899. Eine verwandte Tendenz hat, nach dem Titel sowie nach einigen Figuren und Formeln zu schliefsen, ein kürzlich erschienenes Werk von A. P. Kotjelnikoff (Projective Theorie der Vectoren, Kasan 1899, russisch).

Vectoren dienen zur Darstellung, und ihre geometrische Addition zur Zusammensetzung von Kräftepaaren. Das Moment M eines Kräftepaares wird dabei gemessen durch die Länge $\overrightarrow{\xi\eta}$ des zugehörigen Vectors, und dieser selbst steht senkrecht auf der Ebene des Kräftepaares.

II, a) Die geometrische Addition der Stäbe.

Ein Stab $\mathfrak{S}_\xi^\eta$ ist ebenfalls ein Paar eigentlicher Punkte. Ein Stab darf aber nur auf der Verbindungslinie dieser Punkte verschoben werden. Der „Stab Null" wird ebenso erklärt wie der Vector Null. Stäbe $\mathfrak{S}_o^\xi$ und $\mathfrak{S}_o^\eta$ mit gemeinsamem Anfangspunkt o werden „geometrisch addirt" wie Vectoren, also durch das Stäbeparallelogramm:

$$\mathfrak{S}_o^\xi + \mathfrak{S}_o^\eta = \mathfrak{S}_o^\zeta.$$

Aus zwei oder mehreren Stäben in allgemeiner Lage entstehen „formale" geometrische Summen. Das Stäbepaar insbesondere ist die formale Summe von zwei Stäben von entgegengesetzter Länge auf parallelen Geraden. Die formale Summe von Stäben hängt von sechs Constanten ab. Sie kann, und zwar nur auf eine Weise, derart als Summe eines einzelnen Stabes und eines Stäbepaares dargestellt werden, dafs die Gerade des Stabes auf der Ebene des Stäbepaares senkrecht steht (Normalform einer geometrischen Summe von Stäben).

Der Stab ist ein geometrisches Bild für eine einzelne Kraft, deren Intensität J durch die Länge $\overrightarrow{\xi\eta}$ des Stabes gemessen wird. Ebenso dient das Stäbepaar als Bild eines Kräftepaares. In jedem Falle ist eine geometrische Summe von Stäben das Bild eines Systems von Kräften, einer Dyname.

Addirt man geometrisch Stäbe oder formale Summen von solchen, so werden die entsprechenden Kräfte und Dynamen zusammengesetzt.

Dieser Satz hat ein vollkommenes Analogon bei jeder einzelnen der folgenden Constructionen: Wir werden daher die entsprechenden völlig gleichlautenden Sätze nicht jedesmal besonders formuliren. Auch werden wir die Definitionen der in jedem Falle durch die Null zu bezeichnenden Figuren der Kürze halber weglassen.

II, b) Die geometrische Addition der Quirle.

Ein Quirl $\mathfrak{Q}_\xi^\varphi$ ist die Figur eines Punktes ξ und einer Ebene φ, die nicht vereinigt liegen. Liegen ξ und φ beide im Endlichen, so heifst der Quirl eigentlich, andernfalls uneigentlich. Der

eigentliche Quirl darf längs der von ξ auf φ gefällten Senkrechten verschoben werden. In ähnlicher Weise ist ein Gleichheitsbegriff für uneigentliche Quirle zu erklären. Der eigentliche Quirl dient, wie der Stab, als Bild einer einzelnen Kraft. Die Wirkungslinie dieser Kraft ist die genannte Senkrechte; ihre Intensität wird durch den reciproken Wert des Abstandes der Ebene φ vom Punkte ξ gemessen:

$$J = \frac{1}{\text{dist}\,(\overrightarrow{\xi, \varphi})}$$

Ebenso ist, wie wir nicht näher ausführen, der uneigentliche Quirl Bild eines Kräftepaares.

„Eigentliche Quirle $\mathfrak{Q}_o^\varphi$, $\mathfrak{Q}_o^\psi$ mit gemeinsamem Anfangspunkt o werden i. a. wie folgt „geometrisch addirt“: Man lege durch o Ebenen φ', ψ' parallel zu φ, ψ. Man verbinde hierauf die Schnittlinien φ, ψ' und ψ, φ' durch eine neue Ebene χ. Dann ist

$$\mathfrak{Q}_o^\varphi + \mathfrak{Q}_o^\psi = \mathfrak{Q}_o^\chi.“$$

(Quirlvierflach.)

„Eigentliche Quirle $\mathfrak{Q}_\xi^\omega$, $\mathfrak{Q}_\eta^\omega$ mit gemeinsamer Endebene ω werden i. a. wie folgt „geometrisch addirt“: Man projicire ξ und η orthogonal auf ω in die Punkte ξ', η'. Man verbinde hierauf ξ mit η' und η mit ξ' durch gerade Linien. Deren Schnittpunkt heifse ζ. Dann ist

$$\mathfrak{Q}_\xi^\omega + \mathfrak{Q}_\eta^\omega = \mathfrak{Q}_\zeta^\omega.“$$

(Quirltrapez.)*)

Auf ähnliche Art ist die „geometrische Addition“ uneigentlicher Quirle zu erklären, oder die eines eigentlichen und eines uneigentlichen Quirls mit gemeinsamem Anfangspunkt oder gemeinsamer Endebene.

Aus beliebig vielen Quirlen entsteht eine „formale“ Summe von solchen, die auf eine „Normalform“ gebracht werden kann, u. s. w.

II, c) Die geometrische Addition der Keile.

Ein Keil $\mathfrak{K}_\varphi^\psi$ ist die Figur zweier eigentlicher (d. h. im Endlichen gelegener) Ebenen φ, ψ, die sich nicht senkrecht schneiden. Der Keil darf um die Schnittlinie seiner beiden Ebenen gedreht werden. Er heifst eigentlich, wenn diese Schnittlinie im Endlichen liegt, andernfalls uneigentlich.

Der eigentliche Keil dient als Bild einer einzelnen Kraft, deren Wirkungslinie die Schnittlinie der Ebenen φ, ψ ist, und deren In-

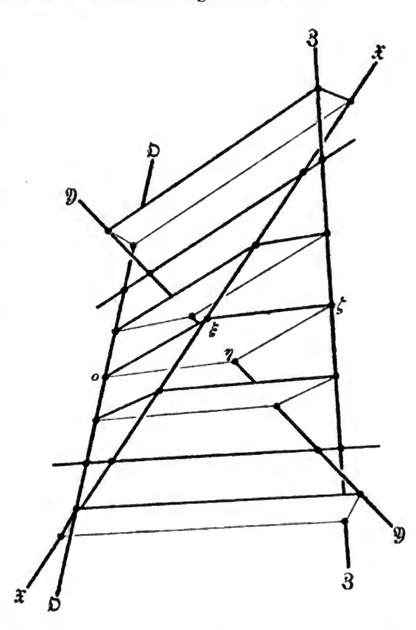
*) Die Zeichnung der ganz einfachen und sich auch dem Gedächtnis leicht einprägenden Figuren darf wohl dem Leser überlassen bleiben.

tensität durch die goniometrische Tangente des Winkels $(\overrightarrow{\varphi, \psi})$ gemessen wird:

$$J = \operatorname{tg}(\overrightarrow{\varphi, \psi}).$$

Ebenso ist der uneigentliche Keil Bild eines Kräftepaares, dessen Moment durch den Abstand seiner Ebenen gemessen wird:

$$M = \operatorname{dist}(\overrightarrow{\varphi, \psi}).$$



Die Ebene des Kräftepaares ist zu den Ebenen φ, ψ parallel.

Keile $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$, $\mathfrak{K}_\omega^\psi$ mit gemeinsamer Anfangsebene ω werden, wenn wenigstens einer von ihnen eigentlich ist, im allgemeinen „geometrisch addirt" durch die Construction des Keiltrapezes:

„Man errichte in den Schnittlinien von ω mit φ und ψ Ebenen φ', ψ' senkrecht auf ω. Man bringe hierauf φ mit ψ' und ψ mit φ' zum Schnitt, und nenne χ die Verbindungsebene der gefundenen Schnittlinien. Dann ist

$$\mathfrak{K}_\omega^\varphi + \mathfrak{K}_\omega^\psi = \mathfrak{K}_\omega^\chi."$$

Uneigentliche Keile werden „geometrisch addirt" nach der für Vectoren geltenden Regel.

Weiter ergiebt sich ein Begriff der „formalen" Summe von Keilen und der „Normalform" einer solchen.

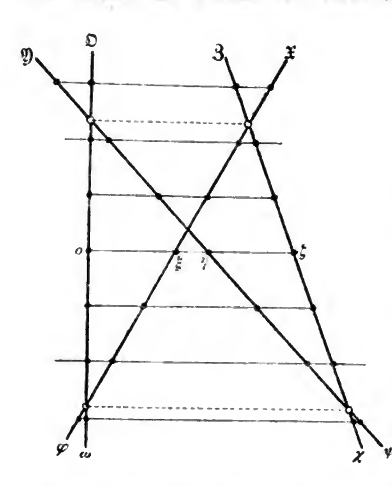
III, 1) Die geometrische Addition der Motoren.

Ein Motor $\mathfrak{M}_\mathfrak{X}^\mathfrak{Y}$ ist die Figur zweier eigentlicher Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, die sich nicht rechtwinklig kreuzen oder schneiden. Er darf

um die gemeinsame Normale seiner Anfangslinie $\mathfrak{X}$ und seiner Endlinie $\mathfrak{Y}$ beliebig gedreht und längs dieser Normale verschoben werden.

Der Motor dient als Bild einer Dyname: Ist diese (oder die entsprechende Summe von Stäben) auf die Normalform gebracht (s. oben unter II, a), so werden die für die Dyname charakteristische Intensität J der einzelnen Kraft und das Moment M des Kräftepaares durch Winkel und Abstand der Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ wie folgt gemessen:

$$J = \operatorname{tg} \operatorname{ang} (\overrightarrow{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}})$$
$$M = \operatorname{dist} (\overrightarrow{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}).$$



Die gemeinsame Normale von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ ist natürlich die Wirkungslinie der einzelnen Kraft.

Liegen zwei beliebige Motoren vor, so kann man es immer erreichen, dafs sie eine gemeinsame Anfangslinie erhalten.

Eine „geometrische Addition“ zweier Motoren $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ mit gemeinsamer Anfangslinie $\mathfrak{O}$, also zweier völlig beliebiger Motoren, kann nun auf doppelte Weise erklärt werden (vgl. die Figuren):

„Man bringe die Geraden $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ in o, ξ, η mit einer zu $\mathfrak{O}$ senkrechten veränderlichen Ebene zum Schnitt. Man suche hierauf einen vierten Punkt ζ mit Hülfe des Stäbeparallelogramms (II, a).

„Man verbinde die Geraden $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ mit einer zu $\mathfrak{O}$ senkrechten veränderlichen Richtung durch Ebenen ω, φ, ψ. Man suche hierauf eine vierte Ebene χ mit Hülfe des Keiltrapezes (II, c).

Der Ort des Punktes ζ und zugleich der Ebene χ ist eine Gerade $\mathfrak{Z}$, und es ist

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}} + \mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}}.“$$

Die geometrische Summe von beliebig vielen Motoren ist also, wenn man auch den „Motor Null“, dessen Anfangs- und Endlinie zusammenfallen, einschliefst, immer wieder ein Motor: Die Bildung eines den „formalen“ Summen von Stäben, Quirlen oder Keilen

analogen Begriffs findet nicht statt. Ebenso verhalten sich die beiden folgenden Constructionen.

III, 2) Die geometrische Addition der Impulsoren.

Ein Impulsor $\mathfrak{J}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ ist die Figur zweier Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, die nicht in einer Ebene liegen. Ein Äquivalenzbegriff ist für Impulsoren im allgemeinen genau so zu erklären wie im Falle der Motoren. Man kann also auch zwei Impulsoren auf eine gemeinsame Anfangslinie bringen, und zwar im allgemeinen dadurch, dafs man jeden einer geeigneten Schraubung um die gemeinsame Normale seiner beiden Geraden unterwirft.

Der Impulsor ist wiederum Bild einer Dyname, die Art der Zuordnung zwischen den zusammengehörigen Gröfsen ist aber eine andere:

$$J = \frac{1}{\operatorname{dist}(\overrightarrow{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}})}, \qquad M = \operatorname{ctg} \operatorname{ang}(\overrightarrow{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}).$$

Die „geometrische Addition" zweier Impulsoren $\mathfrak{J}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ mit gemeinsamer Anfangslinie $\mathfrak{O}$ erklären wir im allgemeinen wie folgt:

„Man bringe eine durch $\mathfrak{O}$ gelegte veränderliche Ebene mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zum Schnitt in ξ und η, und bezeichne eine zweite zu der ersten senkrechte Ebene durch $\mathfrak{O}$ mit ω. Man suche hierauf, mit Hülfe des Quirltrapezes (II, b) einen dritten Punkt ζ (also nach der Regel $\mathfrak{Q}_{\xi}^{\omega} + \mathfrak{Q}_{\eta}^{\omega} = \mathfrak{Q}_{\zeta}^{\omega}$). Der Ort dieses Punktes ζ ist eine Gerade $\mathfrak{Z}$, und es ist

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}} + \mathfrak{J}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}}."$$

IV. Die stereometrische Addition der Motoren.

Als Bild einer Dyname werde wiederum die Figur eines Motors benutzt, der aber nun durch ein anderes Zeichen, etwa $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ dargestellt werden möge. Die Zuordnung zwischen Dyname und Motor werde jetzt nach folgender Regel ausgeführt:

$$J = \operatorname{tg} \operatorname{ang}(\overrightarrow{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}), \qquad M = \frac{\operatorname{dist}(\overrightarrow{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}})}{\cos^2 \operatorname{ang}(\overrightarrow{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}})}.$$

Um die „stereometrische" Addition der Motoren zu erklären, die nunmehr die Zusammensetzung der Dynamen vermittelt, bezeichne man durch das Symbol

$$\widehat{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$$

die (i. a. bestimmte) gemeinsame Normale von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$. Es seien nun vorgelegt zwei Motoren $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ mit gemeinsamer Anfangslinie. Dann gilt im allgemeinen folgende Regel:

„Man construire der Reihe nach die Geraden

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{X}_1 = \widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{X}}, & \mathfrak{X}_2 = \widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{X}_1}, & \mathfrak{X}_3 = \widehat{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}}, \\ \mathfrak{Y}_1 = \widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{Y}}, & \mathfrak{Y}_2 = \widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{Y}_1}, & \mathfrak{Y}_3 = \widehat{\mathfrak{Y}_2\mathfrak{X}}, \end{array} \qquad \mathfrak{Z} = \widehat{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3}.$$

Dann wird

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}} \dotplus \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}.“$$

Statt des gewöhnlichen Zeichens der Addition ist hier ein anderes, das Zeichen $\dotplus$ benutzt worden, um eine Verwechselung der „stereometrischen Addition der Motoren“ mit der zuvor erklärten „geometrischen“ zu verhüten.

Die geschilderten Constructionen stehen in einem eigentümlichen Zusammenhang mit der Geometrie der Bewegung, den wir ebenfalls noch betrachten wollen.

Es sei ein Motor oder Impulsor gegeben durch seine Anfangslinie $\mathfrak{X}$ und seine Endlinie $\mathfrak{Y}$. Jede dieser beiden Geraden ist Axe einer Drehung mit dem Winkel π, einer sogenannten Umwendung, und sie bestimmt diese besondere Art von Bewegung. Wir denken uns nun die beiden Umwendungen in der Reihenfolge $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ hinter einander ausgeführt und zu einer neuen Bewegung zusammengesetzt. Dann ist diese letztere eine Bewegung allgemeiner Art, eine Schraubung; sie ändert sich ferner (nach einem bekannten elementaren Satze) nicht, wenn man das Geradenpaar $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ einer Schraubung um seine gemeinsame Normale unterwirft, wenn man also zu irgend einem anderen Geradenpaar übergeht, das denselben Motor oder Impulsor darstellt. Es gehört also zu jedem Motor, und im allgemeinen auch zu einem Impulsor, eine völlig bestimmte Bewegung, und auch der umgekehrte Satz ist „im allgemeinen“ richtig. Wir haben daher drei verschiedene Methoden, aus zwei Bewegungen eine dritte abzuleiten, indem wir nämlich mit den zugehörigen Paaren von Umwendungsaxen die unter III, 1, III, 2 und IV aufgezählten Constructionen vornehmen. Wir wollen in jedem Falle sagen, die dritte Bewegung sei aus den beiden anderen durch Superposition entstanden, und wir wollen die drei verschiedenen Arten der Superposition durch geeignete Beiworte unterscheiden. Wir stellen also einander gegenüber die Begriffe:

Geometrische Addition der Motoren,	Lineare Superposition der Bewegungen,
Geometrische Addition der Impulsoren,	Correlative Superposition der Bewegungen,
Stereometrische Addition der Motoren.	Stereometrische Superposition der Bewegungen.

Gleichzeitig ordnen wir die Figuren links denen rechts zu, indem wir festsetzen, dafs die zu der Bewegung gehörigen Geradenpaare $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ identisch sein sollen mit den zu dem Motor oder Impulsor gehörigen.

III, 1*) Die lineare Superposition der Bewegungen.

Wir betrachten hier nur solche Bewegungen, die nicht „Umschraubungen" sind, d. h. deren Drehungswinkel mod. 2π von π verschieden ist, und die also die Punkte der unendlich fernen Ebene nicht involutorisch paaren. Sei ξ, ξ' ein Paar von eigentlichen Punkten, deren zweiter dem ersten durch die Bewegung S zugeordnet wird, und sei o die Mitte der Sehne $\xi\xi'$. Dann gehen, wenn man die Lage eines der Punkte ξ, o, ξ' variirt, die anderen aus ihm durch gewisse collineare (genauer affine) Transformationen hervor, die man sehr leicht elementargeometrisch definiren kann. Es gehört also zu jedem Punkt o ein völlig bestimmtes Punktepaar ξ, ξ', dessen Sehnenmitte o ist. Es sei ferner φ, φ' ein Paar einander durch S zugeordneter eigentlicher Ebenen. Von den beiden Ebenen, die den Winkel von φ und φ' halbiren, ist die eine stets zur Schraubenaxe der Bewegung oder Schraubung S parallel; die andere, die „eigentliche" Winkelhalbirende, werde mit ω bezeichnet. Es wird nun, wie sich zeigen läfst, bei gegebener Bewegung S, die Abhängigkeit der Ebenen φ, φ' von der Ebene ω durch dieselben collinearen Transformationen vermittelt, wie die Abhängigkeit der Punkte ξ', ξ (nicht ξ, ξ') von dem Punkte o: Man kann also wiederum die Ebenen φ, φ' finden, wenn die Ebene ω gegeben ist; und auch diese Construction läfst sich leicht elementargeometrisch erklären. Hiernach wird der folgende Satz verständlich sein:

„Es sei der veränderlich gedachte Punkt o Mitte der Sehnen $\xi\xi'$ und $\eta\eta'$ bei zwei verschiedenen Bewegungen S_x, S_y, die nicht Umschraubungen sind, und es werde vermöge des Stäbeparallelogramms ein drittes Punktepaar ζ, ζ' construirt, so dafs z. B.

$$\mathfrak{S}_o^{\xi} + \mathfrak{S}_o^{\eta} = \mathfrak{S}_o^{\zeta}.\text{“}$$

„Es sei die veränderlich gedachte Ebene ω eigentliche Winkelhalbirende der Ebenenpaare φ, φ' und ψ, ψ' bei den Bewegungen S_x, S_y. Es werde sodann mit Hülfe des Keiltrapezes ein drittes Ebenenpaar χ, χ' construirt, so dafs z. B.

$$\mathfrak{K}_\omega^{\varphi} + \mathfrak{K}_\omega^{\psi} = \mathfrak{K}_\omega^{\chi}.\text{“}$$

„Dann entsprechen sich die Punkte ζ, ζ' und die Ebenen χ, χ' in einer und derselben dritten Bewegung S_z, die wiederum keine Umschraubung ist, und diese Bewegung entsteht aus den beiden ersten durch lineare Superposition."

III, 2*) Die correlative Superposition der Bewegungen.

Wir betrachten jetzt solche Bewegungen, die nicht Drehungen sind. Wir errichten auf der Mitte einer Sehne $\xi\xi'$ eine Ebene, die „Normalebene" der Sehne, und wir bezeichnen diese mit ω. Dann kann man wieder zu gegebener Normalebene ω die ihr durch die Bewegung zugeordnete Sehne $\xi\xi'$ leicht construiren. Die Punkte ξ und ξ' entsprechen der Ebene ω in je einer Correlation („dualistischen" oder „reciproken" Transformation), und zwar sind diese beiden Correlationen einander entgegengesetzt. Es besteht nun der Satz:

„Es sei die veränderliche Ebene ω Normalebene der Sehnen $\xi\xi'$ und $\eta\eta'$ bei zwei verschiedenen Bewegungen S_x, S_y, die nicht Drehungen sind, und es werde vermöge des Quirltrapezes ein drittes Punktepaar ζ, ζ' construirt, so dafs

$$\mathfrak{O}_{\xi}^{\omega} + \mathfrak{O}_{\eta}^{\omega} = \mathfrak{O}_{\zeta}^{\omega}, \quad \mathfrak{O}_{\xi'}^{\omega} + \mathfrak{O}_{\eta'}^{\omega} = \mathfrak{O}_{\zeta'}^{\omega}.$$

Dann entsprechen sich die Punkte ζ, ζ' im allgemeinen in einer dritten Bewegung S_z, die wieder keine Drehung ist, und diese neue Bewegung entsteht aus den beiden ersten durch correlative Superposition."

Die exacte Formulirung dieses Satzes ist nicht ganz einfach. Im besonderen Falle kann es nämlich eintreten, dafs an Stelle der Bewegung S_z eine „ausgeartete Bewegung" auftritt, eine nicht mehr eindeutig-umkehrbare Zuordnung zwischen eigentlichen Ebenen ω und unendlich fernen Punkten ξ, ξ'. Dagegen ist der vorausgehende Satz III, 1* allgemein gültig, und ebenso auch der folgende, nach gehöriger Präcisirung des Begriffs „Stereometrische Addition der Motoren".

IV*. Die stereometrische Superposition der Bewegungen.

Wir betrachten jetzt wieder Bewegungen, die nicht Umschraubungen sind (vgl. III, 1*). Zwei durch eine solche Bewegung einander zugeordnete Gerade $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ haben zwei „Winkelhalbirende", gerade Linien, die mit den gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden und den kürzesten Abstand von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ in seiner Mitte senkrecht treffen. Von diesen beiden Geraden steht die eine stets auf der Schraubenaxe senkrecht; die andere werde „eigentliche" Winkelhalbirende von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ genannt und mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet. Durchläuft nun irgend eine von den drei Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}'$ den ganzen Linienraum, so thun die beiden anderen dasselbe. Die so bestimmten Transformationen gerader Linien sind weder Correlationen noch Collineationen. Sie gehören zu einer anderen Gruppe von Transformationen, deren Raumelement (wenigstens im reellen Gebiete)

die gerade Linie ist, und deren charakteristische Eigenschaft darin besteht, dafs sie aus dem Normalennetz einer Geraden stets wieder ein solches hervorgehen lassen. Durchläuft also die Gerade $\mathfrak{D}$ das Normalennetz einer anderen Geraden, so durchlaufen auch die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ solche Normalennetze; und zwar wird die gleichzeitig bestimmte Zuordnung der Axen dieser Netze durch dieselben Transformationen, aber in umgekehrter Anordnung vermittelt.

Wir kommen nun zu dem letzten Satz unserer Reihe:

„Es sei die veränderliche Gerade $\mathfrak{D}$ eigentliche Winkelhalbirende der Geradenpaare $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ mit Bezug auf zwei verschiedene Bewegungen S_x und S_y, die nicht Umschraubungen sind, und es werde durch stereometrische Addition der Motoren $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}}$ (oder $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}'}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}'}$) ein drittes Geradenpaar $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$ definirt, so dafs

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}} \dotplus \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}, \quad \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}'} \dotplus \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}'} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}'}.$$

Dann wird der Geraden $\mathfrak{Z}$ die Gerade $\mathfrak{Z}'$ durch eine dritte Bewegung zugeordnet, die wieder keine Umschraubung ist. Diese neue Bewegung S_z entsteht aus den beiden ersten durch stereometrische Superposition.“

Lassen wir die geometrische Addition der Vectoren und einige implicite unter II, b) und II, c) enthaltene und deshalb von uns nicht besonders aufgeführte Constructionen bei Seite, mit deren Hülfe man ebenfalls nur Kräftepaare zusammensetzen kann, so haben wir insgesamt neun Systeme von Constructionen vor uns, und alle diese laufen unter einander und mit der Zusammensetzung der Dynamen parallel. Von ihnen bewirken die mit II, a, II, b und II, c bezeichneten auf einfache Weise nur die Zusammensetzung einzelner Kräfte. Die Constructionen III, 1, III, 2 und IV dagegen bewirken die Zusammensetzung der Dynamen unmittelbar, nämlich so, dafs das Bild der Dyname als Ganzes in die Construction eintritt, dafs also eine willkürliche Zerlegung der zusammenzusetzenden Dynamen in Componenten nicht stattfindet.

Die Sätze III, 1*, III, 2* und IV* stellen dem Eingangs erwähnten Satz über den Zusammenhang zwischen Dynamen und infinitesimalen Bewegungen drei verschiedene Analoga aus der Geometrie der endlichen Bewegungen an die Seite, und von ihnen sind überdies die Sätze III, 1* und IV* selbst Erweiterungen jenes bekannten Satzes.

Als Ganzes betrachtet zeigt unser System geometrischer Sätze eine eigentümliche Structur, die wir durch die Wahl der Zeichen und durch die vorausgestellten Ziffern kenntlich zu machen gesucht haben. Es werden auf diese Weise die aufgestellten Sätze zunächst

auf die vier mit I, II, III, IV bezeichneten Hauptgruppen verteilt, aber auch diese weisen unter einander weitgehende Analogien auf. Welches die Quelle dieser formalen Analogien ist, läfst sich nicht ganz kurz auseinandersetzen; doch mögen wir bemerken, dafs das Auffallende der besprochenen Erscheinung verschwindet, wenn man das gegenseitige Verhältnis zwischen der Euklidischen und der Nicht-Euklidischen Geometrie zweifach und dreifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten eingehend untersucht.

Mit der angeregten Frage hängt eine andere zusammen, die sich dem Leser vielleicht dargeboten haben wird: Ist das aufgestellte System von Constructionen in irgend einem Sinne vollständig? — Es dürfte nicht ganz leicht sein, diese Fragestellung in der Art zu präcisiren, dafs man ein Problem von im voraus einleuchtender Zweckmäfsigkeit vor sich hat. Indessen kann man doch nachträglich an unseren Figuren Eigenschaften bemerken, die sie unter allen den Figuren, mit deren Hülfe man Dynamen etwa noch würde zusammensetzen können, als die relativ einfachsten auszeichnen müssen. Die skizzirte Theorie ist in der That in einem wenn auch nicht ganz einfach zu beschreibenden Sinne vollständig.

Anwendungen und Erweiterungen bieten sich in verschiedener Richtung dar, so in der Theorie der Raumcurven, in der Theorie der Quaternionen und Biquaternionen und eines noch umfassenderen aus sechzehn Einheiten gebildeten Systems complexer Gröfsen. Die Sätze III* erweisen sich in der Ausdehnung auf den Nicht-Euklidischen Raum und auf n Dimensionen als das geometrische Äquivalent einer sehr einfachen algebraischen Operation. Nach einem bekannten von Cayley und vollständiger von Frobenius angegebenen Satze kann man die automorphen collinearen Transformationen einer quadratischen Form, insbesondere die zur Darstellung von Bewegungen dienenden orthogonalen Transformationen, bei Ausschlufs gewisser Grenzfälle, durch $\frac{n(n-1)}{2}$ von einander unabhängige Parameter ausdrücken, die das Coefficientensystem einer alternirenden Form bilden. Man kann daher aus zwei solchen Transformationen eine dritte ableiten durch Addition der zugehörigen alternirenden Formen. Diese Operation nun läfst sich quasi-geometrisch deuten durch einen Satz, der unseren Sätzen III* ganz analog ist und diese als Grenzfälle umfafst. Entsprechende Analoga hat auch der Satz IV*.

Weitere Entwickelungen knüpfen sich an einen algebraischen Beweis der Sätze IV und IV*. Hier erweist sich der Gebrauch eines Systems von Liniencoordinaten als zweckmäfsig, das — abweichend von dem Plücker'schen — aus sechs beliebigen Gröfsen gebildet, also in gewissem Grade unbestimmt ist. Mit Hülfe dieser Coordinaten kann man sehr einfach alle Transformationen im Linienraume darstellen, die aus den Normalennetzen gerader Linien immer

wieder solche hervorgehen lassen. (Vgl. das Beispiel unter IV*.) Diese bilden im Euklidischen Raume eine Gruppe mit 17, im Nicht-Euklidischen eine solche mit 16 Parametern. Die zugehörige der ebenen projectiven Geometrie nahe verwandte Liniengeometrie ist die nächstliegende unter einer ganzen Reihe von neuen — zu endlichen wie auch unendlichen Gruppen gehörigen — Arten von Liniengeometrien, deren merkwürdige Eigenschaften natürlich ebenso den Gegenstand besonderer Untersuchungen werden bilden müssen, wie weitergehende Verallgemeinerungen, die auch diese Theorien noch zulassen.

Einführung eines Mafses der Convergenz in die Lehre von der Convergenz der unendlichen Processe.

Von **E. Schimpf** in Bochum.

Nachdem vorausgeschickt worden ist, dafs das Convergenzmafs nicht nur ein Mafs der Convergenz im eigentlichen Sinne, sondern auch der Divergenz sein soll, und dafs sich die Untersuchungen nicht auf die reellen Zahlen beschränken, sondern das ganze Zahlengebiet umfassen, folgt zunächst für die unendlichen Reihen $\sum a_\varkappa$ eine Erklärung desselben: bezeichnet man die Function, welcher sich die Reihe $\sum\limits_0^n a_\varkappa$ für den Fall ihrer Convergenz als Grenzwert nähert, mit a, denkt sich alle Functionen, welche der Differenz $\sum\limits_0^n a_\varkappa - a$ infinitär gleich sind, zusammengestellt und sucht unter diesen eine solche aus, welche einen besonders einfachen Bau besitzt, so gelangt man zu einer Function, die als Convergenzmafs der Reihe gelten kann. An Potenzreihen und trigonometrischen Reihen wird das Gesagte exemplificirt und besonders darauf aufmerksam gemacht, dafs diese Convergenzmafse unmittelbar auf Ungleichmäfsigkeiten in der Convergenz, deren hohe Bedeutung zuerst von Seidel dargethan ist, hinweisen. Auch für die unendlichen Producte lassen sich in analoger Weise Convergenzmafse angeben.

Derartige Convergenzmafse einzuführen empfiehlt sich vor allem deshalb, weil mit Hilfe derselben das Verhalten der unendlichen Processe auf den Grenzgebieten, d. h. den Gebieten zwischen Convergenz- und Divergenzbereich genau erforscht werden kann; weiter ist zu erwähnen, dafs dieselben die Berechnung der Wertverschiebung, die in bedingt convergenten Reihen und Producten infolge veränderter Anordnung der Glieder, bezw. Factoren erfolgt, die Berechnung gewisser bestimmter Integrale, sowie die Ableitung conver-

genter Reihen und Producte aus divergenten ermöglichen und besonders bei complicirten unendlichen Processen zu Schlüssen führen, die die einfachen, nicht messenden Convergenzuntersuchungen nicht zulassen.

Arithmetisches über unendliche Reihen.

Von **M. Lerch** in Freiburg (Schweiz).

Handelt es sich um die numerische Berechnung der Summe einer convergirenden Reihe $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, so wäre man dem Begriff der Sache gemäfs verpflichtet, den erlaubten Fehler δ in zwei Summanden $\delta_1 + \delta_2$ zu zerlegen, die Anzahl n der zu benutzenden Glieder so zu bestimmen, dafs der Rest $u_{n+1} + u_{n+2} \cdots$ absolut kleiner wird als δ_1, und dann die bei der Rechnung zu berücksichtigende Genauigkeit (Stellenanzahl) so zu treffen, dafs die Summe der Fehler, die man bei der Berechnung von $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ begehen mufs, weniger als δ_2 ausmacht.

Durch tabellarische und sonstige Umstände ist man jedoch gewöhnt (und sogar gezwungen), die Anzahl der zu gebrauchenden Decimalstellen von vornherein zu wählen und bei der Berechnung der Reihe alle Glieder zu benutzen, welche für die in Betracht kommenden Decimalstellen von Null verschiedene Beträge liefern.

Dieser Rechnungsprocedur sollen hier einige Bemerkungen gewidmet sein.

Ist k die Anzahl der zu benutzenden Decimalstellen, so setzen wir $10^k = m$; es kommt dann an Stelle der positiven Gröfse u_ν ihr Näherungswert $\frac{[m u_\nu]}{m}$ zum Ersatz; dabei bedeutet $[m u_\nu]$ wie üblich das gröfste Ganze von $m u_\nu$. Wir ersetzen daher die unendliche Reihe $\sum u_\nu$ durch ihren Näherungswert $\frac{1}{m}\sum [m u_\nu]$.

Wir wollen zu gleicher Zeit den Gegenstand verallgemeinern und betrachten die Reihen von der Form

$$\mathfrak{S} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + \cdots,$$

indem wir annehmen, dafs die w positiv sind und $\lim w_\nu = 0$ $(\nu = \infty)$, dagegen aber die v beliebige Gröfsen sein können. Dieser Reihe stellen wir den endlichen arithmetischen Ausdruck

$$\mathfrak{S}_m = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu [m w_\nu]$$

zur Seite, indem wir unter m irgend eine positive ganze Zahl verstehen.*) Unsere Frage bezieht sich auf die Gröfse

$$\lim_{m=\infty} \mathfrak{S}_m,$$

und zu ihrer Beantwortung mögen folgende Beiträge erwähnt werden:

Wenn die Convergenz der Reihe eine absolute ist, so ist ohne Ausnahme $\lim \mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}$.

Es bleiben daher lediglich bedingt convergirende Reihen zu betrachten. Für dieselben gelten die Sätze:

Die Gleichung $\lim \mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}$ besteht in dem Falle, wenn die v_ν abwechselnd $+1$ und -1 bedeuten, und die w_ν mit wachsendem ν abnehmen $(S = w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + \cdots)$.

Gleiches findet statt unter derselben Annahme über die w, wenn man $v_\nu = \sin \nu x$ oder $v_\nu = \cos \nu x$ setzt $(0 < x < 2\pi)$, also für trigonometrische Reihen mit positiven abnehmenden Coefficienten.

Es wird auch $\lim \mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}$ sein, wenn die Reihe $\sum v_\nu w_\nu$ so beschaffen ist, dafs die w_ν wie vorher abnehmen, und die v_ν die Bedingung erfüllen, dafs die Summe $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ absolut kleiner bleibt als eine Gröfse von der Form

$$\frac{M}{w_n^\varrho},$$

wobei M eine positive Constante und ϱ einen constanten positiven echten Bruch bedeutet.

Diese paar Beispiele geben zugleich die Mittel an die Hand, Reihen zu bilden, für welche der analoge Satz nicht besteht. Man nehme z. B. eine convergirende Reihe von der Form

$$S = w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + \cdots$$

und forme dieselbe so um, dafs man eine andere Summe

$$\mathfrak{S} = \pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm \cdots$$

erhält. Der entsprechende arithmetische Ausdruck

$$\mathfrak{S}_m = \pm \frac{[m u_1]}{m} \pm \frac{[m u_2]}{m} \pm \frac{[m u_3]}{m} \pm \cdots\cdots$$

ist hier offenbar mit $\mathfrak{S}_m$ identisch (wie überhaupt sich $\mathfrak{S}_m$ durch die Änderung der Reihenfolge in $\mathfrak{S}$ nicht ändern kann), und daher wird

*) Man könnte auch gebrochene m zulassen, sowie etwas allgemeiner an Stelle von $[m w_\nu]$ den Ausdruck $[m w_\nu + \xi]$ treten lassen.

$$\lim_{m=\infty} \mathfrak{S}_m = \lim_{m=\infty} S_m = S$$

eine von $\mathfrak{S}$ verschiedene Gröfse sein.

Demnach ist wahrscheinlich, dafs es auch bedingt convergirende Reihen geben kann, für welche der arithmetische Ausdruck S_m keinen bestimmten Grenzwert haben wird. Diese und sonstige naheliegende Fragen durch Construction von Beispielen zu beantworten, wäre wohl von grofsem Interesse.

Was die bei wirklichen Rechnungen möglichen Fehler anbetrifft, so sind allgemeine und tiefer liegende Sätze kaum zu erwarten; in der Praxis benutzt man sowieso nur sehr rasch convergirende Ausdrücke, und hierin setzt sich die obere Grenze des Fehlers aus derjenigen des Restes und der mit der Anzahl der benützten Glieder multiplicirten ersten vernachlässigten Decimaleinheit zusammen.

Divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen.

Von **J. Horn** in Charlottenburg.

Als Beispiel diene die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + x^k P \frac{dy}{dx} + x^{2k} Q y = 0,$$

in welcher k eine ganze positive Zahl (einschl. 0) ist und P, Q rationale Functionen von x bedeuten, welche in der Umgebung von $x = \infty$ die Entwicklung zulassen:

$$P = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots, \quad Q = b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots.$$

Wenn die Wurzeln α_1, α_2 der Gleichung $\alpha^2 + a_0\alpha + b_0 = 0$ verschieden sind, wird (A) durch zwei Thomé'sche Normalreihen

$$S_h = e^{\frac{\alpha_h x^p}{p} + \frac{\alpha_{h1} x^{p-1}}{p-1} + \cdots} x^{\lambda_h}\left(A_h + \frac{A_{h1}}{x} + \frac{A_{h2}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (h = 1, 2)$$

formell befriedigt, und zwar ist A_{hn} für grofse n im allgemeinen von der Gröfsenordnung $\sqrt[p]{n!}$ $(p = k + 1)$. Im Falle $k = 0$ führt eine passende Umgestaltung der Borel'schen Summation divergenter Reihen (Ann. de l'Éc. norm. 1899) von den Reihen S_h zur Laplace'schen Transformation, von welcher Poincaré (Am. Journ. Bd. 7, Act. math. Bd. 8) Gebrauch gemacht hat, um das Verhalten der irregulären Integrale linearer Differentialgleichungen zu untersuchen*); der Fall

*) Vgl. Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, Kap. 14.

$k > 0$ läfst sich auf den Fall $k = 0$ (unter Erhöhung der Ordnung der Differentialgleichung) zurückführen. Indem man den von Poincaré eingeschlagenen Weg weiter verfolgt (womit ich für den Fall $k = 0$ im 49. und 50. Bd. der Math. Ann. begonnen habe), erhält man einen genaueren Einblick in das Verhalten der Integrale von (A) in der Nähe der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir etwa $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$ annehmen.

Die Gleichung (A) besitzt $2p$ ausgezeichnete Integrale $\eta_1^{(\varrho)}$, $\eta_2^{(\varrho)}$ $(\varrho = 0, 1, \ldots p-1)$ von der Beschaffenheit, dafs in der Nähe von $x = \infty$ $\eta_1^{(\varrho)}$ für $\frac{(2\varrho-1)\pi}{p} < \arg x < \frac{(2\varrho+2)\pi}{p}$ durch die Reihe S_1, $\eta_2^{(\varrho)}$ für $\frac{(2\varrho-2)\pi}{p} < \arg x < \frac{(2\varrho+1)\pi}{p}$ durch die Reihe S_2 asymptotisch dargestellt wird; dagegen wird das allgemeine Integral (von einem constanten Factor abgesehen) für $\frac{2\varrho\pi}{p} < \arg x < \frac{(2\varrho+1)\pi}{p}$ durch die Reihe S_2, für $\frac{(2\varrho-1)\pi}{p} < \arg x < \frac{2\varrho\pi}{p}$ durch die Reihe S_1 asymptotisch dargestellt. Um ein beliebiges Integral y von (A) etwa in der Nähe von $\arg x = 0$ zu untersuchen, setzt man $y = c_1\eta_1^{(0)} + c_2\eta_2^{(0)}$; man findet durch formale Auflösung der Gleichung $c_1 S_1 + c_2 S_2 = 0$ eine asymptotische Reihenentwicklung für die in der Nähe von $x = \infty$, $\arg x = 0$ gelegenen Nullstellen von y. Ein Integral von (A), welches nicht bis auf einen constanten Factor mit einem ausgezeichneten Integral übereinstimmt, besitzt in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ in der Nähe der Geraden $\arg x = \frac{\nu\pi}{p}$ $(\nu = 0, 1, \cdots)$ unendlich viele Nullstellen x_n in solcher Anordnung, dafs $\sum\limits_n |x_n|^{-m}$ für $m < p$ divergent, für $m > p$ convergent ist.

Die Differentialgleichung (A) besitzt bekanntlich im allgemeinen zwei Integrale $y_i = x^{r_i} P_i(x)$ $(i = 1, 2)$, wo $P_i(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$ eindeutig ist. Vermittelst der asymptotischen Darstellung einer solchen Function y und der Sätze von Hadamard über ganze transcendente Functionen findet man, dafs $P_i(x)$ auf die Form gebracht werden kann:

$$P(x) = x^\mu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot G(x);$$

dabei ist μ eine ganze Zahl und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine in der Umgebung von $x = \infty$ convergente Potenzreihe ohne Nullstellen für $|x| > R$ (wo R oberhalb einer gewissen Grenze beliebig zu wählen ist); $G(x)$

ist eine ganze transcendente Function vom Geschlecht p, welche die aufserhalb des Kreises $|x| > R$ gelegenen Nullstellen von $P(x)$ zu Nullstellen hat. Es ist nämlich, wenn man diese Nullstellen mit ω_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bezeichnet und unter $g(x)$ eine ganze Function p^{ten} Grades versteht,

$$G(x) = e^{g(x)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\omega_n}\right) \cdot e^{\frac{x}{\omega_n} + \frac{x^2}{2\omega_n^2} + \cdots + \frac{x^p}{p\,\omega_n^p}}.$$

Der Beweis der ausgesprochenen Sätze wird in den Act. math. erscheinen. An Stelle der Laplace'schen Transformation kann man auch eine Methode successiver Annäherungen benutzen (vgl. Comptes rendus, Jan. 1898), wobei die Beschränkung fortfällt, dafs die Coefficienten von (A) rationale Functionen sind.

Eine fundamentale Classification der Differentialprobleme.

Von **E. v. Weber** in München.

Der Vortragende berichtete kurz über den gegenwärtigen Stand der Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen und erörterte sodann die algebraische Natur der Differentialinvarianten, die ein Pfaff'sches System in n Variablen gegenüber beliebigen Punkttransformationen des R_n besitzt.

Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen.

Von **K. Hensel** in Berlin.

Die Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen oder die Theorie der algebraischen Oberflächen und Raumcurven ist seit ihrer Begründung durch Clebsch und Nöther bisher wesentlich nach der mehr geometrischen Richtung ausgebildet worden, welche bei der Untersuchung der ebenen algebraischen Curven zu so schönen Erfolgen geführt hatte. Dagegen ist dieses Gebiet bisher noch nicht mit den Hülfsmitteln der reinen Analysis behandelt worden, wie dies für Functionen einer Variablen durch Cauchy, Puiseux und später in weiterem Umfange durch Riemann und Weierstrafs geschehen ist.

Ich möchte hier die Grundlagen einer Theorie auseinandersetzen, welche wohl als die directe Verallgemeinerung der Weierstrafsschen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen auf

Functionen von zwei und beliebig vielen Variablen angesehen werden kann.

Dieser Vortrag zerfällt in einen analytischen und einen arithmetisch-algebraischen Abschnitt.

Mein Ziel ist, zunächst zu zeigen, dafs und in welcher Weise der gesamte Wertevorrat einer n-wertigen algebraischen Function von zwei Variablen stetig, d. h. in n Zweigen, ausgebreitet werden kann, und wie die einzelnen Zweige derselben in einander übergehen; dies ist der analytische Teil dieses Vortrages. Dann, und das wird der arithmetische Teil desselben sein, will ich darlegen, dafs nunmehr die Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen auf rein arithmetischer Grundlage entwickelt werden kann und zu ganz ähnlichen Resultaten führt wie die Weierstrafs'sche Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen.

I.

Es sei

$$f(z, xy) = A_n(xy)\, z^n + A_{n-1}(xy)\, z^{n-1} + \cdots + A_0(xy) = 0$$

eine ganz beliebige irreducible Gleichung $n$ten Grades in z mit ganzen Functionen von x und y als Coefficienten. Fixirt man in der xy-Ebene einen Punkt $\mathfrak{P}_0$, $(x = \alpha_0,\ y = \beta_0)$ so, dafs die n zugehörigen Werte $\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \cdots \gamma_n^{(0)}$ von z, also die n Wurzeln der Zahlengleichung $f(z, \alpha_0\beta_0) = 0$, alle endlich und von einander verschieden sind, so kann man für jeden Nachbarpunkt $\mathfrak{P} = (\alpha, \beta)$ die Wurzeln $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$ so bezeichnen, dafs sie bezw. mit $\gamma_1^{(0)}, \cdots \gamma_n^{(0)}$ nach der Stetigkeit zusammenhängen, d. h. in sie übergehen, wenn $\mathfrak{P}$ auf dem kürzesten Wege zu $\mathfrak{P}_0$ hingeführt wird. Läfst man den Punkt $\mathfrak{P}$ continuirlich weiter und weiter fortrücken, so kann man den gesamten Wertevorrat der n-wertigen Function z in n stetig zusammenhängende Reihen ausbreiten, ohne jemals über die Numerirung der n Wurzeln in Zweifel zu kommen; nur mufs man, genau wie bei den Functionen einer Variablen, die kritischen Punkte, nämlich alle diejenigen Stellen ausschalten, für die eine der n Wurzeln γ unendlich grofs ist, oder wo zwei Wurzeln einander gleich werden.

Während nun jene kritischen Punkte bei den Functionen einer Variablen nur in endlicher Anzahl auftreten, bilden sie hier ein System von *Curven;* es stellt nämlich der höchste Coefficient $A_n(xy)$, gleich Null gesetzt, die Curve aller Pole von z dar, während die Gleichungsdiscriminante $D(xy) = 0$ alle und nur die im Endlichen liegenden Punkte definirt, für welche zwei Wurzeln einander gleich werden. Hierzu können in beiden Fällen noch die beiden unendlich fernen Geraden $\frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{y} = 0$ treten. Fallen für

einen Punkt der Discriminantencurve etwa γ_1 und γ_2 zusammen, während alle übrigen Zweige um eine endliche Gröfse von γ_1 und γ_2 verschieden sind, und umläuft man von der γ_1 entsprechenden Wurzel z_1 ausgehend jene Curve in einem genügend kleinen Abstande, so kann jener Zweig offenbar nur entweder in z_2 oder wieder in z_1 zurückkehren; genau ebenso wie in der Theorie der Functionen einer Variablen würde im ersten Falle jener Punkt als Doppelpunkt, im zweiten als Verzweigungspunkt angesehen werden können. Aber jene kritischen Punkte treten hier niemals isolirt, sondern als Continua, als kritische *Curven* auf. Während also die algebraischen Functionen einer Variablen in der Umgebung eines kritischen oder regulären *Punktes* darzustellen sind, bietet sich hier die allgemeinere Aufgabe, die algebraische Function z soll in der Umgebung einer regulären oder kritischen *Curve*, oder allgemeiner, sie soll in der Umgebung eines beliebigen Zweiges *irgend einer* ebenen Curve $P(y, x) = 0$ dargestellt werden.

Ist nun $\mathfrak{P}_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ ein beliebiger Punkt, den ich der Einfachheit wegen im Endlichen annehme, so kann ein durch $\mathfrak{P}_0$ hindurchgehender Zweig l_0 einer algebraischen Curve in der Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ stets in der Form dargestellt werden:

$$1)\quad y = y_0(x \mid \alpha_0) = \beta_0 + \beta_1 (x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}} + \beta_2 (x - \alpha_0)^{\frac{2}{a}} + \cdots,$$

wo y_0 eine bestimmte algebraische Potenzreihe bedeutet; es sei jene Reihe ein Zweig der irreduciblen Curve

$$P(y, x) = y^\mu + p_1(x)\, y^{\mu-1} + \cdots + p_\mu(x) = 0.$$

Nur dann ist jene Darstellung (1) nicht möglich, wenn dieser Zweig die Gerade $x = \alpha_0$ oder eine der unendlich fernen Geraden $\frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{y} = 0$ ist; aber diese speciellen Curven bieten nach Erledigung des allgemeinen Falles nicht die geringste Schwierigkeit dar, weshalb ich hier von ihnen absehe.

Man kann dann die Fundamentalaufgabe so aussprechen: Es sollen die Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$ der Gleichung $f(z, xy) = 0$ in einer endlichen Umgebung von l_0 durch Reihen dargestellt werden, welche hier gleichmäfsig convergiren.

Man kann diese Aufgabe leicht auf eine Form bringen, in welcher sie der entsprechenden für Functionen einer Variablen analog ist. Setzt man die Linearfactoren

$$y - y_0(x \mid \alpha_0) = \eta, \qquad (x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}} = \xi,$$

so geht die Gleichung für z über in:

$$\bar{f}(z, \eta) = \bar{A}_n(\eta)\, z^n + \bar{A}_{n-1}(\eta)\, z^{n-1} + \cdots + \bar{A}_0(\eta) = 0,$$

wo die Coefficienten $\overline{A}_i(\eta)$ ganze Functionen von η mit algebraischen Potenzreihen von ξ als Coefficienten sind. Für jeden speciellen Wert von ξ innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches aller dieser Reihen kann also nach der Puiseux'schen Theorie z in eine Reihe entwickelt werden, welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von η oder $y - y_0$ fortschreitet, und man wird schon hierdurch auf die Annahme geführt, daſs die n Wurzeln auch für ein variables x in gewisser Umgebung des Punktes $x = \alpha_0$ in Reihen von der Form entwickelbar sind:

$$c_h(x \mid \alpha_0)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + c_{h+1}(x \mid \alpha_0)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots,$$

in welchen die Coefficienten Potenzreihen sind, die in der Umgebung des Punktes $x = \alpha_0$ gleichmäſsig convergiren. Zum Beweise aber, daſs jene n Reihen als Functionen von x und y gleichmäſsig in einem endlichen Bereiche convergiren und in diesem jene n Wurzeln darstellen, ferner zur Auffindung des algebraischen Charakters der Coefficienten $c_h(x \mid \alpha_0)$, insbesondere ihrer Ordnungszahlen und ihrer Pole für x, endlich zur wirklichen Bestimmung jener einzelnen Zweige brauchte ich ein rein arithmetisches Verfahren, in welchem die Coefficienten und Exponenten einzeln und successive berechnet werden; dieses, aber auch nur dieses, kann dann nicht nur bei den Functionen einer Variablen, sondern wörtlich ebenso auch bei den Functionen zweier Veränderlichen angewendet werden, während das gewöhnliche Verfahren in dieser Theorie versagt.

Die n so sich ergebenden Reihen $z_1, z_2, \cdots z_n$ schreiten im allgemeinen nach ganzen Potenzen von $y - y_0$ fort; nur für gewisse unter den Discriminantencurven, ich nenne sie die Verzweigungscurven, erhält man für einige Wurzeln Reihen nach Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$, wo b eine Zahl $\leq n$ bedeutet. Hat man aber eine solche Reihe, so existiren unter den n Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ hier, wie bei den Functionen einer Variablen auch die b conjugirten Reihen; denn man erhält sie, wenn man den zugehörigen Curvenzweig l_0 innerhalb des Convergenzbereiches umläuft. Man wird also in diesem höheren Gebiete auf denselben Unterschied geführt, wie in der Theorie der ebenen Curven: Die Discriminantencurve $D(xy) = 0$ zerfällt nämlich in die Doppelcurven und in die Verzweigungscurven. Bei einer Doppelcurve schreiten die bezüglichen Wurzeln nach ganzen Potenzen von $y - y_0$ fort, nur stimmen für zwei Wurzeln, etwa z_1 und z_2 in den Reihen:

$$z_1 = c_0(x \mid \alpha_0) + c_1(x \mid \alpha_0)(y - y_0) + \cdots$$
$$z_2 = c_0(x \mid \alpha_0) + \overline{c}_1(x \mid \alpha_0)(y - y_0) + \cdots$$

die Anfangsglieder $c_0(x \mid \alpha_0)$ überein; die Oberfläche durchsetzt sich daher längs der ganzen Curve $P = 0$ in zwei Blättern. Bei einem

Umlauf um die Curve $P = 0$ wird aber jeder der beiden Zweige z_1 und z_2 offenbar in sich zurückgeführt.

Bei einer Verzweigungscurve $(b - 1)$ter Ordnung dagegen hat man genau b Zweige, welche bei Umkreisung derselben cyklisch in einander übergeführt werden. Eine kritische Curve besteht also entweder aus lauter Doppelpunkten oder aus lauter Verzweigungspunkten der Oberfläche.

Selbstverständlich kann auch der Fall eintreten, dafs eine Doppelcurve zugleich eine Verzweigungscurve ist; man kann aber sehr einfach nachweisen, dafs man die Oberfläche $f(z, xy) = 0$ in der Classe stets so auswählen kann, dafs diese Besonderheit nicht eintritt.

Die Coefficienten $e_h(x \mid \alpha_0)$, $e_{h+1}(x \mid \alpha_0), \cdots$ hängen alle algebraisch von y_0 ab, aber wie weit man auch in der Reihe gehen möge, sie sind algebraische Functionen von derselben Ordnung, sie sind also alle eindeutig auf einer und derselben Riemann'schen Kugelfläche R_ν ausgebreitet, auf der auch y_0 eindeutig ist, weil alle Coefficienten $e_i(x \mid \alpha_0)$ von y_0 algebraisch abhängen. Hieraus folgt, dafs die Ordnung μ von y_0 entweder gleich ν ist, oder dafs $\nu = \lambda\mu$ ist, so dafs zu y_0 genau λ conjugirte Coefficientensysteme oder λ conjugirte Reihen $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ gehören. Alle Coefficienten $e_i(x \mid \alpha_0)$ besitzen ferner auf R_ν nur eine endliche Anzahl von Polen, wie weit man auch in den Reihen fortschreiten mag, aber es kann sehr wohl der Fall eintreten, dafs mit wachsendem Index die Ordnungszahl der Coefficienten in jenem Pole über jedes Mafs hinaus wächst; die Pole treten im wesentlichen in den Schnittpunkten der Curve $P(y, x) = 0$ mit der Discriminantencurve auf, und sonst noch für gewisse andere Punkte, die das Verfahren unmittelbar ergiebt. Wächst aber die Ordnungszahl über jedes Mafs hinaus, so zeigt sich, dafs, wenn man den Linearfactor $y - y_0$ durch $\frac{y - y_0}{(x - \alpha_0)^d}$ ersetzt und d geeignet wählt, dann kein Pol mehr auftritt und die Reihe in derselben Umgebung gleichmäfsig convergirt.

Die n Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$ convergiren, als Functionen von x und y betrachtet, gleichmäfsig innerhalb einer endlichen Umgebung des betrachteten Curvenzweiges, nur ist ähnlich wie beim Laurent-schen Satze die Gerade $x = \alpha_0$ bezw. die Curve $y - y_0$ durch eine unendlich enge Umhüllung von dem Bereiche auszuschliefsen, wenn eine jener Entwickelungen mit negativen Potenzen von $x - \alpha_0$ oder $y - y_0$ beginnt. Nur dann wird der Convergenzbereich in x und y unendlich klein, wenn sich der Punkt $\mathfrak{P}_0$, auf R_ν fortwandernd, einem kritischen Punkte für die Coefficienten $e_h(x \mid \alpha)$ nähert; und zwar sind dieses die Verzweigungspunkte von R_ν, die Pole der Coefficienten, und endlich die Stellen, in denen $P = 0$ die Discriminantencurve schneidet; ihre Anzahl ist also endlich. In jenen kritischen Punkten

selbst besitzt aber die bezügliche Entwickelung wieder einen endlichen Convergenzbereich, und es giebt eine und nur eine von den n dort vorhandenen Reihen, welche in der ganzen Umgebung mit den dort gültigen Entwickelungen coincidirt.

Geht man also von einer Wurzel

$$z_1 = c_h(x \mid \alpha_0)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + c_{h+1}(x \mid \alpha_0)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$

aus, so kann man sie jetzt über die ganze zugehörige Riemann'sche Fläche ohne eine einzige Ausnahme fortsetzen, und man erhält so in der ganzen Umgebung der Curve $P = 0$ gültige und in endlichem Bereiche gleichmäfsig convergente Reihen, wie auch jene Curve $P = 0$ angenommen sein mag. Bezeichnet man mit $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_0^{(1)}, \cdots \mathfrak{P}_0^{(\lambda-1)}$ die λ von den ν unter $\mathfrak{P}_0$ liegenden, also zu $x = \alpha_0$ gehörigen Punkte von R_ν, für welche y_0 ungeändert bleibt, so ergeben sich zu der ersten Entwickelung z_1 genau λ und nur λ andere $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$, welche ebenfalls nach Potenzen von $y - y_0$ und $x - \alpha_0$ fortschreiten, welche also in den n zugehörigen Wurzeln $z_1 \cdots\cdots z_n$ enthalten sind. Von jenen n Wurzeln sind also genau λ einfache analytische Fortsetzungen aus z_1, also durch jene eine mitbestimmt; hierzu treten noch je b durch Umlaufung der Verzweigungscurve sich ergebende, so dafs man zu einer Wurzel einen Cyklus von λb anderen erhält; sie und nur sie können längs $P = 0$ in einander übergeführt werden. Betrachtet man die übrigen Wurzeln und greift eine von ihnen heraus, so ordnen sich ihr wieder etwa $\lambda' b'$ andere zu, welche auf einer zweiten Riemann'schen Fläche $R_{\nu'}$ eindeutig ausgebreitet sind. So erkennt man, dafs zu jeder Curve $P = 0$ eine Anzahl eindeutig bestimmter Riemann'scher Flächen, etwa die drei R_ν, $R_{\nu'}$, $R_{\nu''}$, gehören, auf denen die n Wurzeln in der Umgebung von $P = 0$ eindeutig ausgebreitet sind.

Die geometrische Bedeutung dieses Resultates kann folgendermafsen ausgesprochen werden: Es sei L die Schnittcurve der Oberfläche $f = 0$ und des der Curve $P = 0$ zugehörigen senkrechten Cylinders. Die n zu einem Zweige $(x = \alpha_0,\ y = y_0)$ gehörigen Reihen $z_1, z_2, \cdots z_n$ stellen dann die z-Coordinaten der Oberfläche in der Umgebung jener Schnittcurve L dar, also gewissermafsen innerhalb eines auf der Oberfläche sich hinziehenden Bandes von überall bestimmter endlicher Breite, welches L umgiebt. Hängen nun von jenen n Wurzeln bezw. λb, $\lambda' b'$, $\lambda'' b''$ auf den zugehörigen Flächen zusammen, so heifst das geometrisch, dafs jenes Band, die Umgebung von L, in drei getrennte Teile zerfällt, welche ihrerseits in sich zusammenhängen. Die Schnittcurve L selbst kann dabei in mehr als drei getrennte Teile zerfallen, denn ist etwa $z_1 = c_0(x \mid \alpha) + \cdots$, so stellt die Reihe $c_0(x \mid \alpha)$ nebst ihren Fortsetzungen den ersten Teil von L dar. Wenn nun das Anfangsglied von niedrigerer als

der νten Ordnung ist, was für kritische Curven $P(y, x) = 0$ im allgemeinen eintritt, so zerfällt L auf dem ersten Bande in getrennte Teile, welche erst dann zusammenhängen, wenn man L selbst verläfst und innerhalb des Bandes fortgeht.

Wir sagen nun: die Wurzel z_1 ist in Bezug auf die Curve $P = 0$ von der Ordnung h, wenn die Entwickelung von z_1 mit der $h$ten Potenz von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ beginnt. Ist dies aber für irgend einen der Punkte von R_ν der Fall, so gilt dasselbe für alle Fortsetzungen; es besitzt also die algebraische Function z auf der ganzen zugehörigen Riemann'schen Fläche die Ordnung h. Aus diesem Grunde ordne ich jeder Riemann'schen Fläche R_ν einen Primdivisor p zu und sage: die algebraische Function z enthält den Divisor p in der $h$ten Potenz, oder sie ist durch p^h teilbar, wenn die Entwickelung von z auf R_ν von der Ordnung h ist. Zu jeder ebenen Curve, z. B. zu $P(y, x) = 0$ gehören dann genau so viele Primfactoren p, p', p'', als ihr Riemann'sche Flächen $R_\nu, R_{\nu'}, R_{\nu''}$ entsprechen. Ein Primteiler p besitzt die Verzweigungsordnung $b - 1$, wenn die zugehörigen Entwickelungen nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreiten, wenn also die zugehörige Verzweigungscurve diese Ordnung besitzt, und er besitzt die Coefficientenordnung λ, wenn die Coefficienten $e_h(x \mid \alpha_0)$, $e_{h+1}(x \mid \alpha_0) \ldots$ in Bezug auf y_0 von der λten Ordnung sind; alsdann gehören also von den n Entwickelungen $z_1, z_2, \cdots z_n$ genau λb zu p. Sind also etwa p, p', p'' die zu einer Function $P(y, x)$ gehörigen Primteiler, so ist

$$\lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' = n.$$

Die Summe $l = \lambda + \lambda' + \lambda''$ der Coefficientenordnungen für alle Primteiler p, p', p'' einer Function $P(y, x)$ ist hiernach im allgemeinen gleich n; sie ist nämlich dann und nur dann kleiner als n, wenn mindestens eine der Ordnungen b, b', b'' gröfser als 1, wenn also einer jener Teiler ein Verzweigungsteiler ist; nur für eine endliche Anzahl von Functionen ist also $n - l > 0$, da ja die Verzweigungsteiler nur gewissen unter den in endlicher Anzahl auftretenden Discriminantencurven entsprechen.

II.

Ich gehe nun zum zweiten, mehr arithmetischen Teile meines Vortrages über und betrachte die ganze Flächenclasse, welche zu der durch die Gleichung $f(z, xy) = 0$ definirten Oberfläche gehört; oder, was im wesentlichen dasselbe ist, ich untersuche den Körper $K(xyz)$ aller rationalen Functionen

1) $$Z = \varphi(x, y, z)$$

unter der Voraussetzung, dafs z durch die Gleichung $f(z, xy) = 0$ als algebraische Function von x und y definirt ist. Dann existiren für Z in der Umgebung eines Zweiges l_0 der beliebigen Curve $P(y, x) = 0$ ebenfalls genau n Entwickelungen:

$$2)\quad Z_1 = \varphi(x, y, z_1), \quad Z_2 = \varphi(x, y, z_2), \cdots Z_n = \varphi(x, y, z_n),$$

welche erhalten werden, wenn man in (1) für z die n Reihen $z_1, z_2, \cdots z_n$ einsetzt, durch die z hier dargestellt wird. Die n Functionen (2) sind dann also ebenfalls Reihen nach Potenzen von $y - y_0$ und $x - \alpha_0$, welche in einer endlichen Umgebung des Zweiges l_0 gleichmäfsig convergiren und dort die n Wurzeln $Z_1, Z_2, \cdots Z_n$ darstellen.

Diese n Wurzeln Z_i in (2) verteilen sich also ebenfalls auf die zu $P = 0$ gehörigen Riemann'schen Flächen $R_\nu, R_{\nu'}, R_{\nu''}$ und besitzen für eine jede von ihnen eine ganz bestimmte Ordnungszahl, d. h. die Function Z enthält ebenfalls einen jeden der im vorigen Abschnitte definirten Primteiler p in einer bestimmten ganzzahligen Potenz k, welche positiv, negativ oder Null sein kann.

Jede algebraische Function Z des Körpers $K(xyz)$ enthält nur eine endliche Anzahl von Primfactoren p in einer von Null verschiedenen Potenz, und man kann daher durch die Äquivalenz

$$3)\qquad Z \sim \vartheta \sim p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

Z in derselben Weise durch das Product ihrer Primteiler darstellen, wie dies in der elementaren Mathematik bei den ganzen oder gebrochenen Zahlen geschieht; und diese Darstellung von Z ist eine völlig invariante, d. h. ganz unabhängig von den gewählten unabhängigen Variablen x, y, z. Durch diese Darstellung (3) ist die Function Z bis auf eine multiplicative Constante völlig bestimmt.

Fafst man in (3) das Product aller Primfactoren mit positiven Exponenten zu einem Zähler $\mathfrak{z}$, das entsprechende Product für die negativen Exponenten zu einem Nenner $\mathfrak{n}$ zusammen, so erhält man eine Darstellung von Z:

$$3\text{a})\qquad Z \sim \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}},$$

in welcher der Zähler der Gesamtheit aller Nullcurven, der Nenner der Gesamtheit aller Polcurven entspricht; diese Darstellung ist somit die directe Verallgemeinerung der Bestimmung einer algebraischen Function von einer Variablen durch ihre Nullstellen und ihre Pole.

Die hier auftretenden Primteiler p sind von einander unabhängig; man kann nämlich stets Gröfsen Z des Körpers $K(x, y, z)$ finden, welche beliebig gegebene Divisoren in vorgeschriebenen Potenzen enthalten und durch gegebene andere Primteiler nicht teilbar sind.

Ist speciell Z eine solche Gröfse des Körpers $K(x, y, z)$, für welche der Nenner in (3a) nur die den beiden unendlich fernen Geraden $(x = \infty)$ und $(y = \infty)$ zugehörigen Primfactoren p_∞ enthält, so wird Z für endliche Werte von (x, y) überhaupt nicht unendlich; eine solche Function Z wird eine **ganze** algebraische Function von x und y genannt. Alle diese Functionen und nur sie sind Wurzeln von Gleichungen

$$4) \qquad Z^n + B_{n-1}(x, y) Z^{n-1} + \cdots + B_0(x, y) = 0,$$

deren Coefficienten **ganze** rationale Functionen von x und y sind, und die zugehörigen Gleichungen (4) stellen geometrisch Flächen dar, welche im Endlichen keine unendlich grofsen Ordinaten besitzen.

Die erste hier sich darbietende Aufgabe ist nun die, alle ganzen algebraischen Functionen Z in derselben Weise durch ein Fundamentalsystem darzustellen, wie dies für die ganzen algebraischen Zahlen und die Functionen einer Variablen schon früher geschehen ist. Leopold Kronecker, der diesen Fragen zuerst nähergetreten ist, zeigte in seiner Festschrift, dafs diese Aufgabe zwar lösbar ist, behauptete jedoch, dafs dieses Fundamentalsystem im allgemeinen mehr als n Elemente besitzen müsse. Ich habe nun gefunden, dafs man immer genau n ganze algebraische Functionen $Z_1^{(1)}, Z_2^{(2)}, \cdots Z_n^{(n)}$, und zwar durch ein endliches rationales Verfahren so bestimmen kann, dafs alle und nur die ganzen algebraischen Functionen in der Form

$$u_1 Z^{(1)} + u_2 Z^{(2)} + \cdots + u_n Z^{(n)}$$

mit ganzen rationalen Functionen von x und y als Coefficienten darstellbar sind, dafs also für dieses höhere Gebiet die Antwort auf diese Frage ganz ebenso einfach ausfällt, wie in den soeben erwähnten einfacheren Theorien.

Auch hier ist die sog. „Körperdiscriminante“

$$\triangle(xy) = \left| Z_i^{(k)} \right|^2 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

eine ganze rationale Function von x und y, deren Zusammensetzung aus dem folgenden Satze hervorgeht:

Es sei $P(xy) = 0$ eine beliebige Curve, p einer ihrer Primfactoren, dessen Verzweigungsordnung gleich b, und dessen Coefficientenordnung gleich λ ist. Sind dann etwa p, p', p'' alle zu P gehörigen Primdivisoren, b, b', b'' ihre Verzweigungs-, und $\lambda, \lambda', \lambda''$ ihre Coefficientenordnungen, so ist $\triangle(xy)$ genau durch P^ϱ teilbar, wo

$$\varrho = \lambda(b-1) + \lambda'(b'-1) + \lambda''(b''-1) = n - (\lambda + \lambda' + \lambda'') = n - l$$

ist. Hieraus ergiebt sich die folgende einfache Darstellung der Körperdiscriminante:

$$\triangle(xy) = \Pi P(xy)^{n-l},$$

wo $l = \lambda + \lambda' + \lambda''$ die Summe der Coefficientenordnungen aller zu P gehörigen Primfactoren ist, und wo das Product nach der am Ende des vorigen Abschnittes gemachten Bemerkung nur auf diejenigen Functionen P erstreckt zu werden braucht, denen Verzweigungsteiler entsprechen.

Es sei jetzt allgemeiner

$$\vartheta = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_k^{h_k}$$

ein beliebiger ganzer oder gebrochener, aber endlicher Divisor, welcher also die zu $x = \infty$, $y = \infty$ gehörigen Primteiler p_x nicht enthält. Eine algebraische Function U des Körpers $K(xyz)$ heifst dann ein Vielfaches oder ein Multiplum von ϑ, wenn allgemein U den Primteiler p_i von ϑ mindestens in der $h_i$ten Potenz enthält und sich für alle nicht in ϑ auftretenden endlichen Divisoren regulär verhält.

Man kann nun genau wie für die ganzen algebraischen Functionen ein Fundamentalsystem $U^{(1)}, U^{(2)}, \cdots U^{(n)}$ für den Divisor ϑ so bestimmen, dass alle und nur die Multipla von ϑ in der Form $u_1 U^{(1)} + u_2 U^{(2)} + \cdots + u_n U^{(n)}$ mit ganzen Functionen von x und y als Coefficienten darstellbar sind. Ist speciell $\vartheta \sim 1$, so geht das System $(U^{(1)} \cdots U^{(n)})$ offenbar in das vorher betrachtete Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Functionen über.

Bezeichnet man die Discriminante $\left| U_k^{(1)}, U_k^{(2)}, \cdots U_k^{(n)} \right|^2$ dieses Fundamentalsystems mit $D(\vartheta)$, und die Norm des Divisors ϑ mit $N(\vartheta)$, so besteht zwischen $D(\vartheta)$ und der Körperdiscriminante $\triangle(x, y)$, für welche nach der obigen Bemerkung auch $D(1)$ geschrieben werden kann, die wichtige Beziehung:

$$D(\vartheta) = N(\vartheta)\, D(1).$$

Bildet man endlich zu einem Fundamentalsystem $(U^{(1)}, U^{(2)}, \cdots U^{(n)})$ für einen beliebigen Divisor ϑ das reciproke System $(\overline{U}^{(1)}, \overline{U}^{(2)}, \cdots \overline{U}^{(n)})$, so gehört dieses ebenfalls zu einem ganz bestimmten Divisor $\overline{\vartheta}$, und zwar ist dieser mit ϑ stets durch die bemerkenswerte Relation

$$\vartheta \overline{\vartheta} \sim \frac{1}{\mathfrak{z}}$$

verbunden, wo

$$\mathfrak{z} \sim \Pi p^{b-1}$$

den ein für alle mal festen Verzweigungsteiler bedeutet, der jeden Primteiler so oft enthält, als seine Verzweigungsordnung angiebt.

Auf diesem wichtigen Satze beruht ein Verfahren, um ein vollständiges System von Integranden erster Gattung für diese Functionskörper zu gewinnen, und zwar für jede beliebige Form der zu

Grunde gelegten Gleichung $f(z, xy) = 0$; ferner führt er zu einer Verallgemeinerung des Riemann-Roch'schen Satzes für Functionen von zwei Variablen. Endlich bemerke ich noch, dafs mit Hülfe der hier gegebenen Darstellung der Functionen Z durch ihre Divisoren nunmehr auch ihre Differentialquotienten $\frac{dZ}{dZ'}$ in gleicher Weise dargestellt werden können; und von dieser Darstellung ausgehend, kann nun eine vollständige Theorie der mit dem Körper $K(x, y, z)$ zusammenhängenden Integrale gegeben werden, welche wohl den einfachsten Eingang in dieses schwierige und bisher noch wenig behandelte Gebiet gewährt.

Alle in diesem Vortrage angegebenen Resultate habe ich in zwei in den Jahren 1898 und 1899 an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungen vollständig hergeleitet. Die im ersten Teile kurz skizzirte Theorie ist in der jetzt erscheinenden Abhandlung „Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen" im 23. Bande der Acta mathematica ausführlich entwickelt. Die Begründung der im zweiten Teile angegebenen Sätze und die Theorie der mit den Körpern $K(x, y, z)$ zusammenhängenden Integralfunctionen soll in einer demnächst erscheinenden Abhandlung gegeben werden.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Mit Unterstützung der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je etwa 40 Druckbogen. Jährlich 1 Band in 4—5 Heften. gr. 8.

Band		
I:	**Arithmetik und Algebra**, redigiert von	**W. Fr. Meyer** in Königsberg.
— II:	**Analysis**	**H. Burkhardt** in Zürich.
— III:	**Geometrie**	**W. Fr. Meyer** in Königsberg.
— IV:	**Mechanik**	**F. Klein** in Göttingen.
— V:	**Physik**	**A. Sommerfeld** in Aachen.
— VI, 1:	**Geodäsie und Geophysik**	**E. Wiechert** in Göttingen.
— VI, 2:	**Astronomie**	(Redact. noch nicht bestimmt.)
— VII:	Schlussband, **historische, philosophische** und **didaktische Fragen** behandelnd, sowie **Generalregister** zu Band I—VI.	**W. Fr. Meyer** in Königsberg.

Bisher erschienen: I, 1. 1898. n. ℳ 3.40; I, 2. 1899. n. ℳ 3.40; I, 3. 1899. n. ℳ 3.80; I, 4. 1899. n. ℳ 4.80; I, 5. 1900. [Unter der Presse]; II, 1. 1899. n. ℳ 4.80; II, 2. 1900. [Unter der Presse.]

Bianchi, Luigi, Professor a. d. Universität Pisa, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. [XII u. 659 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 22.60.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Hrsg. von G. Eneström. III. Folge. I. Band. gr. 8. 1900. geh. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.— [Heft 1 erscheint im April 1900.]

von Braunmühl, Prof Dr. **A.,** München, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 Teile. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Mit 62 Figuren im Text. [VII u. 260 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 9.—

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Mit Unterstützung der Königl. ungar. Akademie d. Wissenschaften herausg. von F. Schmidt u. P. Stäckel. [XVI u. 208 S.] 4. 1899. Geschmackvoll geb. n. ℳ 16.—

Brückner, Dr. **Max,** Oberlehrer am Gymnasium zu Bautzen, Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Mit 7 lithographierten und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln, sowie vielen Figuren im Text. [VIII u. 227 S.] 1900. 4. geh. n. ℳ 16.—

Cantor, Hofrat Prof. Dr. **Moritz,** Heidelberg, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. II. Band. Von 1200—1668. 2. Aufl. Mit 190 in den Text gedruckten Figuren. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 26.—

Engel, Dr. **Friedrich,** Prof. a. d. Universität Leipzig, und Dr. **Paul Stäckel,** Prof. a. d. Universität Kiel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. geh.

I. Band. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Fr. Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und mit 194 Figuren im Text. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren im Text. [XVI, IV u. 476 S.] 1899. n. ℳ 14.—

II. Band. Wolfgang und Johann Bolyai, geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel. Mit einem Bildnisse Wolfgang Bolyais. [In Vorbereitung.]

Festschrift zu Moritz Cantors 70. Geburtstage. Zugleich 9. Heft d. Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. u. Supplement z. 44. Jahrg. d. Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. [VIII u. 657 S.] gr. 8 1899. geh. n. ℳ 20.—

——— zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Herausg. vom Fest-Comitee. Lex.-8. 1899. geh. n. ℳ 6.—. Enthaltend: **Hilbert, D.,** Grundlagen der Geometrie [92 S.]; **Wiechert, E.,** Grundlagen d. Elektrodynamik [112 S.].

Genocchi, Angelo, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Uebersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Mayer. [VIII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, siehe: Festschrift Gauss-Weber.

Hölder, Otto, o. Prof. d. Mathematik in Leipzig, Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung, gehalten am 22. Juli 1899. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. [75 S.] 1900. gr. 8. geh. n. ℳ 2.40

Kronecker's, Leopold, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. (In 4 Bänden.) Dritter Band. I. Halbband. [VIII u. 474 S.] gr. 4. 1899. geh. n. ℳ 36.— [Der zweite Halbband befindet sich u. d. Pr.]

Muth, Dr. P., Osthofen, Theorie und Anwendung der Elementarteiler. [XVI u. 236 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 8.—

Netto, Dr. Eugen, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giefsen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. II. Band. 2. (Schlufs-) Lieferung. [XI u. S. 193—327.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 10.—.

Pascal, Ernst, o. Prof. a. d. Univ. zu Pavia, die Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, Ingenieur und Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. [VI u. 146 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. ℳ 3.60.

Riemann, B., elliptische Funktionen. Vorlesungen herausg. von Prof. Dr. H. Stahl, Tübingen. Mit Figuren im Text. [VIII u. 144 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 5.60.

Serret, J.-A., † Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes à Paris, Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. 2., durchges. Auflage mit Unterstützung der Herren H. Liebmann u. E. Zermelo herausgegeben von G. Bohlmann, In 3 Bänden. gr. 8. geh.
I.: Differentialrechnung. Mit 85 Fig. [X u. 570 S.] 1897. n. ℳ 10.—
II.: Integralrechnung. Mit 55 Fig. [XII u. 428 S.] 1899. n. ℳ 8.—
III.: Differentialgleichungen u. Variationsrechnung. [In Vorbereitung.]

Stolz, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 3 Teilen. III. Teil: Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum I. Teile des Werkes. Mit 41 Figuren im Text. [VIII u. 296 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 8.—

Sturm, Dr. Rud., Prof. a. d. Universität zu Breslau, Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearb. u. erweit. Aufl. Mit 61 Fig. im Text u. 7 lith. Tafeln. gr. 8. [Erscheint im April 1900.]

Volkmann, Dr. P., o. ö. Professor der theoretischen Physik an der Universität Königsberg i. Pr., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 14.—

Wassiljef, A., u. **N. Delaunay,** P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen. — Die Tschebyschef'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Mit Porträt Tschebyschefs. [IV u. 70 S.] 1900. gr. 8. geh. n. ℳ 4.—

von Weber, Dr. E., Privatdocent an der Universität München, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Wiechert, E., Grundlagen der Elektrodynamik, siehe: Festschrift Gauss-Weber.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Achter Band. Zweites Heft.

Enthaltend:

Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

von

Arthur Schoenflies
in Königsberg i. Pr.

Mit 8 Figuren im Text.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Hauck in Berlin. und **A. Gutzmer** in Jena.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1900.

Ausgegeben am 13. September 1900.

Jeder Käufer verpflichtet sich zum Bezuge des ganzen, aus zwei Heften Bandes.

Des V. Bandes Schlufs-Lieferung, mit dem Referat von E. Kötter, erscheint

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

VIII. Band. 2 Hefte. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von G. Hauck in Berlin und A. Gutzmer in Jena. gr. 8. 1900. geh.

Inhalt des I. Heftes:

I. Die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899.

1. Bericht über die Jahresversammlung zu München am 17. bis 22. September 1899. — 2. Geschäftlicher Bericht. — 3. Kassenbericht.
4. Statuten u. Geschäftsordnung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
5. Mitglieder-Verzeichnis nach dem Stande vom 31. December 1899.
6. Zum Gedächtnis:
   Louis Gonzaga Gascó.
   C. J. Gerhardt. Von **M. Cantor.** Mit Porträt.
   Sophus Lie. Von **Friedrich Engel.** Mit Porträt.
   Eugen von Lommel. Von **Ludwig Boltzmann.** Mit Porträt.
   Friedrich Meyer. Von **G. Riehm.** Mit Porträt.
   Hermann Schapira. Von **C. Koehler.** Mit Porträt.
   Karl Schober. Von **W. Wirtinger.** Mit Porträt.

II. Die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge.

Boltzmann, L., über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit.
Weber, H., Wirkung der neuen preufsischen Prüfungsordnung für Lehramtscandidaten auf den Universitätsunterricht.
Hauck, G., Correferat.
Klein, F., Bemerkungen zu den vorstehenden Referaten.
Krazer, A., über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an der Universität Strafsburg.
Study, E., einige Bemerkungen zu der neuen preufs. Prüfungsordnung.
Berichte und Discussion über die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen. (Von Mehmke, Bauschinger, Schülke u. A.)
Noether, M., über Riemann's Vorlesungen von 1861—62 über Abel'sche Functionen.
Gordan, P., über die symmetrischen Functionen.
——, über homogene Functionen.
Hilbert, D., über den Zahlbegriff.
——, über das Dirichlet'sche Princip.
Sommerfeld, A., Bemerkungen zur Variationsrechnung.
Sommer, J., über Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen.
Engel, Fr., zwei merkwürdige Gruppen des Raumes von fünf Dimensionen.
Zindler, K., über Complexcurven und ein Theorem von Lie.
Doehlemann, K., über hyperboloidische Gerade.
Brill, A., über ein Beispiel des Herrn Boltzmann zu der Mechanik von Hertz.
Study, E., die Geometrie der Dynamen.
Schimpf, E., Einführung eines Mafses der Convergenz in die Lehre von der Convergenz der unendlichen Processe.
Lerch, M., Arithmetisches über unendliche Reihen.
Horn, J., divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen.
Weber, E. v., eine fundamentale Classification der Differentialprobleme.
Hensel, K., über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen.

Inhalt des II. Heftes:

III. Referat, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung:

Schoenflies, A., die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen.

„Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit."
Georg Cantor
(Math. Ann. Bd. 21, S. 564).

Die Entwickelung der Mengenlehre hat ihre Quelle in dem Bestreben, für zwei grundlegende mathematische Begriffe eine klärende Analyse zu schaffen, nämlich für die Begriffe des Arguments und der Function. Beide Begriffe haben im Lauf der Jahre sehr wesentliche Wandlungen durchgemacht. Der Begriff des Arguments resp. der unabhängigen Variablen deckte sich ursprünglich mit dem nicht weiter definirten, naiven Begriff des geometrischen Continuums; heute ist es durchaus geläufig, als Wertvorrat des Arguments jede beliebige Wertmenge oder Punktmenge zuzulassen, die man aus dem Continuum auf Grund einer irgendwie definirten Vorschrift herausheben mag. Noch einschneidender ist die Wandlung, die den Functionsbegriff betroffen hat. Sie dürfte innerlich an den von Fourier aufgestellten Satz anknüpfen, dafs eine sogenannte willkürliche Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist; äufserlich findet sie ihren Ausdruck in der auf Dirichlet zurückgehenden Definition, die den allgemeinen Functionsbegriff kurzgesprochen als Äquivalent einer willkürlichen Tabelle betrachtet. Als sodann Riemann ein erstes Beispiel einer analytisch darstellbaren Function aufstellte, die in jedem rationalen Punkt unstetig, in jedem irrationalen Punkt stetig ist, sah man sich plötzlich Möglichkeiten gegenüber, für deren Ergründung die bis dahin geläufigen Vorstellungen durchaus unzureichend waren. Es erstand die Notwendigkeit, gesetzmäfsig bestimmte Mengen unendlich vieler Punkte auf ihre innere Structur und ihre Eigenschaften zu untersuchen, und man sah, dafs zu ihrer Beherrschung durchaus neue Begriffe und Formulirungen nötig waren. Den ersten Versuch, diesen Dingen methodisch gerecht zu werden, unternahm H. Hankel in seinem bekannten Tübinger Programm. Neben ihm hat sich an der Bewältigung der bezüglichen Aufgaben als einer der eifrigsten P. du Bois-Reymond beteiligt; seine allgemeine Functionenlehre enthält geradezu eine mathematisch-philosophische Erörterung

der beiden obengenannten Begriffe. Allerdings entsprach der Erfolg nicht ganz der Energie der aufgewandten geistigen Arbeit; trotz mancher fruchtbaren Ideen und Anregungen ist du Bois vielfach nur dazu gelangt, die Probleme, die hier vorliegen, zu bezeichnen, ohne sie jedoch systematisch zu erledigen. Es blieb Georg Cantor vorbehalten, diejenigen Ideen zu erfinden, die sich für eine methodische Untersuchung als geeignet erwiesen und es ermöglichten, auch die unendlichen Mengen unter die Herrschaft der mathematischen Formeln und Gesetze zu zwingen. Sicher gehörte ebensoviel Kühnheit wie Überzeugungskraft dazu, um Dinge, die über das Endliche hinausgehen, zu einer mathematischen Disciplin zu erheben; nach Cantor's eigenem Zeugnis wissen wir[1]), dafs er zehn Jahre zögerte, ehe er sich entschlofs, seine Ideen vor das mathematische Publicum zu bringen. Er that es erst, als die Erkenntnis von ihrer Unumgänglichkeit in ihm erstand, und er sich die Überzeugung gebildet hatte, dafs seine Begriffe den allgemeinen Eigenschaften wohldefinirter mathematischer Objecte genügen[2]).

Mengen von unendlich vielen Elementen sind allerdings auch sonst schon Gegenstand mathematischer Operationen gewesen, insbesondere im Gebiet der Geometrie, wo man längst gewohnt war, Mengen rücksichtlich ihrer Mächtigkeit zu vergleichen. Aber doch wäre es verfehlt, hierin mehr als eine äufserliche Analogie zu sehen. Wenn auch Cantor, wie er gelegentlich angiebt[3]), die Bezeichnung resp. den Begriff der Mächtigkeit von Steiner entlehnt hat, so haben doch die bezüglichen geometrischen Formulirungen mit derjenigen Denkweise, die der Mengenlehre zu Grunde liegt, wenig zu schaffen. Die Mengenlehre als Wissenschaft erstand erst in dem Augenblick, als Cantor die Abzählbarkeit als einen wohldefinirten mathematischen Begriff in die Wissenschaft einführte, unendliche Mengen nach ihrer Mächtigkeit einzuteilen unternahm und insbesondere zeigte, dafs die algebraischen Zahlen eine abzählbare Menge bilden, dafs dagegen das Continuum nicht abzählbar ist. Der einzige Vorgänger, den Cantor auf diesem Gebiet besitzt, ist B. Bolzano. In den Paradoxieen des Unendlichen hat Bolzano nicht allein unendliche Mengen nach ihrer Mächtigkeit zu vergleichen unternommen; es findet sich darin sogar schon diejenige Vorstellung über die Gleichmächtigkeit zweier Mengen ausgesprochen[4]), die hernach Cantor seinen Begriffsbestimmungen zu Grunde gelegt hat.

---

1) Math. Ann. 17, S. 358 (1880).

2) Die Skepsis, mit der man den Cantor'schen Ideen bei ihrem Erscheinen vielfach begegnete, erhellt am besten aus einigen an Cantor gerichteten Briefen; vgl. Zeitschrift für Philosophie, Bd. 91 u. 92.

3) Math. Ann. 20, S. 116.

4) a. a. O. S. 28. Bei Bolzano erscheint diese Vorstellung allerdings nur als Beispiel einer dem Unendlichen anhaftenden Paradoxie.

Erstes Capitel.

Die Mächtigkeit oder Cardinalzahl.

1. Die Lehre von den unendlichen (überendlichen resp. transfiniten) Mengen ist in ihrem formalen Teil eine Verallgemeinerung der Lehre von den endlichen Zahlen; sie sucht die unendlichen Mengen nach den gleichen Methoden zu verknüpfen, die für endliche Zahlen gelten.

Auf denjenigen Begriff der allgemeinen Mengenlehre, der der endlichen Cardinalzahl entspricht, lassen sich die elementaren Definitionen und die auf ihnen ruhenden directen Rechnungsgesetze ausnahmslos übertragen; dies gilt sowohl von der Summe und dem Product, wie auch von dem Potenzbegriff. Doch liegt zwischen den Beziehungen, die die endlichen resp. die unendlichen Mengen untereinander verbinden, eine tiefe Kluft; sie stammt daher, dafs bei unendlichen Mengen der Teil gleich dem Ganzen sein kann[1]). Diese Thatsache giebt der Lehre von den unendlichen Mengen ihr eigentümliches Gepräge; gerade aus ihr fliefst ein grofser Teil der charakteristischen Sätze und Probleme, durch die sich die Mengenlehre ein immer steigendes Interesse erworben hat.

Bei jeder Verallgemeinerung eines Wissenszweiges ist es bekanntlich das Princip der Permanenz der formalen Gesetze[2]), das die Anhaltspunkte für die Formulirung der neuen Begriffe liefert. Es fragt sich daher zunächst, ob und wie es möglich ist, die grundlegenden Begriffe der Zahlenlehre so zu formen, dafs sie auf überendliche Mengen übertragbar werden, ohne doch ihre Giltigkeit für die endlichen Mengen zu verlieren. Die Analyse der arithmetischen Begriffe, an die man in dieser Hinsicht anzuknüpfen hat, ist im wesentlichen auf Dedekind[3]) zurückzuführen. Sie

1) Diese Möglichkeit spielt bekanntlich auch für die Theorie des Flächeninhalts eine wichtige Rolle. Sie ist es auch, die die ausnahmslose Übertragbarkeit der indirecten Operationen ausschliefst.

2) In dieser Form zuerst bei H. Hankel; vgl. Vorlesungen über die complexen Zahlen, S. 10 (1867).

3) Was sind etc. Man vgl. insbesondere S. 2, 6, 20.

läfst sich dahin charakterisiren, dafs die Lehre von den ganzen Zahlen auf drei Grundbegriffe zu gründen ist, auf die Begriffe der Menge, der Ordnung und der Abbildung oder eineindeutigen Beziehung. Der Mengenbegriff ist als der ursprünglich resp. objectiv gegebene aufzufassen; das Ordnen und das Abbilden sind die hinzutretenden subjectiven Elemente. Insbesondere führt das Ordnen zum Begriff der Anzahl, das Abbilden zum Gleichheitsbegriff und zu den Gröfsenbeziehungen[1]).

2. Die Vorstellungen Cantor's laufen denen von Dedekind im wesentlichen parallel. Ich lasse hier zunächst die Definitionen folgen, die Cantor an die Spitze der Mengenlehre gestellt hat[2]):

1) Menge ist jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m zu einem Ganzen; $M = \{m\}$.

2) Teil oder Teilmenge von M heifst jede andere Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind[3]); M_1 heifst in M enthalten.

Falls die Mengen M und N gemeinsame Elemente besitzen, so wird die Menge dieser gemeinsamen Elemente auch gemeinsamer Teiler von M und N genannt und durch $\mathfrak{D}(M, N)$ bezeichnet[4]).

3) Mächtigkeit von M heifst der Allgemeinbegriff, der aus M dadurch hervorgeht, dafs von der Beschaffenheit und Ordnung[5]) der Elemente abstrahirt wird; er wird durch $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$ bezeichnet.

Die Mächtigkeit einer Menge bildet das genaue Analogon des Anzahlbegriffes und wird daher von Cantor auch als Cardinalzahl bezeichnet.

Die einfachsten Beispiele unendlicher Mengen sind die Menge

---

1) Es ist hier nicht der Ort, näher in die Analyse des Zahlbegriffes einzugehen oder auf die umfangreiche darüber vorhandene Litteratur hinzuweisen. Ich habe nur dasjenige kurz anführen wollen, was für die Formulirung der Mengenlehre in Betracht kommt. Die Dedekind'schen Ideen haben übrigens besonders in Italien Aufnahme gefunden; zumal Peano und seine Schüler, so namentlich Bettazzi und Burali-Forti, haben sich im Anschlufs an Dedekind mit der Fortentwickelung der bezüglichen Fragen beschäftigt. Es handelt sich dabei natürlich um nichts anderes, als um die Axiome der Arithmetik.

2) Man vgl. für das folgende insbesondere Math. Ann. 46, S. 481 (1895). Die bezüglichen Definitionen sind teilweise schon vorher in der Zeitschr. f. Philos. 91, S. 95 u. 92, S. 240 (1887) eingeführt worden.

3) Dedekind bezeichnet solche Teilmenge als echten Teil von M, so dafs danach die Teilmenge auch mit M identisch sein kann, was für manche Zwecke nützlich ist (Was sind etc. S. 2 und 3).

4) Math. Ann. 17, S. 355.

5) Über den in diese Definition eingehenden Begriff der Ordnung findet sich näheres in Cap. 5, S. 28.

aller ganzen Zahlen, deren Mächtigkeit wir $\mathfrak{a}$ nennen, ferner die Menge der rationalen, resp. der irrationalen Zahlen, endlich die Menge aller reellen Zahlen, deren Mächtigkeit wir durch $\mathfrak{c}$ bezeichnen, u. s. w. Die Definitionen dieser Mengen bedürfen keiner weiteren Erörterung. Dagegen erheischt die Frage, wann allgemein eine Menge durch eine Definition als bestimmt anzusehen ist, sehr wohl eine Antwort. Cantor hat sich dahin ausgesprochen, dafs es möglich sein mufs, von jedem beliebigen Object anzugeben, ob es seiner Definition nach der Menge angehört oder nicht; jedoch braucht diese Frage nicht praktisch entschieden werden zu können, vielmehr wird nur ihre logische Bestimmtheit gefordert[1]). Auf den gleichen Standpunkt hat sich auch Dedekind[2]) gestellt.

3. Wir fragen zunächst, wann zwei Mengen M und N dieselbe Mächtigkeit besitzen, resp. ob und wie man zwei Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ als gleich definiren kann. Die Gleichheit endlicher Zahlen findet bei ein-eindeutigem Entsprechen ihrer Elemente statt; demgemäfs definirt Cantor[3]):

4) Die Mengen M und N heifsen äquivalent oder gleichmächtig ($M \sim N$), falls es möglich ist, sie gesetzmäfsig in eine eineindeutige Zuordnung zu setzen, und

5) Mächtigkeiten oder Cardinalzahlen sind gleich, ($\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$), falls die entsprechenden Mengen M und N äquivalent sind.

Die vorstehende Gleichheitsdefinition fliefst direct aus dem oben genannten Princip der Permanenz der formalen Gesetze. Dies hindert jedoch nicht, dafs die beiden Definitionen, die das endliche und das unendliche Gebiet betreffen, sich inhaltlich in einzelnen Punkten unterscheiden. Zunächst ist zu bemerken, dafs sich die Prüfung der Äquivalenz endlicher Mengen stets durch eine erschöpfende Anzahl von Schritten feststellen läfst; für unendliche Mengen dagegen kann die eineindeutige Beziehung nur durch ein Beziehungsgesetz gegeben werden, das jedem beliebigen Element der einen Menge ein entsprechendes der anderen Menge zuweist und umgekehrt. Die Äquivalenz oder Gleichmächtigkeit zweier Mengen bedeutet ja nichts anderes als die Existenz einer solchen eineindeutigen Beziehung[4]).

---

1) Math. Ann. 20, S. 114. So war die Menge aller algebraischen Zahlen eine wohldefinirte Menge, auch ehe man angeben konnte, ob π dieser Menge angehört oder nicht.

2) Was sind etc. S. 2, Anm.

3) Der Begriff der Äquivalenz findet sich schon in Cantor's erster mengentheoretischer Arbeit, Journ. f. Math. 77, S. 242; vgl. auch den oben S. 2 gegebenen Hinweis auf Bolzano's Paradoxieen, S. 28.

4) So sagt z. B. die durch die Gleichung $xy = 1$ vermittelte Beziehung aus, dafs alle positiven Zahlen zwischen 0 und 1 allen Zahlen gleichmächtig sind, die gröfser als 1 sind.

Aus dieser Thatsache fließt der zweite Differenzpunkt, der dem Gleichheitsbegriff für endliche und überendliche Cardinalzahlen anhaftet. Es ist der, daſs eine überendliche Menge einer ihrer Teilmengen äquivalent sein kann, was für endliche Mengen nicht zutrifft. So läſst sich z. B. die Menge aller ganzen positiven Zahlen 1, 2, 3, $\cdots \nu \cdots$ der Menge aller geraden positiven Zahlen 2, 4, 6, $\cdots 2\nu \cdots$ in der Weise eineindeutig zuordnen, daſs der Zahl ν die Zahl 2ν entspricht und umgekehrt.

Dieser Umstand ist für die Eigenart der Gesetze der überendlichen Mengen von einschneidender Wichtigkeit. Er war bereits Bolzano[1]) bekannt; Dedekind hat ihn benutzt, um daran die Definition der überendlichen Mengen anzuschlieſsen. Mit ihm definiren wir daher[2]):

6) Eine Menge M heiſst unendlich oder überendlich (transfinit), falls sie einer ihrer Teilmengen äquivalent ist.

4. Die Gesetze der Addition und Multiplication lassen sich ohne weiteres auf Mächtigkeiten übertragen. Sind $M = \{m\}$ und $N = \{n\}$ zwei Mengen ohne gemeinsames Element, so läſst sich aus ihnen eine Vereinigungsmenge P bilden, in die jedes Element von M sowie jedes Element von N eingeht, und die wir durch

$$P = (M, N) = (N, M)$$

bezeichnen dürfen. Definiren wir dann die Mächtigkeit $\mathfrak{p}$ von P gemäſs der Gleichung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$$

als Summe von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, so folgt diese Summe den sämtlichen Gesetzen der Addition, dem commutativen, wie dem associativen.

Es ist übrigens zweckmäſsig, auch für die Vereinigungsmenge von M und N die Schreibweise der Addition zu benutzen und

$$P = M + N = N + M$$

zu setzen; man bezeichnet daher auch P kurz als Summe von M und N. Eine Vereinigungsmenge läſst sich übrigens auch dann bilden, wenn M und N gemeinsame Elemente besitzen. Ist Q die Menge der Elemente, die M und N gemeinsam sind, so daſs

$$M = Q + M_1, \quad N = Q + N_1$$

zu setzen ist, so wird die Vereinigungsmenge durch

$$P = (M_1, N_1, Q) = M_1 + N_1 + Q = \mathfrak{M}(M, N)$$

1) Paradoxieen, S. 28. Bolzano erblickt in ihr eine der dem Unendlichkeitsbegriff anhaftenden Paradoxieen.

2) Was sind etc. S. 17. Für den historischen Sachverhalt kommt auch die Anmerkung in Betracht. Vgl. auch Cantor, Journ. f. Math. 84, S. 242, sowie Math. Ann. 46, S. 495, wo sich ein Beweis befindet, daſs die definirende Eigenschaft für jede unendliche Menge erfüllt ist.

dargestellt und heifst bei Cantor das kleinste gemeinsame Multiplum von M und N[1]).

Zur Multiplication gelangt man, indem man aus M und N die Verbindungsmenge bildet. Sie entsteht, indem man jedes Element m mit jedem Element n zu einer Gruppe (m, n) verbindet; die aus allen diesen Gruppen als neuen Elementen bestehende Menge $P = \{(m, n)\}$ ist die Verbindungsmenge von M und N. Sie läfst sich durch

$$P = (M \cdot N) = (N \cdot M)$$

bezeichnen. Die Mächtigkeit von P kann wieder mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$$

als Product von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ definirt werden. Dieses Product folgt allen Gesetzen der Multiplication, dem commutativen, dem associativen und dem distributiven, wie man leicht bestätigen kann. Die Mächtigkeiten lassen sich daher allen directen Rechnungsoperationen unterwerfen.

Ein Beispiel einer Verbindungsmenge bildet die Menge $Z = \{z\}$ aller Punkte einer Ebene im Sinn der analytischen Geometrie. Ist $X = \{x\}$ die Menge aller Punkte einer Geraden (eine lineare Menge), ebenso $Y = \{y\}$ die Menge aller Punkte einer zweiten Geraden, so wird jeder Punkt z durch ein Elementenpaar (x, y) dargestellt, und es ist daher Z die Verbindungsmenge von X und Y. Beachtet man noch, dafs gemäfs der obigen Festsetzung $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}$ ist, so folgt für die Mächtigkeit von Z die Gleichung

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{c}^2.$$

Die vorstehenden allgemeinen Definitionen von Summe und Product lassen sich, da sie associativer Natur sind, auf jede beliebige endliche Zahl von Mengen ausdehnen und gestatten demnach auch die Erweiterung der vorstehenden Gleichungen auf den ν-dimensionalen Raum C_ν. Bezeichnet also $X', X'', \cdots X^{(\nu)}$ je eine lineare Menge, und Z wieder die Menge aller Punkte des C_ν, so ist

$$Z = (X' \cdot X'' \cdots X^{(\nu)}), \quad \text{resp. } \mathfrak{z} = \mathfrak{c}^\nu.$$

Ebenso ist die Menge R_ν aller rationalen Punkte eines C_ν die Verbindungsmenge von ν Mengen $R', R'', \ldots R^{(\nu)}$, deren jede die Menge der rationalen Punkte auf einer Geraden bedeutet.

5. Auch den Potenzbegriff hat Cantor nebst allen seinen Rechnungsgesetzen auf überendliche Mengen zu übertragen vermocht. Um den Sinn dieses Begriffes verständlicher zu machen, knüpfen wir an ein Theorem der Combinationslehre an, in das die Potenz eingeht, nämlich an den Satz, dafs die Anzahl aller Variationen

1) Math. Ann. 17, S. 355.

von μ Elementen zur ν^{ten} Klasse gleich μ^ν ist, und versuchen, ihn für die Zwecke der Mengenlehre umzuformen. Wir fassen dazu die μ Elemente als eine Menge $M = \{m\}$ auf und fassen zugleich die Menge N der ν Ziffern $1, 2, 3, \cdots \nu$ ins Auge. Alsdann ist die einzelne Variation dadurch bestimmt, dass wir für jede Ziffer von N ein Element von M setzen, oder anders ausgedrückt, dafs wir jedem Element von N ein gewisses Element von M zuordnen. Die einzelne Variation stellt also eine Zuordnung von Elementen von M zu den Elementen von N dar; die Menge P aller μ^ν Variationen ist nichts anderes als die Gesamtheit aller Zuordnungen dieser Art, oder was dasselbe ist, die Gesamtheit aller möglichen Zuordnungsgesetze. Sind jetzt M und N beliebige Mengen, so wollen wir auch für sie die Menge aller möglichen Gesetze ins Auge fassen, die jedem Element von N irgend ein Element von M zuordnen, wir nennen sie Zuordnungsmenge oder mit Cantor Belegungsmenge von N mit M und bezeichnen sie durch

$$P = (N \mid M).$$

Wird jetzt die Potenz durch die Gleichung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$$

definirt, so bleiben für diesen Potenzbegriff alle Rechnungsgesetze in Kraft, wie ebenfalls von Cantor bewiesen ist[1]).

Das einfachste Beispiel einer Belegungsmenge ist die Menge F aller reellen Functionen einer reellen Variablen. Es stelle wieder $X = \{x\}$, ebenso $Y = \{y\}$ die Menge aller reellen Zahlen dar, so wird durch eine einzelne Function den sämtlichen Werten x der Menge X je ein Element der Menge Y zugeordnet; die Function stellt daher ein Zuordnungsgesetz von Y zu X dar. Die Gesamtheit F aller unserer Functionen ist daher wirklich die Belegungsmenge von X mit Y. Da nun $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}$ ist, so folgt weiter, dafs

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$$

ist.

Der Begriff der Belegungsmenge tritt auch bei dem Problem auf, eine Menge M in vorgeschriebener Weise in Teilmengen zu spalten und die verschiedenen Teilungsmöglichkeiten zu bestimmen. Sei $M = \{m\}$ die gegebene Menge, die in Teilmengen

$$M_1,\ M_2,\ \cdots\cdots M_\nu, \cdots\cdots$$

zu spalten ist, und es sei die Menge dieser Teilmengen von derselben Mächtigkeit, wie die Menge $N = \{n\}$. Es mufs dann jede bei einer

1) Math. Ann. 46, S. 487.

bestimmten Teilung auftretende Teilmenge M' einem Element n' entsprechen und umgekehrt, so dafs z. B. die oben angeführten Mengen den Elementen

$$n_1, n_2, \cdots\cdots n_\nu, \cdots\cdot$$

entsprechen. Die bezügliche Teilung ordnet daher allen Elementen von M_1 das Element n_1, allen Elementen von M_2 das Element n_2 zu u. s. w.; sie stellt also eine Belegung von M mit N dar. Rechnet man nun überdies die Teilungen als verschieden, wenn in sie zwar die nämlichen Teilungen M' eingehen, aber doch so, dafs sie verschiedenen Elementen von N entsprechen[1]), so folgt:

Wird eine Menge M auf alle möglichen Arten in Teilmengen geteilt, deren Menge dieselbe Mächtigkeit besitzt wie eine Menge N, so liefert die Menge aller dieser möglichen Teilungen die Belegungsmenge von M mit N.

Der vorstehende Satz liegt dem Verfahren zu Grunde, mittelst dessen E. Borel die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ der Menge F aller Functionen einer reellen Variablen bestimmt[2]). Er führt diese Aufgabe auf die Bestimmung der Menge F_1 derjenigen Functionen zurück, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen, deren jede also eine Teilung des Continuums in zwei Teilmengen liefert.

6. Wie bereits erwähnt, gestattet der associative Charakter der Definitionen, die für Summe und Product aufgestellt sind, sie auf jede beliebige endliche Zahl von Mengen auszudehnen. Wie steht es aber, falls diese Mengen selbst in überendlicher Menge vorhanden sind? Für die Vereinigungsmenge ist die Ausdehnbarkeit der Definition ohne weiteres klar, sie gilt aber auch für die Verbindungsmenge. Soll ein Product aus einer überendlichen Zahl von Mengen gebildet werden, und sind $M', M'', M''', \cdots$ einige dieser Mengen, so wird jedes Element p der Verbindungsmenge durch eine Elementengruppe $(m', m'', m''', \cdots)$ dargestellt, in die je ein beliebiges Element der Mengen $M', M'', M''', \cdots$ eingeht. Hieraus ziehen wir noch eine weitere Folgerung. Jede Elementengruppe p kann nämlich als ein gewisses Zuordnungsgesetz der Elemente von $M', M'', M''', \ldots$ zu einander angesehen werden. Man schliefst daraus weiter, dafs auch im Bereich der Mengenlehre die Summe von gleichen Summanden in den Productbegriff, und das Product von gleichen Factoren in den Potenzbegriff übergeht, und zwar auch in dem Fall, dafs die Menge aller Summanden oder Factoren selbst überendlich ist.

---

1) Ist insbesondere N eine endliche Menge, so läfst sich dies auch so aussprechen, dafs die Teilungen als verschieden zu betrachten sind, wenn sie die nämlichen Teilmengen in verschiedener Anordnung enthalten.

2) Leçons etc. S. 124 (1898).

Zweites Capitel.

Die abzählbaren Mengen.

Es ist bereits oben erwähnt worden, dafs die Mengenlehre mit der Einführung des Abzählbarkeitsbegriffes anhebt, insbesondere mit dem Satz, dafs die algebraischen und damit auch die rationalen Zahlen abzählbar sind. Die Frage, ob eine unendliche Menge abzählbar ist oder nicht, ist übrigens keineswegs nur von formaler Wichtigkeit; sowohl im Gebiet der Analysis wie in dem der Geometrie hängt die Eigenart der Probleme und Sätze, in denen unendliche Mengen auftreten, ganz wesentlich davon ab, ob die Mengen abzählbar sind oder nicht. Hier lasse ich nur die allgemeinen Definitionen und Sätze über abzählbare Mengen folgen (1). Es findet sich darunter besonders ein für die Theorie der Punktmengen wichtiger Satz, der die Abzählbarkeit gewisser geometrischer Gebiete nachweist (2), zweitens die Behandlung der Frage, wie oft man in allgemeinster Weise eine abzählbare Menge in abzählbare Teilmengen spalten kann (3).

1. Cantor bezeichnet[1]) eine unendliche Menge $M = \{m\}$ als abzählbar, wenn es möglich ist, ihre Elemente der Reihe der ganzen positiven Zahlen eineindeutig zuzuordnen, so dass sie sich in eine Reihe

$$\{m_\nu\} = m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots m_\nu, \cdots\cdots$$

bringen lassen[2]). Alle abzählbaren Mengen haben daher die gleiche Mächtigkeit, nämlich die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ der Menge der ganzen positiven Zahlen. Dafs sie die einfachsten unendlichen Mengen sind, folgt auch daraus, dass jede unendliche Menge Teilmengen besitzt, die abzählbar sind.

Es leuchtet ein, dass eine abzählbare Menge abzählbar bleibt, wenn man zu ihr eine endliche Menge E hinzufügt; ebenso ist die Vereinigungsmenge zweier abzählbaren Mengen abzählbar, und das gleiche gilt für jede endliche Anzahl abzählbarer Mengen. Diese Sätze finden ihren einfachsten Ausdruck in den entsprechenden Formeln für die bezüglichen Cardinalzahlen, nämlich in den Formeln[3])

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{e} = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \quad \nu\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Was an diesen Formeln zunächst in die Augen springt, ist, dafs sie mit allen für endliche Zahlen giltigen Gleichungen in

---

1) Journ. f. Math. 77, S. 258 (1873).

2) Das Symbol $\{m_\nu\}$ werden wir als Abkürzung für die abzählbare, nach den Indices geordnete Reihe vielfach benutzen.

3) $\mathfrak{e}$ bedeutet die Mächtigkeit der endlichen Menge E, also eine endliche Zahl.

Gegensatz stehen. Dieser Gegensatz ist eine Folge des oben erwähnten Umstandes, dafs bei unendlichen Mengen der Teil gleich dem Ganzen sein kann. Das nämliche wird sich bei den uns des weiteren beschäftigenden Sätzen und Formeln ergeben. Zunächst nenne ich die folgenden:

1) Eine abzählbare Menge von endlichen Mengen ist abzählbar;

2) Eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Der erste von beiden liegt den meisten Beweisen zu Grunde, die die Abzählbarkeit einer Menge zum Ziel haben. Er bedarf kaum der Erörterung; nur ist zu bemerken, dafs, falls $M_1, M_2, M_3, \cdots$ die bezüglichen endlichen Mengen sind, die Menge der in M_ν enthaltenen Elemente mit wachsendem ν über jede Grenze wachsen kann. Der zweite Satz deckt sich damit, dafs auch die Verbindungsmenge abzählbarer Mengen abzählbar ist. Beide Sätze sind bereits in Cantor's ersten Publicationen enthalten[1]).

Der Beweis des zweiten Satzes kann folgendermafsen geführt werden: Wir bezeichnen die einzelnen Mengen durch

$$\begin{aligned} M_1 &= (m_{11}, m_{12}, m_{13}, \cdots\cdot), \\ M_2 &= (m_{21}, m_{22}, m_{23}, \cdots\cdot), \\ M_3 &= (m_{31}, m_{32}, m_{33}, \cdots\cdot), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

und fassen die Glieder je einer Diagonalreihe, nämlich diejenigen Glieder m_{ik}, für die $i + k = \lambda$ ist, für jeden Wert λ zu einer Menge P_λ zusammen. Jedes so definirte P_λ ist eine endliche Menge, und da nun

$$(M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots) \sim (P_1, P_2, P_3, \cdots\cdot)$$

ist, so ist damit der Satz bewiesen.

Der Inhalt des Satzes deckt sich übrigens mit der einfachen und geläufigen Thatsache, dafs man eine Doppelreihe auch als einfache Reihe schreiben kann[2]). Die sich für die Cardinalzahlen ergebende Formel lautet

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \cdots\cdot = \mathfrak{a}$$

oder auch

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

---

1) Journ. f. Math. 84, S. 243 (1877).

2) Ebenso folgt die Abzählbarkeit aller Glieder $m_{ik\ldots p}$, resp. der Glieder einer vielfachen Reihe. Man bildet die P_λ aus allen Gliedern, in denen die Summe $i + k + \cdots + p$ einen festen Wert λ hat.

Aus dieser Formel folgt durch fortgesetzte Multiplication mit $\mathfrak{a}$, dafs für endliches ν ebenfalls

$$\mathfrak{a}^\nu = \mathfrak{a}$$

ist[1]).

2. Die vorstehenden Sätze gestatten bereits eine grofse Zahl von Folgerungen, von denen ich die wichtigeren hier anführe.

I. Alle rationalen Zahlen bilden eine abzählbare Menge[2]). Dies folgt unmittelbar aus dem letzten Satz, wenn wir die rationalen Zahlen durch das Schema

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{1}{\lambda}, \ldots\ldots \\ \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \ldots\ldots \frac{2}{\mu}, \ldots\ldots \\ \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots \frac{3}{\nu}, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

darstellen, wo in jedem Bruch Zähler und Nenner ohne gemeinsamen Teiler sind und daher jede rationale Zahl genau einmal vorkommt.

II. Die rationalen Zahlen eines C_ν bilden ebenfalls eine abzählbare Menge R_ν. Sind nämlich

$$R', R'', \ldots\ldots R^{(\nu)}$$

abzählbare Mengen, die je aus der Gesamtheit aller rationalen Zahlen bestehen; so ist R_ν gemäfs S. 7 die Verbindungsmenge von R', R'', $\cdots$ Es ist daher

$$\mathfrak{r}_\nu = \mathfrak{r}' \cdot \mathfrak{r}'' \cdots \mathfrak{r}^{(\nu)} = \mathfrak{a}^\nu = \mathfrak{a}.$$

III. Die Menge aller algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Diesen Satz, der eines der ersten und wichtigsten Ergebnisse der Mengenlehre darstellt, hat Cantor folgendermafsen bewiesen[3]).

Man betrachte jede algebraische Zahl als Wurzel einer irreduciblen ganzzahligen algebraischen Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0,$$

deren erster Coefficient positiv sein soll, so wird jede algebraische Zahl Wurzel nur einer solchen Gleichung sein. Setzt man nun[4])

$$a_0 + |a_1| + \cdots\cdots + |a_n| + n = \nu,$$

so gehört zu jedem ν eine endliche Anzahl von Wertcombinationen der $|a_i|$ und n, zu jeder Wertcombination eine endliche Zahl von

1) Wenn die Factorenzahl selbst unendlich wird, so gilt die Formel nicht mehr; vgl. S. 23 u. 26.

2) Vgl. den Cantor'schen Beweis im Journ. f. Math. 84, S. 250.

3) Vgl. die Anm. 1 auf S. 10.

4) $|a_i|$ bedeutet in bekannter Weise den absoluten Betrag von a_i.

Gleichungen, und zu jeder Gleichung eine endliche Zahl von algebraischen Zahlen. Die Menge aller auf diese Weise dem ν entsprechenden algebraischen Zahlen sei A_ν. Die Menge A aller algebraischen Zahlen wird daher durch

$$A = \{A_\nu\} = (A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots A_\nu, \cdots)$$

dargestellt und ist abzählbar. Insbesondere ist also auch die Menge aller reellen algebraischen Zahlen abzählbar, ebenso auch die Menge aller algebraischen Punkte des C_ν.

Ich beweise endlich einen Cantor'schen Satz, der uns in der Theorie der Punktmengen vielfach begegnen wird und als selbstverständliches Postulat vielen Beweisen früherer Zeit zu Grunde liegt. Er lautet:

IV. Jede unendliche Menge G von Gebieten eines stetigen Raumes C_ν, die ganz aufserhalb von einander liegen, oder höchstens an den Grenzen zusammenstofsen, ist abzählbar[1]).

Ist nämlich $a_1 > a_2 > a_3 \cdots$ eine Reihe positiver, unbegrenzt gegen Null abnehmender Zahlen, so sind die Gebietsteile, deren Inhalt zwischen a_ν und $a_{\nu+1}$ liegt, für jedes ν in endlicher Menge G_ν vorhanden. Es ist daher

$$G = (G_1,\ G_2, \cdots G_\nu, \cdots),$$

womit der Satz bewiesen ist[2]).

Die für den Beweis gemachte Annahme, dass alle Gebietsteile der Menge G endlich sind, ist keine Bedingung des Satzes. Falls sich nämlich gewisse dieser Gebiete ins Unendliche erstrecken, so betrachte man den ν-dimensionalen Raum C_ν als Teil eines $C_{\nu+1}$ und bilde ihn stereographisch auf eine Kugel H_ν des $C_{\nu+1}$ ab; dann geht jedes Gebiet der Menge G in ein endliches auf H_ν liegendes Gebiet über.

3. Da eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, so kann man umgekehrt fragen, wie oft man auf allgemeinste Weise eine abzählbare Menge M in abzählbare Teilmengen zerlegen kann. Diese Frage soll hier noch behandelt werden.

Die Menge M möge in die Mengen M' und M_1 zerfallen, die beide unendlich resp. abzählbar sind. Ebenso zerfalle M_1 in zwei unendliche Teilmengen M'' und M_2 u. s. w. Da jede unendliche Menge Teilmengen besitzt, die unendlich sind, so läfst sich dieser Process unendlich oft fortsetzen. Wir gelangen so zu einer Reihe unendlicher Mengen

$$M,\ M_1,\ M_2,\ M_3, \cdots M_\nu \cdots,$$

1) Math. Ann. 20, S. 117.

2) Über die dem Beweis zu Grunde liegenden Begriffe des Gebiets und des ihm zugehörigen Inhalts vgl. den vierten Abschnitt.

deren jede eine Teilmenge der vorhergehenden ist. Es entsteht sofort die Frage, ob die Menge M durch die unendlich oft wiederholte Abspaltung von Teilmengen schliefslich erschöpft wird, oder ob man Elemente definiren kann, die allen M_ν gemeinsam sind. Ein Beispiel zeigt, dafs die letzte Frage zu bejahen ist. Sei M die Menge aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1. Aus M entfernen wir die Menge M' aller Brüche, deren Nenner eine Potenz von 2 ist; alsdann werde aus der Restmenge M_1 die Menge M'' aller Brüche entfernt, deren Nenner eine Potenz von 3 ist; aus der Restmenge M_2 entsteht durch Entfernung der Brüche, deren Nenner eine Potenz von 5 ist, die Menge M_3 u. s. w.: so ist klar, dafs es eine wohl definirte Menge giebt, die allen M_ν gemeinsam ist, nämlich die Menge derjenigen Brüche, deren Nenner ein Product verschiedener Primzahlen ist. Wir bezeichnen diese Menge durch M_ω.

Die gleichen Betrachtungen lassen sich anstellen, falls $M = \{m\}$ eine beliebige unendliche Menge ist. Auch in diesem Fall lässt sich eine eventuelle Menge M_ω in aller Form definiren, und zwar gelangen wir dazu auf Grund folgender, in der gesamten Analysis geläufigen und grundlegenden logischen Antithese, dafs es für jedes einzelne Element m entweder eine letzte Menge M_ν giebt, in der es enthalten ist oder nicht, und dafs eine andere Möglichkeit ausgeschlossen ist[1]). Giebt es nun für ein Element m eine solche Menge M_ν nicht, so bildet die Gesamtheit aller dieser Elemente wiederum eine wohldefinirte Menge M_ω. Gemäfs den Festsetzungen auf S. 4 ist übrigens

$$M_\omega = \mathfrak{D}(M, M_1, M_2, \cdots\cdots),$$

worin zugleich die Definition von M_ω enthalten ist[2]).

Nachdem dies festgestellt ist, setze ich endlich noch folgenden, unmittelbar einleuchtenden Satz hierher. Sei $M_0 \sim N_0$, ferner seien

$$M_0, M_1, M_2, \cdots \text{ resp. } N_0, N_1, N_2, \cdots$$

zwei Reihen der oben betrachteten Art, und es soll immer M_i und N_i entsprechende Elemente enthalten. Giebt es dann Elemente, die allen M_i gemeinsam sind, so giebt es auch Elemente, die in allen N_i enthalten sind, und es ist $M_\omega \sim N_\omega$.

---

1) Der obige Satz dürfte dasjenige notwendige und ausreichende Schlufsverfahren enthalten, das allen Betrachtungen und Sätzen über den Grenzbegriff zu Grunde liegt. In der consequenten Ausdehnung seines Wirkungsbereichs liegt eines der Verdienste Cantor's. Vgl. auch Abschnitt II, Cap. 1, sowie Math. Ann. 23 S. 455.

2) Es ist leicht zu sehen, dafs es nicht immer Elemente zu geben braucht, die allen M_i angehören, selbst wenn die M_i in unendlicher Menge existiren. Sei z. B. $M = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots)$, jedoch mit Ausschlufs der Null, $M_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdot\cdot)$, $M_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdot\cdot)$, so existirt M_ν für jedes endliche ν, und es ist auch $M_{\nu+1}$ Teilmenge von M_ν, es giebt aber keinerlei allen gemeinsames Element.

Drittes Capitel.

Der Gröfsencharakter der Mächtigkeiten.

1. Für zwei endliche Zahlen μ und ν besteht stets eine und nur eine der drei Beziehungen

$$\mu = \nu, \quad \mu > \nu, \quad \mu < \nu;$$

für diese Beziehungen besteht überdies die grundlegende Eigenschaft, dafs, falls $\mu = \nu$ und $\nu = \varrho$ ist, daraus $\mu = \varrho$ folgt, ebenso folgt $\mu > \varrho$ aus $\mu > \nu$ und $\nu > \varrho$. Man sagt deshalb, dafs μ und ν in einer Gröfsenbeziehung stehen. In Verallgemeinerung hiervon soll von einem Gebiet von Dingen A, B, $C, \cdots$ gesagt werden, es besitze Gröfsencharakter, falls es folgende Bedingungen erfüllt. Erstens müssen sich für die A, B, $C, \cdots$ Definitionen des Gleich, Gröfser, Kleiner so aufstellen lassen, dafs das Bestehen der einen die beiden andern ausschliefst; zweitens mufs eine dieser drei Beziehungen für irgend zwei Dinge des Gebiets notwendig realisirt sein; drittens müssen die Definitionen der oben angegebenen grundlegenden Eigenschaft genügen.

Wir stellen nunmehr die Frage, ob die Mächtigkeiten Gröfsencharakter besitzen. Diese Frage zu behandeln ist keineswegs einfach; es stehen ihr Schwierigkeiten entgegen, die sich bisher nicht haben bewältigen lassen, so dafs eine definitive Antwort auf obige Frage im Augenblick noch unmöglich ist. Thatsächlich ist zu bemerken, dass von Cantor in dieser Hinsicht 1895 folgende Definition aufgestellt worden ist.

Stehen zwei Mengen M und N in der Beziehung zu einander, dafs kein Teil von M mit N äquivalent ist, während es einen Teil N_1 von N giebt, der mit M äquivalent ist, so gilt für die Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die Beziehung $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$.

2. Es fragt sich zunächst, inwiefern diese Definition der oben aufgestellten allgemeinen Forderung entspricht. Es seien M und N zwei beliebige Mengen, die auch endlich sein können, und es bezeichne M_1 eine Teilmenge von M, N_1 eine Teilmenge von N, so ist aus logischen Gründen für M und N notwendig eine und nur eine der vier folgenden Beziehungen erfüllt:

a) es giebt ein $M_1 \sim N$, und ein $N_1 \sim M$,
b) es giebt ein $M_1 \sim N$, aber kein $N_1 \sim M$,
c) es giebt kein $M_1 \sim N$, doch ein $N_1 \sim M$,
d) es giebt kein $M_1 \sim N$, und kein $N_1 \sim M$.

Das Bestehen eines dieser vier Fälle schliefst also die drei andern logisch aus. Von diesen Beziehungen deckt sich die durch c) dargestellte mit der obenstehenden Definition Cantor's.

Sind nun zunächst M und N endliche Mengen, so ist von den vier Möglichkeiten die erste niemals realisirt, doch stets eine der letzten drei; und zwar ist, falls die Beziehung b) vorliegt, $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, im Fall c) ist $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, und im Fall d), wie leicht zu sehen, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$[1]). Sind M und N überendliche Mengen, so liegen die Dinge wesentlich anders. Es giebt Mengen — und wir werden ihnen vielfach begegnen — deren Verhältnis einer der drei ersten Möglichkeiten entspricht; sollen also auch für überendliche Mengen nur drei einander ausschliessende Beziehungen möglich sein, so müfste man zeigen können, dafs für sie die Beziehung d) niemals realisirt ist. Dies ist nun freilich bisher nicht gelungen, und somit fehlt es an dieser Stelle der Theorie an dem nötigen Fundament. Nehmen wir aber einmal an, dafs es sich beweisen liefse, so würden die durch a), b), c) dargestellten Beziehungen vollständig der Eingangs aufgestellten Definition des Gröfsencharakters genügen; es schliefst jede von ihnen die beiden andern logisch aus, es ist (nach Annahme) eine von ihnen immer realisirt; und schliefslich sieht man auch leicht, dafs für sie die grundlegenden Eigenschaften in Geltung sind. Es würden also a), b), c) richtige Definitionen für Gleich, Gröfser, Kleiner abgeben.

Es ist nun sehr bemerkenswert, dafs die vorstehende Folgerung wenigstens in einem Punkt unbedingt zutrifft. Man kann beweisen, dafs zwei Mächtigkeiten gleich sind, wenn der Fall a) besteht. Dies ist praktisch von grofser Wichtigkeit. Für zwei Mengen, deren Äquivalenz in Frage steht, läfst sich nämlich nur selten die Eigenschaft der eineindeutigen Abbildung nachweisen, die in der Definition S. 5 auftritt; dagegen ist es vielfach möglich, den Beweis für die Existenz derjenigen Beziehung zu liefern, die dem Fall a) entspricht. Der bezügliche Satz ist von E. Schröder und F. Bernstein ziemlich gleichzeitig bewiesen worden[2]). Ich lasse eine ausführliche Darlegung hier folgen:

3. Der zu beweisende Satz lautet: Stehen die Mengen M und N in der Beziehung, dafs eine Teilmenge von M äquivalent zu N und eine Teilmenge von N äquivalent zu M ist, so ist auch $M \sim N$.

Sei P_1 die Teilmenge von M, die zu N äquivalent ist, und M_1 die Restmenge, so dafs also

$$M = (M_1, P_1) \tag{1}$$

1) Die in der Theorie der Irrationalzahl auftretende Gleichheitsdefinition, die verlangt, dafs jeder Teil von M in N und jeder Teil von N in M enthalten ist, realisirt ebenfalls die Beziehung d).

2) Der Schröder'sche Beweis ist zuerst erwähnt in den Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. Bd. V, S. 81 (1896). Er beruht auf Anwendung des Logikcalcüls. Vgl. auch Nova Acta Leop. Bd. 71, S. 303 (1898). Der von F. Bernstein herrührende Beweis, der mit dem obigen im wesentlichen identisch ist, wurde zuerst in Borel's Leçons sur la théorie des fonctions mitgeteilt, S. 103 ff.

zu setzen ist, und analog sei

$$N = (N_1, Q_1), \tag{2}$$

so daß also

$$P_1 \sim N \text{ und } Q_1 \sim M$$

ist. Wegen $P_1 \sim N$ giebt es eine eineindeutige Abbildung von N auf P_1; dabei mögen den Teilmengen N_1 und Q_1 von N die Teilmengen M_2 und P_2 von P_1 entsprechen, so daß

$$P_1 = (M_2, P_2), \quad M_2 \sim N_1, \quad P_2 \sim Q_1 \tag{3}$$

ist und überdies

$$M = (M_1, P_1) = (M_1, M_2, P_2) \tag{4}$$

wird. Aus $P_2 \sim Q_1$ und $Q_1 \sim M$ folgt weiter $P_2 \sim M$; wir dürfen also gemäß Gl. (1) setzen:

$$P_2 = (M_3, P_3) \text{ für } M_3 \sim M_1, \ P_3 \sim P_1.$$

Hieraus folgt nun weiter

$$M = (M_1, M_2, M_3, P_3).$$

So können wir fortfahren. Nun ist weiter zu beachten, daß P_2 Teilmenge von P_1, ebenso P_3 Teilmenge von P_2 ist u. s. w.; wir gelangen daher schließlich zu einer Darstellung

$$M = (M_1, M_2, M_3, \cdots, P_\omega), \tag{5}$$

wo die Menge P_ω, falls es überhaupt eine solche Menge giebt, diejenigen Elemente enthält, die allen Mengen $P_1, P_2, P_3, \cdots$ gemeinsam sind.

In gleicher Weise erhalten wir eine Zerlegung von N, indem wir von der Äquivalenz $Q_1 \sim M$ ausgehen. Bei der Abbildung von M auf Q_1 mögen den Teilmengen M_1 und P_1 von M die Teilmengen N_2 und Q_2 von Q_1 entsprechen, so daß

$$Q_1 = (N_2, Q_2), \quad N_2 \sim M_1, \quad Q_2 \sim P_1$$

ist. Alsdann folgt wieder

$$N = (N_1, Q_1) = (N_1, N_2, Q_2).$$

Analog erhalten wir aus $Q_2 \sim P_1 \sim N$, wie oben,

$$N = (N_1, N_2, N_3, Q_3) \tag{6}$$

und schließlich

$$N = (N_1, N_2, N_3, \cdots\cdots, Q_\omega), \tag{7}$$

wo wieder Q_ω, falls es existirt, die allen $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ gemeinsamen Elemente bedeutet. Nun folgt aber aus unseren Bezeichnungen unmittelbar, daß

$$M_1 \sim N_2 \sim M_3 \sim N_4 \cdots\cdots, \ N_1 \sim M_2 \sim N_3 \sim M_4 \cdots \text{ und}$$
$$Q_1 \sim P_2 \sim Q_3 \sim P_4 \cdots, \ P_1 \sim Q_2 \sim P_3 \sim Q_4 \cdots\cdots$$

ist; gemäfs dem Ende von Cap. 2 ist also auch die allen $P_1, P_2, P_3, \cdots$ gemeinsame Menge P_ω der in allen $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ enthaltenen Teilmenge Q_ω äquivalent, und daraus folgt schliefslich

$$M \sim N. \tag{8}$$

Der Beweis beruht erstens darauf, dafs, von welcher Mächtigkeit auch die Mengen M und N sein mögen, das Beweisverfahren doch nach einer abzählbaren Menge von Schritten zum Ziele führt; er beruht zweitens auf der Möglichkeit der S. 14 eingeführten Menge M_ω. Diese Menge bildet eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Mengenlehre.

4. Im vorigen Paragraphen hatte sich herausgestellt, dafs auf Gleichungen zwischen Mächtigkeiten die gewöhnlichen Rechnungsgesetze angewendet werden können. Für Ungleichungen ist dies, was hier ausdrücklich hervorgehoben werden mag, nicht mehr ohne weiteres der Fall. So kann aus den beiden Gleichungen[1])

$$\mathfrak{c} > \mathfrak{e} \text{ und } \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

nicht etwa durch Multiplication geschlossen werden, dafs $\mathfrak{c}\mathfrak{c}$ gröfser als $\mathfrak{e}\mathfrak{c}$ ist, vielmehr ist $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{e}\mathfrak{c}$. Die Anwendbarkeit der Rechnungsregeln versagt also hier. Dies ist jedoch keineswegs ein Widerspruch. Es beruht darauf, dafs das Verhältnis der Teilmengen zu einander, von dem die Gröfsenbeziehung abhängt, bei Combination von Ungleichungen einen Wechsel erleiden kann, bei Combination von Gleichungen dagegen nicht.

Viertes Capitel.

Die einfachsten nicht abzählbaren Mengen.

Bereits 1873 gelangte Cantor zu dem Resultat, dafs das Linearcontinuum, d. h. die Gesamtheit aller endlichen Zahlen, nicht abzählbar ist (1). Damit war zum ersten Mal die Erkenntnis begründet, dafs man im Gebiet der überendlichen Mengen mit verschiedenen Mächtigkeiten zu rechnen hat.

Cantor überzeugte sich alsbald, dafs auch das mehrdimensionale Continuum C_ν, sowie sogar das Continuum C_a von abzählbar unendlich vielen Dimensionen die gleiche Mächtigkeit besitzt, wie das lineare (2). Eine obere Grenze für die Mächtigkeit irgend einer in einem beliebigen Raum gelegenen Punktmenge war damit erkannt, denn sie konnte höchstens die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des linearen Continuums besitzen. Es blieb aber die Frage offen, ob es noch andere Punktmengen geben kann, als die abzählbaren und diejenigen der Mächtig-

1) $\mathfrak{e}$ bedeutet die Mächtigkeit einer endlichen Menge. Die Richtigkeit der obigen Behauptung erhellt aus S. 22.

keit $\mathfrak{c}$, d. h. also solche, deren Mächtigkeit zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ fällt. Cantor hat von vornherein der Überzeugung Ausdruck gegeben, dafs diese Frage zu verneinen sei. Bereits 1877 äufserte er[1]), durch ein Inductionsverfahren zu diesem Ergebnis gelangt zu sein; es gebe nur zwei Klassen von Punktmengen, von denen die eine die Form functio ipsius ν habe, wo ν alle ganzen Zahlen bedeute, die andere die Form functio ipsius x, wo x alle Punkte eines Intervalls darstelle. Er ist auf diese Frage immer wieder zurückgekommen, ohne dafs jedoch bisher ein Beweis seiner Behauptung gelungen wäre[2]).

Dagegen hat man inzwischen Mengen kennen gelernt, deren Mächtigkeit gröfser ist als $\mathfrak{c}$; die einfachste ist die Mächtigkeit aller Functionen einer oder mehrerer Variablen (4). Cantor hat sogar gezeigt, wie man Mengen von unbegrenzt zunehmender Mächtigkeit definiren kann, so dafs sich zu jeder Mächtigkeit Mengen noch höherer Mächtigkeit definiren lassen (5).

1. Um zu zeigen, dafs das Linearcontinuum nicht abzählbar ist, stelle ich zunächst folgende einfache Überlegung voran. Es werde angenommen, eine Zahlenmenge $M = \{m\}$ sei abzählbar, also darstellbar in der Form

$$\{m_\nu\} = m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots m_\nu \cdots;$$

ferner möge $m_\varkappa, m_\lambda, m_\mu, \cdots$ eine Fundamentalreihe sein, die ein Grenzelement m' bestimmt, das der Menge angehört. Wenn dann m' von jedem m_ϱ verschieden ist, so ist dies ein Widerspruch gegen die Annahme, die Menge sei abzählbar.

Auf Grund dieser evidenten Thatsache läfst sich das Cantor'sche Beweisverfahren folgendermafsen darstellen. Angenommen, das in einem Intervall δ gelegene Continuum $X = \{x\}$ sei abzählbar, also darstellbar in der Form

$$(1) \qquad \{x_\nu\} = x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_\nu, \cdots\cdots,$$

so zeigen wir, dafs in jedem Teilintervall $p \cdots q$ von δ Punkte existiren, die in der Reihe 1) nicht vorkommen. Dies geschieht, wie folgt.

Unter allen Punkten x_ν, die innerhalb $p \cdots q$ liegen, wählen wir die ersten beiden, d. h. diejenigen mit den kleinsten Indices aus; sie seien $x_\varkappa = p_1$ und $x_\varrho = q_1$, wo $p_1 < q_1$ sei, im übrigen aber $p \overline{\gtrless} p_1$ und $q \overline{\gtrless} q_1$ ist. Alle anderen in das Intervall $p \cdots q$ fallenden Punkte x_ν haben dann sicher Indices, die gröfser als $\varkappa$ und ϱ sind. Wir suchen unter ihnen wieder die ersten beiden Punkte, die in das Intervall $p_1 \cdots q_1$ fallen; sie seien $x_\lambda = q_2$ und $x_\sigma = p_2$,

1) Journ. f. Math. 84, S. 258.
2) Vgl. insbesondere Math. Ann. 21, S. 574 und 23, S. 488.

so dafs also $\lambda > \varkappa$ und $\sigma > \varrho$ ist, und es sei wieder $p_2 < q_2$. Dieses Verfahren läfst sich unbegrenzt fortsetzen. Da nämlich die Reihe $\{x_\nu\}$ alle Punkte von δ enthalten soll, so giebt es in ihr stets Punkte, die innerhalb eines jeden Intervalls $p_i \cdots q_i$ fallen. Wir erhalten so zwei Fundamentalreihen:

$$p < x_\varkappa < x_\lambda < \cdots \quad \text{resp.} \quad q > x_\varrho > x_\sigma > \cdots,$$

deren Indices dem Bildungsgesetz gemäfs unbegrenzt wachsen, so dafs zugleich $\varkappa < \lambda < \cdots$ und $\varrho < \sigma < \cdots$ ist.

Die durch die Fundamentalreihen dargestellten Zahlen[1]) p' und q' gehören nun einerseits dem Continuum der Punkte von δ an, andererseits können sie aber in der Menge $\{x_\nu\}$ nicht enthalten sein. Denn nimmt man an, dafs z. B. $p' = x_\nu$ wäre, so müfste x_ν innerhalb jedes Intervalls $p_i \cdots q_i$ fallen und daher ν gröfser sein als alle Indices $\varkappa, \lambda, \cdots$ resp. $\varrho, \sigma, \cdots$, was nicht möglich ist. Damit ist der Satz bewiesen; d. h.

I. Die Menge C aller Zahlen eines gegebenen Intervalls ist nicht abzählbar.

Der hier dargestellte Beweis ist im wesentlichen der nämliche, den Cantor bei der ersten Veröffentlichung seines Satzes gegeben hat[2]). Er ist überdies ein typischer Vertreter eines Beweisverfahrens, dem wir im Gebiet der Mengenlehre meistens begegnen werden, wenn es sich darum handelt zu zeigen, dafs gewisse Mengen nicht abzählbar sind.

Ein zweiter Beweis, der ebenfalls von Cantor stammt, ist der folgende[3]).

Wären die Zahlen des Intervalls $0 \cdots 1$ abzählbar, so sei

$$\{a_\nu\} = a_1,\ a_2,\ a_3 \cdots\cdot a_\nu \cdots\cdot$$

die bezügliche Anordnung. Ferner seien diese Zahlen in Decimalbruchdarstellung

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \cdots\cdot, \\ a_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \cdots\cdot, \\ a_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \cdots\cdot, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nun bilde man eine Zahl

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots\cdot,$$

so dafs $b_\nu \gtrless a_{\nu\nu}$ ist, so ist b von jedem a_i verschieden, da es in mindestens einer Ziffer von a_i abweicht, also kann b in der obigen Reihe nicht enthalten sein.

---

1) Es ist für den Beweis belanglos, ob $p' < q'$ oder $p' = q'$ ist.
2) Journ. f. Math. 77, S. 260. Vgl. auch Math. Ann. 15, S. 5.
3) Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. I, S. 77.

Die Mächtigkeit der Zahlen des Linearcontinuums ist augenscheinlich für alle Intervalle die gleiche, wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{c}$. Sie erfüllt die in Cap. 3 angegebenen Bedingungen, denen gemäfs $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ zu bezeichnen ist.

2. Es giebt eine grofse Reihe von Zahlmengen, die ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen. Hierüber lasse ich zunächst einige Sätze allgemeineren Inhaltes folgen.

II. Die Menge aller Irrationalzahlen, ebenso die Menge aller transcendenten Zahlen eines gegebenen Intervalls δ besitzt die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Ist zunächst J die Menge der irrationalen Zahlen, und $\mathfrak{i}$ ihre Mächtigkeit, so ist, da die Rationalzahlen des Intervalls die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ haben,

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \mathfrak{a}.$$

Man zerlege nun J durch Abspalten irgend einer abzählbaren Menge A_1 in die Mengen A_1 und J_1, so wird

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a},$$

und hieraus folgt durch beiderseitige Addition von $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{a} = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$$

oder aber, da $\mathfrak{i} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ist,

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a} = \mathfrak{i}.$$

In derselben Weise ergiebt sich der Satz für die transcendenten Zahlen; statt der Rationalzahlen mit der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ hat man die algebraischen Zahlen zu benutzen, die ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ besitzen[1]).

Der vorstehende rechnerische Beweis kann auch leicht in eine solche Form gesetzt werden, dafs man unmittelbar sieht, in welcher Weise die Mengen J und C zur Äquivalenz gebracht werden. Man zerlege wieder J in J_1 und A_1, so dafs sich

$$C = (J, R) = (J_1, A_1, R)$$

ergiebt. Da nun $A_1 = (A_2, A_3)$ gesetzt werden kann, wo A_2 und A_3 beides abzählbare Mengen sind, so ist

$$J = (J_1, A_1) = (J_1, A_2, A_3)$$

und daher

$$J \sim C.$$

Der vorstehende Beweis zeigt übrigens noch, dafs die Mächtigkeit von C sich nicht ändert, falls man eine abzählbare Menge tilgt

1) Dafs es überhaupt transcendente Zahlen giebt, wurde zuerst von Liouville bewiesen. Journ. de Math. 16, S. 133 (1851).

oder hinzufügt; d. h. es ist

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{c} - \mathfrak{a} = \mathfrak{c}\,^{1)}.$$

3. Da man auf der unendlichen Geraden eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Teilstrecken unterbringen kann, so folgt zunächst, dafs

$$\nu\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

ist. Damit sind aber die Mengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ noch keineswegs erschöpft. Es besteht der Satz:

III. Das Continuum C_ν des ν-dimensionalen Raumes hat ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Von diesem Satze sind viele Beweise gegeben worden. Ich teile hier zunächst den ersten Cantor'schen Beweis mit[2]), der an die Darstellung einer Irrationalzahl durch einen unendlichen Kettenbruch anknüpft und die eineindeutige Beziehung zwischen C_1 und C_ν wirklich herstellt. Ich erinnere zunächst daran, dafs gemäfs S. 7 für die Mächtigkeit $\mathfrak{c}_\nu$ des ν-dimensionalen Continuums die Gleichung besteht

$$\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{c}'' \cdots \cdot \mathfrak{c}^{(\nu)} = \mathfrak{c}^\nu,$$

wo $\mathfrak{c}', \mathfrak{c}'', \cdots \mathfrak{c}^{(\nu)}$ je eine lineare Mächtigkeit bedeuten. Nun sei x irgend ein irrationaler Wert im Intervall $0 \cdots 1$, so läfst er sich in einen unendlichen Kettenbruch

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 \cdots}}} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots]$$

entwickeln. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} x_1 &= [\alpha_1, \alpha_{\nu+1}, \alpha_{2\nu+1} \cdots], \\ x_2 &= [\alpha_2, \alpha_{\nu+2}, \alpha_{2\nu+2} \cdots], \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_\nu &= [\alpha_\nu, \alpha_{2\nu}, \alpha_{3\nu} \cdots\cdots], \end{aligned}$$

so entspricht jedem x eine Combination $(x_1, x_2, \cdots x_\nu)$, aber auch umgekehrt jeder solchen Combination ein Wert x. Die beiden Mengen

$$\{x\} \text{ und } \{(x_1, x_2, \cdots x_\nu)\}$$

sind also äquivalent. Setzen wir jetzt noch $X_\lambda = \{x_\lambda\}$, so folgt gemäfs S. 7, dafs

$$X \sim (X_1 \cdot X_2 \cdots X_\nu),$$

also

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_\nu$$

---

1) Der gleiche Satz gilt für jede Menge, deren Mächtigkeit gröfser als $\mathfrak{a}$ ist. Vgl. auch Cantor in Journ. f. Math. 84, S. 254.

2) Journ. f. Math. 84, S. 245.

ist. Da nun jedes x alle irrationalen Werte zwischen 0 und 1 annimmt, so sind alle $\mathfrak{x}_\lambda = \mathfrak{c}$, und es folgt

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^\nu = \mathfrak{c}_\nu.$$

Eine zweite Beweismethode des Satzes knüpft an die näherliegende Decimalbruchdarstellung an. Wird zunächst

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots; \quad \alpha_i < 10$$

gesetzt, so liegt es nahe, in der nämlichen Weise wie im vorstehenden Beweis die Gröfsen $x_1, x_2 \cdots x_\nu$, resp. die Mengen $X_1, X_2 \cdots X_\nu$ einzuführen; doch dies scheitert zunächst an dem Umstand, dafs unter den α_i Nullen in unbegrenzter Menge auftreten können, wodurch die x_λ rational ausfallen. Würde man aber nicht blofs die irrationalen, sondern auch rationale Zahlenwerte x resp. x_λ in Betracht ziehen, so würde damit die Eineindeutigkeit der Beziehung verloren gehen, weil ein rationales x eine doppelte Zifferndarstellung durch einen Decimalbruch zulassen kann. Man kann diesem Übelstand aber leicht begegnen. Erstens setze man fest, dafs man nur mit solchen Zifferndarstellungen von x resp. x_λ operirt, die unendlich viele von Null verschiedene Ziffern enthalten; und zweitens denke man sich die eventuellen Nullen mit der ersten auf sie folgenden Ziffer zu je einer Gruppe verbunden und dehne das Abbildungsgesetz auf diese Zahlengruppen aus[1]).

An die Decimalbruchdarstellung knüpft auch folgendes ebenfalls von Cantor herrührende Beweisverfahren an[2]). Der unendliche Decimalbruch x ist dadurch bestimmt, dafs jeder seiner unendlich vielen Stellen eine der Ziffern 0, 1, 2, $\cdots$ 9 zugewiesen wird; er stellt also eine Belegung der Menge aller ganzen Zahlen mit der Menge der vorstehenden Ziffern dar. Das gleiche gilt, falls die Basis des Zahlsystems nicht 10 sondern irgend eine andere endliche ganze Zahl ist. Die Menge C der Zahlen zwischen 0 und 1 kann daher als Belegungsmenge einer abzählbaren Menge mit einer endlichen Menge angesehen werden; d. h. es ist

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}.$$

Daraus folgt nun sofort

$$\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{c}^\nu = \mathfrak{e}^{\nu \mathfrak{a}} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c},$$

und man schliefst sogar weiter, falls man die Mächtigkeit des Continuums von abzählbar unendlich vielen Dimensionen mit $\mathfrak{c}_{\mathfrak{a}}$ bezeichnet,

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}; \quad \text{d. h.:}$$

---

1) Dieser Gedanke rührt von J. König her.

2) Math. Ann. 46, S. 488 (1895).

IV. Auch das Continuum von abzählbar unendlich vielen Dimensionen hat nur die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$[1]).

Um die Abbildung zwischen dem C_1 und dem $C_\mathfrak{a}$ wirklich herzustellen, kann man folgendermaſsen verfahren: Es sei — wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Werte zwischen 0 und 1 —

$$x' = 0, a_1'a_2'a_3' \cdot\cdot, \quad x'' = 0, a_1''a_2''a_3'' \cdot\cdot, \quad x''' = 0, a_1'''a_2'''a_3''' \cdot\cdot,$$

ein Punkt des $C_\mathfrak{a}$, so erhält man daraus den Punkt x von C, indem man die Gesamtheit aller $a_\varkappa^{(\iota)}$ in derselben Weise in eine Reihe bringt wie auf S. 11. Die wirkliche Zuordnung beruht also darauf, daſs eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, also ebenfalls auf der Formel $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

Auch die Menge aller rationalen Zahlen des $C_\mathfrak{a}$ hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, wie man auf analoge Weise zeigen kann.

Ausdrücklich bemerke ich noch, daſs alle die vorstehend erörterten eineindeutigen Beziehungen zwischen C und C_ν resp. $C_\mathfrak{a}$ ohne Ausnahme von der Stetigkeit abstrahiren. Für die Mächtigkeitsfragen kommt die Stetigkeit nicht in Betracht.

Ich füge endlich die Bemerkung an, daſs es vielfach nützlich ist, die Zahlen des Continuums in einem dyadischen Zahlsystem auszudrücken. Jede Zahl z zwischen 0 und 1 hat alsdann die Form

$$z = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots; \; a_i = 0 \text{ oder } 1$$

und man kann, um jede dieser Zahlen genau einmal zu erhalten, festsetzen, daſs in jedem der vorstehenden Dualbrüche die Ziffer 1 unendlich oft auftritt. Man kann aber auch die Menge $Z = \{z\}$ aller Folgen ins Auge fassen, die durch z dargestellt werden; es wird durch sie eine abzählbare Menge von Zahlen zwischen 0 und 1 doppelt dargestellt, und es ist gemäſs S. 22 $\mathfrak{z} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

4. Die einfachste uns bekannte Menge, deren Mächtigkeit gröſser als $\mathfrak{c}$ ist, ist die Menge F aller Functionen einer reellen Variablen.

Das für den Beweis anzuwendende Verfahren ist eine Verallgemeinerung des oben gegebenen zweiten Beweises, daſs $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ ist. Gemäſs S. 8 ist F die Belegungsmenge von C mit sich selbst, so daſs für ihre Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ die Gleichung

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^\mathfrak{c}$$

besteht. Um nun zu zeigen, daſs $\mathfrak{f} > \mathfrak{c}$ ist, ist nachzuweisen, daſs zwar eine Teilmenge F_1 von F existirt, so daſs $F_1 \sim C$ ist, daſs aber keine Teilmenge von C mit F äquivalent ist. Eine Teilmenge $F_1 \sim C$ läſst sich leicht angeben, sie wird von allen Functionen gebildet, deren Wert constant ist. Gäbe es dagegen eine Teilmenge

1) Auch diesen Satz gab Cantor bereits 1877 im Journ. f. Math. 84, 256.

C' von F, so dafs $C' \sim F$ ist, so müfste jedem Element von C' ein Element von F, d. h. eine bestimmte Function $f(x)$ entsprechen und umgekehrt. Es entspreche insbesondere das Element c_1 der Function $f_1(x)$. Diese Function ordnet jedem Zahlenwert x einen Wert von C zu, und zwar möge dies für $x = c_1$ der Wert c' sein. Wir bestimmen nun eine Function $f(x)$ dadurch, dafs in ihr diesem Wert $x = c_1$ nicht c', sondern ein anderer Wert von C zugeordnet werden solle, und dafs das analoge für jeden Wert von x der Fall sei, so ist diese Function notwendig von allen eben betrachteten verschieden und kann daher keinem Element c entsprechen. Es ist also

$$\mathfrak{f} > \mathfrak{c}; \text{ d. h.:}$$

V. Die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ aller Functionen einer reellen Variabeln ist gröfser als $\mathfrak{c}$.

Auch die Menge F_ν aller Functionen von ν reellen Variablen hat nur die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$; denn es ist F_ν die Belegungsmenge von C_ν mit C, und daher

$$\mathfrak{f}_\nu = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}_\nu} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}.$$

Dagegen giebt es Functionsklassen allgemeiner Art, die die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, insbesondere gilt der Satz[1]):

VI. Die Mächtigkeit aller stetigen, resp. aller analytischen Functionen einer Variablen ist gleich $\mathfrak{c}$.

Eine stetige Function ist nämlich bestimmt, falls ihre Werte an allen rationalen Stellen bekannt sind[2]), sie ist also eine Belegung der Menge R aller rationalen Zahlen mit C. Ist F_1 die bezügliche Belegungsmenge, so folgt

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Die Menge F_1 enthält nun noch andere Functionen, als nur die stetigen; bezeichnen wir die stetigen Functionen mit F_s, die übrigen mit F_u, so wird

$$\mathfrak{f}_s + \mathfrak{f}_u = \mathfrak{c}.$$

Andererseits giebt es in F_s eine Teilmenge F_2, die C äquivalent ist, nämlich diejenigen Functionen, die für alle Werte der Variablen constant sind; d. h. es ist auch

$$\mathfrak{f}_s = \mathfrak{c} + \mathfrak{f}_2,$$

und daher folgt aus beiden Gleichungen[3])

$$\mathfrak{f}_s = \mathfrak{c}.$$

1) Diesen Satz hat Cantor zuerst in Band 21 der Math. Ann. S. 590 ausgesprochen. Für die wirkliche Herstellung einer Abbildung aller stetigen Functionen auf das Continuum vgl. auch Abschnitt III, Cap. I, 4, Anm.

2) Vgl. hierzu Abschnitt III, Cap. I, 3.

3) Diese Art, zu folgern, entspricht dem Satz, dafs Mengen äquivalent sind, falls jede einer Teilmenge der andern äquivalent ist. Um ein typisches Beispiel zu geben, habe ich den Beweis ausführlich dargestellt.

Auf ganz ähnlichen Schlüssen beruht der Beweis für die analytischen Functionen, man kann jede von ihnen durch eine Potenzreihe resp. durch die Werte ihrer Coefficienten definiren. Diese Coefficientenwerte fassen wir am einfachsten als Darstellung eines Punktes des C_a auf. Die Gesamtheit aller so bestimmten Potenzreihen, die übrigens im allgemeinen nicht convergiren, bildet daher eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, in der die analytischen Functionen als Teilmenge enthalten sind; ebenso giebt es wieder eine Teilmenge der analytischen Functionen, die die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt[1]).

Endlich ist klar, dafs auch die stetigen resp. die analytischen Functionen beliebig vieler Variablen nur die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen; man findet bei Borel[2]) eine eineindeutige Beziehung zwischen den Potenzreihen einer und zweier Variablen wirklich hergestellt.

5. Der Satz, dafs die Menge F aller Functionen als Belegungsmenge von C mit C höhere Mächtigkeit hat als C selbst, läfst sich verallgemeinern[3]) und führt zu folgendem Theorem:

VII. Ist M eine überendliche Menge, so liefert die Belegung von M mit M selbst eine Menge, die höhere Mächtigkeit besitzt, als M.

Sei G die Belegungsmenge von $M = \{m\}$ mit M, oder wie wir im Interesse der Deutlichkeit lieber sagen, von M mit M'. Sie besteht aus allen Gesetzen g, die je einem Element m je ein Element m' zuordnen. Es giebt nun zunächst wieder eine Teilmenge G_1 von G, so dafs $G_1 \sim M$ ist, sie wird von denjenigen Gesetzen g gebildet, die allen m das nämliche m' zuordnen. Gäbe es nun wieder eine Teilmenge $M_1 \sim G$, so müfsten alle Zuordnungsgesetze g den Elementen m eineindeutig entsprechen. Bei der bezüglichen eineindeutigen Beziehung möge dem Element m_1 das Gesetz g_1 entsprechen, und es sei insbesondere m_1' das Element von M', das durch das Gesetz g_1 dem Element m_1 zugeordnet wird. Alsdann kann man wieder ein Zuordnungsgesetz g in der Weise definiren, dafs es dem Element m_1 ein von m_1' verschiedenes Element von M' zuordnet, und dafs das analoge für jedes Element m gilt. Dieses Gesetz ist von allen denen verschieden, die den Elementen m entsprechend gesetzt sind, es kann also auch G nicht mit M_1 äquivalent sein. Es folgt also

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}.$$

---

1) Der Beweis beruht auf der Gleichung, dafs $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ ist. Zugleich folgt hieraus, dafs jede Functionsklasse, die in ähnlicher Weise durch abzählbar unendlich viele Bedingungen definirbar ist, die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Borel, Leçons etc. S. 126. Vgl. auch Verhandl. d. math. Congr. Zürich, S. 201—205.

2) Leçons etc. S. 127.

3) Vgl. Cantor, Berichte d. Deutschen Math.-Ver., I, S. 77.

Zeigt so das vorstehende eine unbegrenzte Reihe stets wachsender transfiniter Mächtigkeiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, . . ., so entsteht von selbst die bereits oben gestreifte Frage, ob das zweite Glied dieser Reihe auch wirklich die zweitgröfste Mächtigkeit darstellt, oder ob es — was an sich möglich ist — Mächtigkeiten giebt, die der Gröfse nach zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ fallen. Wir sahen, dafs Cantor von vorn herein geneigt war, diese Frage zu verneinen, dafs jedoch die Wissenschaft eine Antwort auf sie bisher nicht erteilt hat. Wir können sogar kaum sagen, dafs wir ihr irgendwie erheblich näher gekommen seien. Der einzige Fortschritt, den die Frage gemacht hat, ist der, dafs man inzwischen wenigstens eine bestimmte Menge als zweite Mächtigkeit zu definiren gelernt hat. Dies wird in Cap. VII näher erörtert werden.

Fünftes Capitel.

Die geordneten Mengen und die Ordnungstypen.

Wir haben im 1. Capitel die Begriffe Menge, Ordnung, Abbildung als diejenigen genannt, die den arithmetischen Definitionen zu Grunde liegen. Die Begriffe Menge und Abbildung haben uns zur Cardinalzahl und zu den Gröfsenbeziehungen geführt, es bleibt noch übrig, den Ordnungsbegriff ebenfalls für die unendlichen Mengen zu benutzen.

Die auf der Anordnung beruhenden Fundamentalbegriffe finden sich teilweise schon in den „Grundlagen“, sowie in der Zeitschrift für Philosophie dargestellt; sie haben durch Cantor's spätere Arbeiten wesentlich nur eine präcisere Einführung erfahren. Der Fortschritt von den Grundlagen zu Cantor's späteren Veröffentlichungen liegt grofsenteils auf dem Gebiet systematischer Darstellung.

Im Gebiet der endlichen Mengen führt die geordnete Menge zum Anzahlbegriffe[1]); genauer ist es die Ordinalzahl, die auf diese Weise entsteht. In logischer Hinsicht sind Ordinalzahl und Cardinalzahl auch bei endlichen Mengen verschieden; doch fällt dort praktisch dieser Unterschied nicht ins Gewicht. Bei transfiniten Mengen dagegen liegen die Dinge durchaus anders.

Die Elemente einer unendlichen Menge $M = \{m\}$ lassen sich stets auf die mannigfachste Weise anordnen, selbst wenn man von der verschiedenen Beschaffenheit der Elemente absieht und sie alle als gleichartig betrachtet. Man kann z. B. die Menge R der rationalen Zahlen nach der Gröfse anordnen, oder auch so, dafs sie eine abzählbare Menge bilden, wie es oben S. 2 angedeutet ist. Das Gesetz dieser Anordnung ist in beiden Fällen wesentlich verschieden. Im ersten Fall steht zwischen irgend zwei rationalen Zahlen noch

1) Vgl. z. B. Dedekind, Was sind u. s. w., S. 20 u. 54.

eine unendliche Menge anderer Zahlen, im zweiten jedoch immer nur eine endliche Anzahl, und man kann noch beliebig viele andere Ordnungsgesetze für die Menge R aufstellen[1]. Bei endlichen Mengen dagegen giebt es nur ein derartiges Ordnungsgesetz, es mufs ein Element notwendig das erste, eines das zweite sein u. s. w. und schliefslich eines das letzte.

Die Ordnungsgesetze unendlicher Mengen sind es, die Cantor als weitestgehende Verallgemeinerung des Ordinalzahlbegriffes erkannt und unter dem Namen Ordnungstypen in den Calcul eingeführt hat. Die Zweckmäfsigkeit dieser Einführung beruht darauf, dafs auch auf die Ordnungstypen die Rechnungsoperationen und die associativen Rechnungsgesetze ausgedehnt werden können; die commutativen werden naturgemäfs illusorisch, da ja der Begriff des Ordnungstypus auf der Anordnung beruht!

Wichtiger noch ist es, und hierin besteht das Hauptergebnis dieses Teils der Mengenlehre, dafs in den Eigenschaften der Ordnungstypen auch solche Begriffe ihren allgemeinsten arithmetischen Ausdruck finden, die wir gewöhnlich als eine besondere Eigenschaft der stetigen Zahlenmenge zu betrachten gewohnt sind. Es ist dies in erster Linie derjenige Begriff, auf dem die Theorie der Irrationalzahl beruht, nämlich der Begriff des Grenzelements, ferner aber auch alle diejenigen, die bei den Punktmengen auftreten und ihre Verteilung im Raum betreffen; alles Begriffe, von denen man leicht annehmen mag, dafs nicht allein der stetige Raum ihre Quelle ist, sondern dafs auch ihre Geltung nicht über ihn hinausreicht.

1. Eine Menge soll geordnet, oder genauer einfach geordnet heifsen, falls ein Gesetz besteht, das für irgend zwei Elemente m und m' angiebt, welches dem andern vorangeht; wir schreiben

$$m \prec m' \text{ resp. } m \succ m',$$

je nachdem m dem m' vorangeht oder umgekehrt. Enthält die Menge ein Element, das jedem andern vorangeht, so heifst es das erste Element, ebenso heifst ein Element, das jedem andern folgt, das letzte. Ein erstes oder letztes Element braucht jedoch nicht vorhanden zu sein, wie z. B. bei der Menge aller positiven und negativen der Gröfse nach geordneten ganzen Zahlen.

Sind M und N äquivalente Mengen, und ist M geordnet, so läfst sich N dementsprechend ordnen, nämlich so, dafs, falls $m \prec m'$ ist, für die entsprechenden Elemente n und n' auch $n \prec n'$ ist. M und N heifsen in diesem Fall ähnlich geordnete oder kurz

1) Ich setze noch einige Ordnungsgesetze der Menge der ganzen positiven Zahlen hierher

a) 1 2 3 4 . . . .; b) . . . . 4 3 2 1; c) 1 3 5 . . . . 2 4 6 . . . .;
d) 1 3 5 . . . . 6 4 2; u. s. w. u. s. w.

ähnliche Mengen. Ähnliche Mengen weisen also das nämliche Ordnungsgesetz auf. Diese Ordnungsgesetze sind, wie bereits erwähnt, die Cantor'schen Ordnungstypen; ein Ordnungstypus stellt also das gemeinsame Ordnungsgesetz äquivalenter ähnlicher Mengen dar; oder nach Cantor:

Der Ordnungstypus oder Typus von M ist der Allgemeinbegriff, der sich ergiebt, wenn man von der Beschaffenheit der Elemente abstrahirt, die Rangordnung unter ihnen aber beibehält. Wir bezeichnen ihn durch $\overline{M}$, resp. durch μ, und bezeichnen die zugehörige Mächtigkeit auch durch $\bar{\mu}$, so daſs $\mathfrak{m} = \bar{\mu} = \overline{\overline{M}}$ ist.

Den einfachsten Ordnungstypus einer unendlichen Menge liefert dasjenige Ordnungsgesetz, das den der Gröſse nach geordneten ganzen positiven Zahlen zukommt resp. jeder Menge

$$\{m_\nu\} = m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots m_\nu \cdots\cdots,$$

in der die m_ν beliebige Elemente sind. Diesen Ordnungstypus bezeichnet Cantor durch ω; den zu ihm inversen durch $^*\omega$[1]). Der Ordnungstypus ω kommt auch jeder unendlichen Teilmenge von $\{m_\nu\}$ zu, in der die Rangbeziehungen erhalten bleiben, wie z. B. den Mengen

$$(m_1, m_3, m_5 \cdots\cdots) \quad \text{resp.} \quad (m_\nu, m_{\nu+1}, m_{\nu+2} \cdots\cdots);$$

eine Menge kann also auch einer ihrer Teilmengen ähnlich sein.

Eine endliche Menge hat, wie bereits oben erwähnt, nur einen Ordnungstypus; jede einfach geordnete Menge von ν Elementen stellt sich in der Form

$$(e_1, e_2, e_3 \cdots\cdots e_\nu)$$

dar. Wir bezeichnen ihn durch ν, wo unter ν, wie das folgende ergeben wird, die bezügliche endliche Zahl zu verstehen ist[2]).

2. Aus zwei geordneten Mengen M und N bilden wir zunächst eine geordnete Vereinigungsmenge Q, deren Ordnungsgesetz so lautet, daſs jedes m jedem n vorangeht, während für die Elemente von M resp. N die bezüglichen Ordnungsgesetze in Kraft bleiben. Alsdann definiren wir den Ordnungstypus $\varkappa$ von Q durch die Gleichung

$$\varkappa = \mu + \nu$$

als Summe von μ und ν. Ist z. B. M eine Menge vom Typus ω,

1) Es ist also

$$\omega = \overline{(m_1, m_2 \cdots m_\nu \cdots)}, \; ^*\omega = \overline{(\cdots m_\nu \cdots m_2, m_1)}$$

zu setzen; die Bezeichnung entspricht dem, daſs allgemein $\mu = \overline{M}$ ist. Den Ordnungstypus $^*\omega$ besitzt z. B. die Menge b) in Anm. 1 von S. 28.

2) Vgl. die Anmerkung 1 auf S. 30.

also $M = \{m_\nu\}$, $N = (e_1, e_2, \cdots e_\lambda)$ eine endliche Menge, und bilden wir aus ihnen die geordneten Mengen

$$Q_1 = (M, N) = (m_1, m_2, m_3, \cdots m_\nu, \cdots, e_1, e_2, \cdots e_\lambda),$$
$$Q_2 = (N, M) = (e_1, e_2, \cdots e_\lambda, m_1, m_2, \cdots m_\nu, \cdots),$$

so dafs in Q_1 alle Elemente von M allen Elementen von N vorangehen, in Q_2 die Elemente von N denen von M, so sind die bezüglichen Ordnungstypen[1])

$$\varkappa_1 = \lambda + \omega, \; \varkappa_2 = \omega + \lambda.$$

Der Ordnungstypus der Menge Q_1 ist augenscheinlich gleich ω, es ist also $\lambda + \omega = \omega$, während hingegen $\omega + \lambda$ einen von ω verschiedenen Typus darstellt[2]). Das Beispiel zeigt auch, dafs die Summe von Ordnungstypen dem commutativen Gesetz nicht genügt, während sie das associative Gesetz befriedigt.

3. Um zur Multiplication der Ordnungstypen zu gelangen, bilden wir aus den geordneten Mengen M und N eine Verbindungsmenge S in der Weise, dafs wir jedes Element n durch eine geordnete Menge M_n ersetzen, die mit M ähnlich ist, und zwar so, dafs $M_n \prec M_{n'}$, falls $n \prec n'$ ist. Der Ordnungstypus σ von S kann daher auch dahin bestimmt werden, dafs er durch Einsetzen von μ in ν entsteht, wir bezeichnen ihn als Product von μ in ν gemäfs der Gleichung

$$\sigma = \mu . \nu.$$

Für diesen Productbegriff besteht ebenfalls das associative, jedoch nicht das commutative Gesetz, ferner das distributive, falls der Multiplicandus ν eine Summe ist.

Beispielsweise ergiebt sich $2 . \omega$, indem für jedes Element von ω zwei Elemente gesetzt werden; es ist also

$$2 \cdot \omega = (\overline{m_1, n_1}, \overline{m_2, n_2}, \overline{m_3, n_3}, \cdots\cdots),$$

während dagegen

$$\omega \cdot 2 = (\overline{m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots}; \overline{n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots})$$

ist. Man sieht leicht, dafs

$$2 \cdot \omega = \omega, \text{ aber } \omega \cdot 2 = \omega + \omega$$

ist. Analog erhält man $\omega . \omega$, indem für jedes Element m_i von

1) Wird also der Ordnungstypus von $(e_1, e_2 \cdots e_\nu)$ durch ν, der von (e) durch 1 bezeichnet, so ist der Ordnungstypus von $(e_1, e_2 \cdots e_\nu, e)$ durch $\nu + 1$ dargestellt. Hierin findet das Wesen der Ordinalzahlen ν resp. $\nu + 1$ seinen eigentlichen Ausdruck.

2) Den in Anm. 1 S. 28 stehenden Mengen *c*) und *d*) entsprechen die Ordnungstypen $\omega + \omega$, resp. $\omega + {}^*\omega$.

$\omega = \overline{(m_1, m_2, m_3, \cdots)}$ selbst eine Menge vom Typus ω gesetzt wird; d. h.

$$\omega \cdot \omega = \overline{(m_{11}, m_{12}, m_{13}, \cdots; m_{21}, m_{22}, m_{23}, \cdots; m_{31}, m_{32}, m_{33}, \cdots\cdots)}$$

und es ist also

$$\omega \cdot \omega = \omega + \omega + \omega + \cdots;$$

setzt man endlich für jedes m_{ik} wieder eine Menge vom Typus ω, so erhält man den Typus $\omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot$ u. s. w. u. s. w.[1])

4. Um für die geordneten Mengen diejenigen Begriffe abzuleiten, die, wie bereits oben erwähnt, für die Theorie der Irrationalzahl und der Punktmengen grundlegend sind, verfährt Cantor folgendermafsen:

Ist M eine geordnete Menge, so soll jede in ihr enthaltene Teilmenge vom Typus ω eine steigende Fundamentalreihe heifsen; sie hat die Form $\{a_\nu\}$, wo $a_\nu \prec a_{\nu+1}$ ist. Ebenso heifst eine in M etwa enthaltene Teilmenge vom Typus $^*\omega$ eine fallende Fundamentalreihe; sie soll durch $\{b_\nu\}$ dargestellt werden, wo $b_\nu \succ b_{\nu+1}$ ist. Existirt ferner in M ein Element a_ω, das zu einer Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ die Beziehung hat, dafs $a_\nu \prec a_\omega$ für jedes ν, und dafs für jedes $m \prec a_\omega$ stets ein Index ν_0 existirt, so dafs, wenn $\nu > \nu_0$ ist, auch $a_\nu \succ m$ ist, so soll a_ω Grenzelement von $\{a_\nu\}$ und zugleich Hauptelement von M heifsen. Analog heifst b_ω Hauptelement von M resp. Grenzelement von $\{b_\nu\}$, falls $b_\nu \succ b_\omega$ für jedes ν, und für jedes $m \succ b_\omega$ stets ν_0 so existirt, dafs $b_\nu \prec m$, falls $\nu > \nu_0$ ist[2]). Diese Definitionen sind in der That das genaue Analogon derer, auf denen die Theorie der Irrationalzahl ruht. Man kann dann noch Kriterien aufstellen, wann zwei Fundamentalreihen das nämliche Hauptelement bestimmen, u. s. w.; alles Dinge, die in den Sätzen über die Irrationalzahl ihr Äquivalent besitzen.

Sind jetzt M und M' ähnliche Mengen, so entspricht einer Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ der einen Menge eine Fundamentalreihe $\{a_\nu'\}$ der andern und umgekehrt, ebenso einem Grenzelement oder Hauptelement der einen ein solches der andern. Die vorstehende Definition der Fundamentalreihe, resp. des Grenzelements gilt daher auch für die durch die Mengen bestimmten Ordnungstypen. Diese Begriffe sind also in der That kein ausschliefsliches Attribut der stetig ausgedehnten Gebilde. Der innere Grund ist der, dafs sie, wenn sie

1) Für $\omega . \omega$ kann man auch ω^2 schreiben, ebenso ω^3 für $\omega . \omega . \omega$; vgl. S. 48.

2) Ein Element kann sowohl linksseitiges, wie rechtsseitiges Grenzelement sein, oder aber nur einseitiges. Hierauf beruhende speciellere Begriffsbestimmungen sind besonders von Peano und seinen Schülern durchgeführt worden.

auch für das Gebiet der stetigen Gröfsen erdacht sind, doch ihrer formalen Beschaffenheit nach durchaus am discreten hängen[1]).

Mit dem Begriff der Fundamentalreihe lassen sich aber auch die weiteren, auf ihr beruhenden formalen Begriffe, die man gewöhnlich als Eigenschaften des stetigen Zahlencontinuums zu betrachten pflegt, auf die Ordnungstypen übertragen. Dies gilt namentlich von denen, die Cantor für die Charakterisirung der Punktmengen eingeführt hat. So soll eine geordnete Menge, resp. ein Ordnungstypus abgeschlossen heifsen, falls jede seiner Fundamentalreihen ein Grenzelement besitzt; er heifst in sich dicht, falls jedes Element ein Hauptelement ist; er heifst endlich perfect, falls er sowohl in sich dicht, als auch abgeschlossen ist. Von einer Menge, deren Ordnungstypus perfect ist, gilt der Satz, dafs sie nicht abzählbar ist. Er ist eine Verallgemeinerung des bezüglichen Satzes über das Zahlencontinuum, das der Gröfse nach geordnet, eine perfecte Menge darstellt, und wird ebenso bewiesen, wie dieser.

Wir können auf die Ordnungstypen sogar den Begriff des Intervalls ausdehnen, indem wir irgend zwei Elementen m' und m'' nebst allen Elementen, die zwischen ihnen enthalten sind, als Elemente eines Intervalls auffassen; m' und m'' sind die Endelemente dieses Intervalls, während jedes zwischen ihnen gelegene Element ein inneres Element ist. Es lassen sich deshalb auch die Begriffe überall dicht und nirgends dicht auf die Ordnungstypen übertragen. Von einem Ordnungstypus, der überall dicht ist, gilt, wie leicht ersichtlich ist, der Satz, dafs er auch in sich dicht ist, während das umgekehrte nicht immer der Fall zu sein braucht.

Näher auf diese abstracten Beziehungen einzugehen, scheint nicht erforderlich; es sollte hauptsächlich gezeigt werden, dafs alle die obigen Begriffe nicht von dem Vorhandensein eines stetigen Raumes abhängen, sondern auf formal arithmetischem Boden erwachsen. Sie legen zugleich Zeugnis dafür ab, dafs in dem Ordnungstypus derjenige Fundamentalbegriff zu erblicken ist, an dem die formalen Gesetze von Arithmetik und Geometrie ihren gemeinsamen Ausdruck finden.

5. Die wichtigsten Ordnungstypen unendlicher Mengen sind diejenigen der Menge R aller rationalen, resp. der Menge C aller reellen Zahlen, falls sie der Gröfse nach geordnet werden. Den Ordnungstypus der Menge R aller rationalen Zahlen hat Cantor so definirt, dafs er die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ besitzt, weder ein erstes noch ein letztes Element besitzt und überall dicht ist. Er hat überdies die Eigenschaft, dafs er in sich dicht ist. Der Ordnungstypus λ des der Gröfse nach geordneten Linearcontinuums L ist perfect, und

1) Vgl. hierzu auch Cap. I des dritten Abschnitts.

enthält eine Menge R der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ so, dafs zwischen je zweien seiner Elemente Elemente von R dem Range nach liegen. Dafs dies die richtigen Definitionen sind, folgt daraus, dafs man jede Menge der vorstehend genannten Typen auf R resp. L abbilden kann; ebenso haben natürlich alle Mengen, die aus dem Linearcontinuum durch solche ein-eindeutige Abbildung entstehen, die die Gröfsenverhältnisse bestehen läfst, den Typus λ, mag diese Abbildung stetig sein oder nicht[1]).

6. Im Interesse der Vollständigkeit erwähne ich, dafs Cantor auch für mehrfach geordnete Mengen Ordnungsgesetze resp. Ordnungstypen mathematisch definirt und in Untersuchung gezogen hat. Eine Menge heifst mehrfach geordnet, wenn für jedes Element mehrere Merkmale vorhanden sind, die sein Rangverhältnis bestimmen; wie z. B. die Coordinaten für die Punkte eines C_ν[2]); ihr Ordnungsgesetz ist wieder ihr Ordnungstypus. Derartige Ordnungstypen sind jedoch bisher nur für endliche Mengen behandelt worden, die in diesem Falle nicht blofs einen, wohl aber eine endliche Anzahl von verschiedenen Ordnungstypen besitzen. Insbesondere hat Cantor Recursionsformeln angegeben, um die Anzahl der Ordnungstypen einer r-fach geordneten Menge zu bestimmen[3]).

Die Ordnungstypen der transfiniten mehrfach geordneten Mengen sind bisher nicht weiter untersucht worden. Es ist jedoch klar, dafs sich auf sie die Definitionen der Fundamentalreihe, des Grenzelements, und der an sie anschliefsenden Begriffe, nämlich abgeschlossen, in sich dicht, perfect, überall dicht und nirgends dicht, ebenfalls übertragen lassen. Es kommen in den bezüglichen Formulirungen wieder diejenigen Tatsachen und Beziehungen zum allgemeinsten arithmetischen Ausdruck, die für die Punkte einer stetig ausgedehnten Menge längst geläufig sind.

Sechstes Capitel.

Die wohlgeordneten Mengen und die Ordnungszahlen.

Von den geordneten Mengen sind die wichtigsten die wohlgeordneten; ihre Ordnungstypen liefern die transfiniten Ordnungszahlen, ebenso wie die Mächtigkeiten die transfiniten Cardinalzahlen lieferten.

---

1) Vgl. auch Abschnitt III, Cap. 2. Die einfachste nichtstetige Abbildung dieser Art erhält man, wenn man die obige Menge $Z = \{z\}$ (S. 24) nicht dyadisch liest, sondern in irgend einem andern Zahlensystem, z. B. dekadisch. Vgl. auch S. 64.

2) Die Töne lassen sich, falls für sie Höhe und Stärke berücksichtigt wird, als zweifach geordnete Menge darstellen.

3) Vgl. Zeitschr. f. Philosophie, Bd. 92, S. 240. Analoge Probleme behandeln H. Schwarz (Dissertation Halle, 1888), sowie Vivanti in Ann. di mat. (2), Bd. 17, S. 1.

Die Theorie der wohlgeordneten Mengen hat Cantor 1897 dargestellt[1]); in ihr hat er die logisch geklärte und verallgemeinerte Grundlage für die von ihm bereits 1882 eingeführten transfiniten Zahlen geschaffen. Er geht von der Auffassung aus, die endliche Zahl ν durch eine Reihe aufeinanderfolgender Einheiten darzustellen — $\nu = \{1, 1, 1, \ldots. 1\}$ — und jede Zahl $\nu' < \nu$ durch einen Abschnitt dieser Reihe. Die Verallgemeinerung dieser Auffassung liefert den Begriff und die Eigenschaften der transfiniten Zahlen. Diese Zahlen bezwecken die Fortsetzung der Reihe der ganzen Zahlen über das Unendliche hinaus. So paradox eine solche Idee zunächst erscheint, so lassen doch bereits die vorangehenden Entwicklungen die Natur und die Notwendigkeit dieser Fortsetzung erkennen.

1. Ein formales Bedürfnis für diejenigen Symbole, die man transfinite Zahlen nennt, läfst sich an ganz einfachen Problemen darlegen. Ich wähle ein solches, das an die Natur des Grenzpunktes in einem stetigen Gebiet anknüpft. Auf der Einheitsstrecke bedeute

$$x_0, \; x_1, \; x_2, \; \cdots\; x_\nu, \; \cdots$$

eine Reihe von Punkten, die von links nach rechts auf einander folgen, und es sei x_ω ihr Grenzpunkt. Ist dies ein innerer Punkt der Strecke $0 \cdots 1$, so fasse man von ihm aus wieder eine Reihe von links nach rechts liegender Punkte ins Auge; sie möge durch

$$x_\omega, \; x_{\omega+1}, \; x_{\omega+2}, \; \cdots\; x_{\omega+\nu} \cdots$$

bezeichnet werden, und es sei $x_{\omega+\omega} = x_{\omega\cdot 2}$ ihr Grenzpunkt. So kann man fortfahren; eine analoge Reihe führe zu einem Grenzpunkt $x_{\omega\cdot 3}$ u. s. w. u. s. w. Die Punkte, zu denen man so gelangt, können überdies so gewählt werden, dafs auch die Grenzpunkte

$$x_\omega, \; x_{\omega\cdot 2}, \; x_{\omega\cdot 3}, \; \cdots\; x_{\omega\cdot\mu}, \; \cdots$$

selbst noch gegen einen inneren Punkt der Einheitsstrecke convergiren, den man alsdann durch $x_{\omega\cdot\omega} = x_{\omega^2}$ bezeichnen kann. Von ihm aus kann man immer wieder weitere Punkte ins Auge fassen, bis man schliefslich den Punkt $x = 1$ erreichen wird[2]).

Das Vorstehende hat zu einer in unbegrenzter Perspective fortschreitenden Reihe von Indicessymbolen geführt, die wir hier nochmals durch eine Tabelle darstellen:

---

1) Math. Ann. 49, S. 207. Die hier auftretenden Begriffe und Sätze finden sich gröfstenteils schon in Math. Ann. 21, S. 545ff. dargelegt. Vgl. auch Zeitschrift f. Philosophie, 92, S. 240 (1887).

2) Es ist eine stillschweigende Voraussetzung mancher Beweise, dafs dies letztere wirklich einmal eintritt, wie auch die Punkte x gewählt werden mögen. Genau genommen bedarf aber diese Voraussetzung der Prüfung, besonders die nötige Zahl der Schritte. Vgl. auch Cap. VII, § 5.

$$\begin{array}{lllll}
 & 1, & 2, \cdots\cdots & \nu, \cdots\cdots \\
\omega, & \omega + 1, & \omega + 2, \cdots\cdots & \omega + \nu, \cdots\cdots \\
\omega \cdot 2, & \omega \cdot 2 + 1, & \omega \cdot 2 + 2, \cdots\cdots & \omega \cdot 2 + \nu, \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\omega \cdot \mu, & \omega \cdot \mu + 1, & \omega \cdot \mu + 2, \cdots\cdots & \omega \cdot \mu + \nu, \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\omega^2, & \omega^2 + 1, \cdots \omega^2 + \omega \cdot \mu + \nu, \cdots \omega^3, \cdots\cdots & & \\
\end{array}$$

u. s. w. u. s. w.

Diese Symbole sind Cantor's transfinite Zahlen.

Es möge hier noch ein zweites Beispiel eine Stelle finden, das an die früher (S. 14) eingeführte Menge M_ω anknüpft. Sind die Mengen

$$M_1, \ M_2, \ M_3 \cdots M_\nu \cdots$$

so beschaffen, dafs jedes M_{i+1} in M_i enthalten ist, so läfst sich eine Menge M_ω definiren, die in allen M_i enthalten ist, so dafs

$$M_\omega = \mathfrak{D}\,(M_1, \ M_2, \cdots M_\nu \cdots)$$

ist. Man kann nun aber von neuem Teilmengen von M_ω betrachten und so zu der Reihe der Teilmengen

$$M_{\omega+1}, \ M_{\omega+2}, \cdots$$

gelangen[1]). Es kann dann wieder eine allen diesen Mengen gemeinsame Teilmenge

$$\mathfrak{D}\,(M_\omega, \ M_{\omega+1}, \ M_{\omega+2} \cdots) = M_{\omega \cdot 2}$$

geben, und es lassen sich nun auch für sie weitere Teilmengen definiren, u. s. w. u. s. w.

2. Der wirkliche Ausgangspunkt Cantor's bei der Construction der transfiniten Zahlen ist freilich kein so formaler; es ist die Theorie der Punktmengen, die den Anstofs dazu gegeben hat. Bei den Punktmengen treten die Mengen M_ω, $M_{\omega+1}$, $\cdots$, die wir hier als constructiv möglich erkannten, wirklich auf; sie sind es, die die Einführung der transfiniten Zahlen als Notwendigkeit erscheinen liefsen. Cantor hat diese Zahlen ursprünglich durch gewisse Erzeugungsprincipien hergestellt analog dem obigen Beispiel. Erst viel später (1897) hat er eine allgemeine Theorie dieser Zahlen aufgestellt und sie so auf Definitionen allgemeinster Art gestützt, dafs sie jede Art transfiniter Zahlen umfafst und jede

1) Es scheint hier natürlicher, die bezüglichen Mengen durch M_∞, $M_{\infty+1}$, $M_{\infty+2} \cdots$ zu bezeichnen. Dies ist auch wirklich die Bezeichnung, die Cantor zunächst gewählt hat (Math. Ann., 17, S. 358, 1880). Der Fortschritt von diesen Symbolen zu mathematischen Objecten ist dasjenige, was durch die Theorie der wohlgeordneten Mengen geleistet wird.

Art von Erzeugungsprincipien zuläſst, die zur Construction dieser Zahlen erforderlich sind. Diese Theorie soll hier zunächst zur Darstellung kommen:

Eine Menge F heiſst wohlgeordnet, falls sie, sowie jede ihrer Teilmengen, ein erstes Element besitzt.

Hier entsteht sofort die Frage, ob und wie man zu solchen Mengen von der Definition aus gelangen kann. Zu diesem Behuf weise ich zunächst auf drei Folgerungen hin, die sich aus der Definition unmittelbar ergeben.

1) Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist selbst wohlgeordnet.

2) Zu jedem Element f von F, falls es nicht das letzte ist, giebt es ein unmittelbar folgendes (consecutives) Element. Ist nämlich F_1 die Teilmenge aller Elemente, die auf f folgen ($F_1 \succ f$), so hat sie notwendig ein erstes Element, und dies ist das geforderte[1]).

3) In F giebt es keine Reihe von Elementen $f \succ f' \succ f'' \cdots$, die nicht abbricht; denn sonst würde sie eine Teilmenge ohne erstes Element darstellen. In einer unendlichen wohlgeordneten Menge giebt es also keine Teilmengen vom Typus $^*\omega$.

Dagegen enthält, wie noch gezeigt wird, jede transfinite wohlgeordnete Menge Teilmengen vom Typus ω.

Die wirkliche Construction der wohlgeordneten Mengen, die wir hier zunächst in Angriff nehmen, wird das überraschende Resultat ergeben, daſs es in gewissem Sinn nur eine Gattung wohlgeordneter Mengen giebt, und daſs sich jede als „Abschnitt“ eines sie alle enthaltenden einheitlichen Ganzen auffassen läſst. Es entspricht dies dem oben erwähnten Umstand, daſs sich ν' als Abschnitt von ν betrachten läſst, falls $\nu' < \nu$ ist.

3. Unter dem bereits eben erwähnten Abschnitt einer wohlgeordneten Menge F soll die wohlgeordnete Menge A aller Elemente verstanden werden, die einem Element f vorangehen ($A \prec f$); genauer heiſst A der durch f bestimmte Abschnitt. Die wohlgeordnete Menge aller Elemente von F, die auf A folgen, heiſst der durch f bestimmte Rest von F, so daſs also

$$F = (A, R);\ A \prec R$$

ist. Diese von Cantor in die Theorie eingeführten Abschnitte sind geeignet, die Einsicht in den Bau der wohlgeordneten Mengen wesentlich zu erleichtern; sie bilden zugleich ein ebenso einfaches, wie nützliches Hilfsmittel der hier zu führenden Beweise. Zunächst ist klar, daſs nicht allein jedem Element f ein Abschnitt A ent-

1) Bei der Menge R der der Gröſse nach geordneten rationalen Zahlen folgt auf eine Zahl r niemals eine andere unmittelbar.

spricht, sondern auch umgekehrt jedem Abschnitt ein Element f, nämlich das erste Element des zu A gehörigen Restes R. Für diese Abschnitte bestehen insbesondere folgende Sätze, von denen wir öfters Gebrauch zu machen haben:

1) Ist A ein Abschnitt von F und A' ein Abschnitt von A, so ist auch A' Abschnitt von F.

2) Sind A und A' zwei Abschnitte derselben Menge F, und definirt man $A > A'$, falls $f > f'$ ist, so besitzen die Abschnitte von F Gröfsencharakter (S. 15). Insbesondere ist stets $F > A$.

3) Die der Gröfse nach geordneten Abschnitte von F bilden eine wohlgeordnete Menge, die der Menge F ähnlich ist, und zwar so, dafs A und f einander entsprechen.

4) Für jede Teilmenge von Abschnitten giebt es notwendig einen kleinsten.

5) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs F und G ähnliche Mengen sind, besteht darin, dafs jedem Abschnitt der einen Menge ein ihm ähnlicher Abschnitt der anderen Menge entspricht und umgekehrt.

Von diesen Sätzen bedarf höchstens der zweite Teil des letzten einer kurzen Erörterung. Entspricht nämlich jedem A von F ein ihm ähnlicher Abschnitt B von G, so entspricht auch jedem f ein g; sind ferner A, A' und B, B' entsprechende Abschnitte, und ist $A < A'$, so ist auch $B < B'$; es ist also, falls $f \prec f'$ ist, auch $g \prec g'$, womit der Satz bewiesen ist.

4. Um jetzt die wohlgeordneten Mengen wirklich aufzustellen, verfahren wir folgendermafsen. Wir nennen zwei Elemente f und f_1 von F benachbart oder getrennt, je nachdem zwischen ihnen eine endliche oder überendliche Menge anderer Elemente vorhanden ist, und bestimmen zunächst diejenigen wohlgeordneten Mengen F, die kein Element enthalten, das vom ersten Element f_1 getrennt ist. Enthält alsdann die Menge F ein letztes Element, so enthält sie nur eine endliche Anzahl von Elementen und ist vom Typus

$$\nu = \overline{(f_1, f_2, \cdots f_\nu)};$$

enthält sie dagegen kein letztes Element, so ist sie notwendig vom Typus

$$\omega = \overline{(f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots)}.$$

Für jedes ν ist die erste Menge in der zweiten als Abschnitt enthalten.

Sind zweitens in F Elemente enthalten, die von f_1 getrennt sind, so bilden sie eine Teilmenge G, die notwendig ein erstes Element g_1 enthält, und es ist

$$F = (F_1, G).$$

Hier ist die Menge F_1 so definirt, dafs sie kein Element enthalten

kann, das von f_1 getrennt ist; sie ist daher eine Menge, wie wir sie eben betrachteten, und zwar notwendig eine solche vom Typus ω. Wir haben also

$$\varphi = \omega + \chi,$$

wenn φ resp. χ die Ordnungstypen von F und G sind. Für G sind jetzt wieder, wie oben für F, zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn zunächst die Menge G keinerlei von g_1 getrenntes Element enthält, so hat sie wieder den Typus

$$\mu = \overline{(g_1, g_2, \cdots g_\mu)} \quad \text{oder} \quad \omega = \overline{(g_1, g_2, g_3 \cdots\cdots)},$$

je nachdem sie ein letztes Element enthält oder nicht, und wir erhalten daher für F den Typus

$$\varphi = \overline{(f_1, f_2, f_3, \cdots; g_1, g_2, \cdots g_\mu)} = \omega + \mu \quad \text{resp.}$$
$$\varphi = \overline{(f_1, f_2, f_3 \cdots; g_1, g_2, g_3, \cdots\cdots)} = \omega + \omega = \omega \cdot 2.$$

Enthält G dagegen Elemente, die von g_1 getrennt sind, so bilden sie eine Teilmenge H, die ein erstes Element h_1 besitzt, und für die sich im übrigen dieselben Schlüsse ausführen lassen, wie eben für F und G. Wir gelangen so zu einer fortlaufenden Reihe von Ordnungstypen, die wieder die auf S. 35 enthaltene Tabelle liefern, und es ist nach der Ableitung klar, dafs eine wohlgeordnete Menge entweder selbst vom Typus $\omega \cdot \mu + \nu$ ist oder aber Abschnitte dieses Typus besitzt.

Das vorstehende Verfahren zur Bildung wohlgeordneter Mengen kann man in allgemeiner Weise fortsetzen; zunächst wie folgt: Sei

$$F' = (f_{11}, f_{21}, f_{31} \cdots\cdots)$$

eine Teilmenge von F, die folgendermafsen definirt ist. Es sei f_{11} das erste Element von F, f_{21} das erste, das von f_{11} getrennt ist, f_{31} das erste, das von f_{21} getrennt ist u. s. w. Da nun F' ebenfalls eine wohlgeordnete Menge ist, so ist nach dem obigen resp.

$$\varphi' = \nu, \quad \varphi' = \omega, \quad \varphi' = \omega + \chi',$$

und man überzeugt sich leicht, dafs im ersten Fall F einen Typus besitzt, der bereits unter denen der obigen Tabelle enthalten ist. Ist zweitens $\varphi' = \omega$, so haben wir

$$F = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, \cdots; \quad f_{21}, f_{22}, f_{23}, \cdots; \quad f_{31}, f_{32} \cdots; \quad \cdots),$$

so dafs

$$\varphi = \omega + \omega + \omega + \cdots\cdots = \omega \cdot \omega = \omega^2$$

ist; endlich ergiebt sich im dritten Fall, falls zunächst $\chi' = \mu$ ist,

$$\varphi = \omega^2 + \omega \cdot \mu + \nu$$

u. s. w. u. s. w.[1])

1) Die obenstehenden Mengen und ihre Ordnungstypen geben einfache Beispiele für die Ungiltigkeit des commutativen Gesetzes; man sieht z. B. aus der Definition von ω^2, dafs $\omega + \omega^2 = \omega^2$ ist, während $\omega^2 + \omega$ von ω^2 verschieden ist, u. s. w.

5. Aus alledem folgt, dafs zwei wohlgeordnete Mengen F und F_1 jedenfalls im Anfang in ihrem Bildungsgesetz übereinstimmen; sie besitzen eine Reihe ähnlicher Abschnitte und können sich insoweit nur in der Bezeichnung unterscheiden. Es entsteht daher die Frage, ob diese Übereinstimmung des Bildungsgesetzes einmal aufhört. Die Antwort lautet, dafs dies nur dann eintritt, wenn eine der Mengen selbst aufhört; soweit man auch zwei wohlgeordnete Mengen ins Auge fafst, haben sie das gleiche Bildungsgesetz. Mit andern Worten, es besteht der Satz:

I. Zwei wohlgeordnete Mengen F und G sind entweder ähnlich, oder die eine ist einem Abschnitt der andern ähnlich.

Dieser Satz steht im Mittelpunkt der Theorie und soll daher ausführlich bewiesen werden.

Da es für F und G jedenfalls Abschnitte giebt, die einander ähnlich sind, so können zwischen ihnen nur folgende zwei Möglichkeiten obwalten. Entweder entspricht jedem Abschnitt der einen Menge ein ihm ähnlicher Abschnitt der andern, oder nicht jedem Abschnitt der einen entspricht ein ihm ähnlicher Abschnitt der andern. Im ersten Fall sind die Mengen ähnlich, es bleibt also nur der zweite zu betrachten. Er spaltet sich in zwei Unterfälle. Es kann noch jedem Abschnitt der einen Menge ein ihm ähnlicher der andern entsprechen, aber nicht umgekehrt, oder aber es hat keine der beiden Mengen die Eigenschaft, dafs jedem ihrer Abschnitte ein ähnlicher der andern entspricht.

Wenn zunächst jedem Abschnitt A von F ein ihm ähnlicher Abschnitt B von G entspricht, aber nicht umgekehrt, so giebt es gemäfs S. 37, 4 einen kleinsten Abschnitt G' von G, dem in F kein ähnlicher Abschnitt entspricht. Ist nun B' ein Abschnitt von G', so ist B' auch Abschnitt von G, und da $B' < G'$ ist, so entspricht dem B' ein ähnlicher Abschnitt in F. Andererseits entspricht auch jedem Abschnitt A von F ein Abschnitt B von G; dieser mufs aber zugleich Abschnitt von G' sein, d. h. $B < G'$. Denn wäre $B \geqq G'$, so müfste auch dem G' ein ähnlicher Abschnitt in F entsprechen, was ja nicht der Fall ist. Die beiden Mengen F und G' stehen also in der Beziehung, dafs jedem Abschnitt der einen ein ihm ähnlicher Abschnitt der andern entspricht; d. h. es ist $F \sim G'$.

Wird zweitens angenommen, dafs weder jedem Abschnitt von F ein solcher von G, noch auch jedem Abschnitt von G ein solcher von F entspricht, so giebt es in F sicher einen kleinsten Abschnitt F', dem kein Abschnitt in G entspricht, und in G einen kleinsten Abschnitt G', dem kein Abschnitt in F entspricht. Nun sei wieder A' ein Abschnitt von F', so ist auch A' Abschnitt von F, und da $A' < F'$, so entspricht ihm sicher ein ähnlicher Abschnitt B

in G, und man zeigt, wie eben, dafs $B < G'$, also auch ein Abschnitt von G' ist. Ebenso folgt, dafs jedem Abschnitt B' von G' ein ihm ähnlicher Abschnitt von F' entspricht. Daraus folgt aber, dafs $F' \sim G'$ ist, während wir angenommen hatten, dafs weder F' ein ähnlicher Abschnitt in G, noch G' ein solcher in F entspreche. Diese Annahme ist daher unstatthaft.

Der somit bewiesene Satz führt nun auch zu der Eingangs ausgesprochenen Folgerung über die Gesamtheit aller wohlgeordneten Mengen. Er führt nämlich zu der Conception einer einzigen wohlgeordneten Menge W von der Art, dafs jede einzelne wohlgeordnete Menge F einem Abschnitt von W ähnlich ist. Eine genauere Begriffsbestimmung dieser Menge W wird sich im folgenden noch ergeben.

Als Folgerung unseres Hauptsatzes beweisen wir endlich noch den folgenden Satz:

II. Eine Teilmenge von F ist entweder F selbst oder einem Abschnitt von F ähnlich.

Wäre nämlich die Teilmenge F' von F weder F selbst noch einem Abschnitt von F ähnlich, so gäbe es auf Grund des vorstehenden Satzes einen Abschnitt A' von F', so dafs $A' \sim F$ ist; das Element von F', also auch von F, zu dem A' gehört, sei f'. Ist jetzt F'' die Teilmenge von A', die der Teilmenge F' von F ähnlich ist, so müfste es auch einen Abschnitt A'' von F'' geben, so dafs $A'' \sim F'$ ist, und es sei f'' das Element von F'', also auch von A', zu dem A'' gehört. Alsdann ist notwendig $f'' \prec f'$; so weiterschliefsend gelangen wir zu der Reihe

$$f' \succ f'' \succ f''' \succ \cdots$$

vom Typus $^*\omega$, was unmöglich ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Einfache Beispiele dieses Satzes sind bereits auf S. 38 erwähnt worden.

6. Die Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen bezeichnen wir von nun an mit Cantor als Ordnungszahlen. Für sie ergeben sich aus dem Vorstehenden die folgenden Sätze:

III. Die Ordnungszahlen besitzen Gröfsencharakter.

Dieser Satz deckt sich im wesentlichen damit, dafs die Abschnitte einer und derselben Menge F Gröfsencharakter besitzen. Sind nämlich φ und χ zwei Ordnungszahlen, und F und G die zugehörigen wohlgeordneten Mengen, so definiren wir

$$\varphi = \chi, \quad \varphi > \chi, \quad \varphi < \chi,$$

je nachdem $F \sim G$ ist, oder G einem Abschnitt von F, oder endlich F einem Abschnitt von G ähnlich ist. Alsdann folgt aus Satz I, dafs erstens von diesen drei Möglichkeiten immer eine und

nur eine erfüllt ist, und dafs die Definition zweitens auch den weiteren Gröfsengesetzen genügt.

IV. Es giebt keine der Gröfse nach geordnete Menge von Ordnungszahlen vom Typus $^*\omega$, vielmehr giebt es für jede Gesamtheit von ihnen notwendig eine kleinste.

Ist nämlich G irgend eine der Gröfse nach geordnete Menge von Ordnungszahlen, und gäbe es für sie keine kleinste, so enthielte sie sicher eine Reihe

$$\varphi' > \varphi'' > \varphi''' > \cdots\cdots$$

vom Typus $^*\omega$. Sind jetzt F', F'', F''' die zugehörigen wohlgeordneten Mengen, so müfsten F'', $F''' \cdots$ sämtlich Abschnitten von F' ähnlich sein, und es gäbe in F' eine Reihe von Abschnitten vom Typus $^*\omega$

$$A'' > A''' > \cdots,$$

was unmöglich ist. Wir können diesen Satz auf Grund der an die Spitze gestellten Definition auch folgendermafsen aussprechen:

V. Jede Gesamtheit von Ordnungszahlen bildet, der Gröfse nach geordnet, eine wohlgeordnete Menge.

Insbesondere bildet also auch die Gesamtheit aller Ordnungszahlen eine wohlgeordnete Menge W, und diese Menge ist der bereits oben erwähnten Menge ähnlich[1]); jede Ordnungszahl kann als Ordnungstypus eines Abschnittes von W betrachtet werden. Die Anfangsglieder dieser Menge W aller Ordnungszahlen werden durch die Tabelle von S. 35 dargestellt. Die weitere Fortsetzung und deren Gesetze werden uns in Cap. VII näher beschäftigen; hier sollen zuvor erst noch die einfachen formalen Gesetze und Rechnungsregeln für Ordnungszahlen abgeleitet werden.

VI. Die Summe und das Product zweier Ordnungszahlen ist ebenfalls eine Ordnungszahl.

Dieser Satz folgt nicht etwa daraus, dafs man auf beliebige Ordnungstypen die Addition und Multiplication anwenden darf; er besagt vielmehr, dafs bei Addition und Multiplication wohlgeordneter Mengen immer wieder eine wohlgeordnete Menge entsteht. Wir beweisen in dieser Hinsicht sofort folgenden umfassenden Satz, aus dem der vorstehende folgt:

VII. Werden für die Elemente einer wohlgeordneten Menge beliebige wohlgeordnete Mengen gesetzt, so entsteht wieder eine wohlgeordnete Menge.

Sei nämlich $F = (f_1, f_2, \cdots)$ die Menge, in die für $f_1, f_2 \cdots$ die wohlgeordneten Mengen $F_1, F_2, \cdots$ gesetzt werden sollen. Zunächst ist klar, dafs die neu entstehende Menge G ein erstes Element g_1 besitzt; denn F und F_1 haben ein solches. Hätte nun

1) Vgl. auch Cantor in Math. Ann. 46, S. 495.

nicht jede Teilmenge G' von G ein erstes Element, so gäbe es in ihr eine Reihe vom Typus $^*\omega$

$$g' > g'' > g''' > \cdots\cdot$$

Daraus würde aber leicht die Existenz einer analogen Reihe

$$F' > F'' > F''' > \cdots\cdot$$

folgen, und daraus wieder die Existenz einer Reihe

$$f' > f'' > f''' > \cdots\cdot,$$

die ebenfalls den Typus $^*\omega$ besitzt, was unmöglich ist.

Von den Rechnungsgesetzen bleiben auch für die Ordnungszahlen nur die associativen anwendbar, sowie das distributive in dem Fall, dafs der Multiplicandus eine Summe ist.[1])

Der zweite der obigen Sätze zeigt, dafs auch die Summe von unendlich vielen Ordnungszahlen stets wieder eine Ordnungszahl darstellt; was also im Gebiet der gewöhnlichen Zahlen nur unter der Bedingung der Convergenz stattfindet, gilt im Gebiet der transfiniten Ordnungszahlen ohne jede Beschränkung.

7. Dies führt zu einer letzten sehr bemerkenswerten und wichtigen Consequenz. Sei nämlich

$$\{\varphi_\nu\} = \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \cdots\cdot < \varphi_\nu < \cdots\cdot$$

eine Reihe wachsender Ordnungszahlen vom Typus ω, so läfst sich stets eine erste Ordnungszahl definiren, die gröfser ist als jedes φ_λ. Nämlich es sei

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varrho_1,\ \varphi_3 = \varphi_2 + \varrho_2, \cdots\cdot \varphi_{\lambda+1} = \varphi_\lambda + \varrho_\lambda \cdots\cdot,$$

so folgt

$$\varphi_{\lambda+1} = \varphi_1 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots\cdots + \varrho_\lambda,$$

und es stellt daher die unendliche Summe

1) Es ist z. B. $\nu + \omega$ der Ordnungstypus der Menge

$$(e_1, e_2, \cdots\cdots e_\nu; f_1, f_2, f_3 \cdots\cdots),$$

und daher

$$\nu + \omega = \omega,$$

während $\omega + \nu$ als Ordnungstypus der Menge

$$(f_1, f_2, f_3, \cdots f_\nu \cdots; e_1, e_2, \cdots e_\nu)$$

von ω verschieden ist. Ebenso ist $\nu \cdot \omega$ Ordnungstypus von

$$(f_{11}, f_{12}, \cdots f_{1\nu}; f_{21}, f_{22} \cdots f_{2\nu}; f_{31}, f_{32}, \cdots f_{3\nu} \cdots),$$

und daher $\nu \cdot \omega = \omega$, wohingegen $\omega \cdot \nu$ als Ordnungstypus von

$$(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \cdots\cdot; f_{21}, f_{22}, \cdots\cdot; f_{\nu 1}, f_{\nu 2} \cdots)$$

gleich einer Summe von ν Summanden ω ist.

$$\varphi_1 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu + \cdots\cdots$$

eine wohldefinirte Ordnungszahl φ dar. Diese Ordnungszahl ist die verlangte. Sie ist in der That gröfser als jedes φ_λ; sie ist aber zugleich die kleinste Ordnungszahl dieser Art. Denn ist $\varphi' \prec \varphi$, und sind F, F', F_λ die wohlgeordneten Mengen, die den Zahlen φ, φ', φ_λ entsprechen, so folgt zunächst, dafs F' einem Abschnitt von F ähnlich ist. Jeder Abschnitt von F ist aber zugleich Abschnitt eines F_λ, und man sieht leicht, dafs es deshalb Werte λ', resp. Abschnitte $F_{\lambda'}$ geben mufs, so dafs F' Abschnitt von $F_{\lambda'}$ ist. Alsdann ist aber auch $\varphi' < \varphi_{\lambda'}$.

Die so definirte Ordnungszahl φ ist von Cantor als Limeszahl bezeichnet worden; wir setzen

$$\varphi = \operatorname*{Lim}_\nu \varphi_\nu = \varphi_\omega$$

und erhalten zugleich folgenden Satz:

VIII. Zu jeder Fundamentalreihe $\{\varphi_\nu\}$ von wachsenden Ordnungszahlen gehört eine Limeszahl $\operatorname*{Lim}_\nu \varphi_\nu = \varphi_\omega$, die auf alle φ_ν der Gröfse nach zunächst folgt.

Das einfachste Beispiel einer solchen Limeszahl ist ω selbst, insofern ω die erste Zahl ist, die auf alle Zahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \cdots\cdots \nu \cdots\cdots$$

der Gröfse nach folgt. Analog definirt die Fundamentalreihe

$$\omega,\ \omega\cdot 2,\ \omega\cdot 3,\ \cdots\cdots \omega\cdot\nu \cdots\cdots$$

eine Limeszahl, die auch durch

$$\omega + \omega + \omega + \cdots\cdots = \omega\cdot\omega = \omega^2$$

bezeichnet werden kann. Ferner bestimmt die Fundamentalreihe

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3 \cdots\cdots$$

eine Limeszahl, die wir ω^ω schreiben; setzen wir endlich

$$\omega^\omega = \omega_1, \quad \omega_1^{\ \omega} = \omega_2, \cdots\cdots,$$

so bestimmt auch die Reihe

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3 \cdots\cdots$$

eine neue Limeszahl u. s. w. u. s. w.

Für die Limeszahlen gelten analoge Sätze wie für die Irrationalzahlen; insbesondere unterliegt die Gleichheit zweier Limeszahlen $\alpha_\omega = \beta$ und $\alpha_\omega' = \beta'$, die durch Fundamentalreihen $\{\alpha_\nu\}$ und $\{\alpha_\nu'\}$ definirt sind, den analogen Kriterien wie die Gleichheit zweier Irrationalzahlen, wie bereits oben in dem allgemeineren Fall beliebiger Ordnungstypen für die bezüglichen Fundamentalreihen resp. die durch sie dargestellten Grenzelemente erwähnt wurde.

Siebentes Capitel.

Die höheren Zahlklassen[1]).

Die der Gröfse nach geordneten Ordnungszahlen gestatten gewisse natürliche Einschnitte, die zu ihrer Spaltung in Zahlklassen Veranlassung geben. Die Ordnungszahlen 1, 2, 3, $\cdots \nu \cdots$ entsprechen Mengen, deren Mächtigkeit endlich ist; ihre Gesamtheit ist aber bereits transfinit und zwar von der ersten Mächtigkeit. Wir fassen die bezüglichen Ordnungszahlen als erste Zahlklasse Z_1 zusammen. Analog definiren wir zunächst als zweite Zahlklasse Z_2 diejenigen Ordnungszahlen, die zu wohlgeordneten Mengen erster Mächtigkeit gehören (1); es wird sich zeigen, dafs dieser Gesamtheit die zweite Mächtigkeit zukommt (2).

Die Zahlen der ersten Zahlklasse ergeben sich sämtlich auf Grund eines einzigen Bildungsgesetzes; es besagt, dafs wenn die Zahl ν existirt, auch $\nu + 1$ existirt (erstes Erzeugungsprincip). Andererseits führt aber auch die alleinige Anwendung dieses Princips nicht über die erste Zahlklasse hinaus.

Um die Zahlen der zweiten Zahlklasse zu erhalten, bedarf es noch eines zweiten Erzeugungsprincips. Dem oben abgeleiteten Theorem gemäfs besagt es, dafs für jede Fundamentalreihe $\{\varphi_\nu\}$ wachsender Ordnungszahlen eine erste Ordnungszahl existirt, die gröfser als alle φ_ν ist. Dieses Princip ist zum Zweck der Construction der transfiniten Zahlen bereits 1883 von Cantor in den „Grundlagen" ausgesprochen worden; damals allerdings nur in der Form eines Postulats, während es hier als Folgerung aus der allgemeinen Theorie der wohlgeordneten Mengen, resp. aus der ihnen zu Grunde gelegten Definition erscheint.

Der Fortschritt, den die Mengenlehre in diesem Punkt seit der Veröffentlichung der „Grundlagen" gemacht hat, besteht also auch hier wesentlich in der Klärung der grundlegenden Begriffe und Methoden, sowie der auf ihnen ruhenden Beweise. Insbesondere ist eine eingehendere Erörterung auch jetzt nur für die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse vorhanden. Cantor hat ausführlich dargelegt, wie man mit ihnen zu rechnen hat, und hat insbesondere gelehrt, dafs man auch den Potenzbegriff für die transfiniten Zahlen der ersten und zweiten Klasse definiren kann (3). Für die auf sie folgenden Zahlen resp. Zahlklassen besitzen wir nur eine ganz unbestimmte Perspective, die ebenfalls schon in den „Grundlagen" vorhanden ist. Auch die Beziehung der Zahlklassen zum Continuum hat bisher eine wirkliche Förderung nicht erfahren (4). Dagegen haben neuere Arbeiten den Zahlen der zweiten Zahlklasse eine immer steigende Bedeutung

1) Vgl. Math. Ann. 21, S. 576 ff. u. 49, S. 207.

verliehen. Sie haben auf den mannigfachsten Gebieten Anwendung gefunden und sich in ihnen als die naturnotwendigen Symbole herausgestellt, insbesondere überall da, wo unbegrenzte Folgen von Grenzprocessen in Betracht zu ziehen sind. Sie besitzen auch eine einfache Beziehung zu den sogenannten „Unendlich" der Functionen P. du Bois' (7). Ihrer Einführung danken wir es, dafs wir die bisherigen mehr unbestimmten Vorstellungen durch ebenso sichere und klare Begriffe ersetzen durften, wie wir uns deren im Gebiet der endlichen Zahlen bedienen. Ich verweise hierfür auf einen unten folgenden Satz Borel's (5), den ich als Grundlage benutzt habe, um daraus den (6) auf Cantor, Vivanti und Poincaré zurückgehenden Satz abzuleiten, dafs eine analytische Function für jeden Wert der Variablen höchstens eine abzählbare Menge von Functionswerten zuläfst. Ich habe übrigens die Beweismethoden dadurch zu kürzen gesucht, dafs ich neben dem Schlufs von ν auf $\nu + 1$, der dem ersten Erzeugungsprincip entspricht, den Schlufs von $\{\nu\}$ auf ω resp. allgemeiner den Schlufs von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω eingeführt habe. Die methodische Einführung dieser Schlufsweise scheint geeignet, die Darlegung in formaler Hinsicht wesentlich zu vereinfachen.

1. Um die oben angegebene Definition der zweiten Zahlklasse als berechtigt zu erweisen, ist zu zeigen, dafs das zweite Erzeugungsprincip für die Bestimmung der zweiten Zahlklasse charakteristisch ist. Wir zeigen zunächst, dafs wir mit diesem Princip in Verbindung mit dem ersten Erzeugungsprincip zu jeder Zahl der zweiten Zahlklasse gelangen. Dies kann folgendermafsen geschehen.

Jede Zahl φ der zweiten Zahlklasse entspricht einer wohlgeordneten Menge F der ersten Mächtigkeit. Hat diese Menge ein letztes Element f', so sei F_2 diejenige Teilmenge, die aus f' und allen ihm unmittelbar vorangehenden Elementen besteht. Diese Teilmenge ist endlich, da sonst in F eine Teilmenge vom Typus $^*\omega$ vorhanden wäre. Wir haben also

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

wo $\varphi_2 = \nu$ endlich ist und φ_1 einer Menge F_1 ohne letztes Element entspricht. Es genügt also, dafs wir uns auf solche Zahlen φ_1 beschränken, die zu Mengen F_1 ohne letztes Element gehören; sie sind, wie sich zeigen wird, nichts anderes, als die oben eingeführten Limeszahlen.

Betrachten wir nämlich die Menge aller Zahlen $\psi < \varphi_1$, so sind dies diejenigen, die zu den Abschnitten der Menge F gehören. Da F kein letztes Element besitzt, so giebt es in der Menge der Ordnungszahlen ψ keine gröfste. Diese Menge ist überdies nach Annahme abzählbar und kann daher in eine Reihe vom Typus ω gesetzt werden; sie sei

$$\{\psi_\nu\} = \psi_1, \psi_2, \psi_3 \cdots \psi_\nu \cdots$$

In dieser Reihe giebt es jetzt notwendig eine Zahl, die gröfser ist als ψ_1, da sonst ψ_1 die gröfste von ihnen wäre, was ausgeschlossen ist; es sei ψ_λ die erste Zahl der obigen Reihe, die gröfser als ψ_1 ist. Ebenso sei ψ_μ die notwendig existirende erste Zahl der Reihe, die gröfser ist als ψ_λ u. s. w.; so weiterschliefsend erhalten wir eine Reihe wachsender Ordnungszahlen

$$\psi_1 < \psi_\lambda < \psi_\mu < \cdots$$

vom Typus ω, und man überzeugt sich leicht, dafs auch die Indices stetig wachsen, so dafs

$$1 < \lambda < \mu < \cdots$$

ist. Diese Reihe definirt jetzt eine Limeszahl ψ_ω, die gröfser ist als ψ_ϱ für *jedes* ϱ, sie ist ihrer Definition nach die kleinste derartige Zahl und ist daher mit φ_1 identisch. Damit ist der verlangte Beweis geliefert. Wir können dies auch folgendermafsen als Satz aussprechen:

I. *Jede Zahl der zweiten Zahlklasse ist entweder eine Limeszahl φ_ω, oder sie ist von der Form $\varphi_\omega + \nu$, wo φ_ω Limeszahl und ν endlich ist.*

Haben wir umgekehrt irgend welche Zahlen der ersten oder zweiten Zahlklasse und wenden auf sie das zweite Erzeugungsprincip an, bilden also die Zahl $\varphi_\omega = \{\varphi_\nu\}$, so haben wir stets (S. 42)

$$\varphi_{\nu+1} = \varphi_\nu + \varrho_\nu,$$

und demgemäfs

$$\varphi_\omega = \operatorname{Lim} \varphi_\nu = \varphi_1 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu + \cdots$$

Da nun jede abzählbare Menge endlicher oder abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, so ist φ_ω eine Zahl der zweiten Zahlklasse. Also gelangen wir zu folgendem Gesamtergebnis:

II. *Das erste und zweite Erzeugungsprincip sind notwendig und hinreichend, um aus den Zahlen der ersten Zahlklasse die Zahlen der zweiten Zahlklasse abzuleiten.*

2. Wir gehen nun zur Untersuchung der Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse Z_2 über, die wir mit *Cantor* durch $\aleph_1$ bezeichnen; zugleich setzen wir $\mathfrak{a} = \aleph_0$. Es wird sich zeigen, dafs $\aleph_1$ die zweite Mächtigkeit darstellt. Zunächst beweisen wir, dafs die zweite Zahlklasse nicht abzählbar ist. Der Beweis ist dem auf S. 19 geführten durchaus analog. Wäre sie nämlich abzählbar, so könnte man sie in die Form einer Reihe vom Typus ω setzen, die wir durch

$$\{\varphi_\nu\} = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \cdots$$

bezeichnen. Nun ist zunächst klar, dafs es unter den Zahlen der zweiten Zahlklasse keine gröfste giebt; denn wäre φ eine solche, so

gehörte auch $\varphi + 1$ der zweiten Zahlklasse an. Es giebt daher notwendig Zahlen, die gröfser sind als φ_1; von ihnen sei φ_λ die erste Zahl der Reihe. Ebenso sei φ_μ die erste Zahl, so dafs $\varphi_\mu > \varphi_\lambda$; so weiterschliefsend gelangen wir wieder zu einer unendlichen Reihe von Ordnungszahlen

$$\varphi_1 < \varphi_\lambda < \varphi_\mu < \cdots,$$

so dafs zugleich

$$1 < \lambda < \mu < \cdots$$

ist. Diese Reihe definirt wieder eine Limeszahl φ_ω, so dafs $\varphi_\omega > \varphi_\varrho$ für jedes ϱ ist; diese Zahl kann daher in der obigen Reihe nicht enthalten sein; andererseits ist sie aber eine Zahl der zweiten Zahlklasse, und damit ist der Beweis geliefert.

Wir zeigen zweitens, dafs jede unendliche Teilmenge Z' von Zahlen der zweiten Zahlklasse entweder abzählbar ist, oder selbst die Mächtigkeit $\aleph_1$ der zweiten Zahlklasse Z_2 besitzt. Wird nämlich die Menge Z' der Gröfse nach geordnet, so entsteht eine wohlgeordnete Menge, die nach Cap. VI, Satz VII entweder Z_2 oder einem Abschnitt von Z_2 ähnlich ist. Ist das zweite der Fall, so gehört zu dem Abschnitt eine Ordnungszahl, die Zahl von Z_2 ist, und die also einer Menge erster Mächtigkeit zugehört. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Hieraus ziehen wir endlich die weitere Folgerung, dafs es keine Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ giebt, so dafs $\aleph_0 < \mathfrak{m} < \aleph_1$ wäre. Denn sonst müfste es eine Teilmenge M von Z_2 geben, die die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ hat; aber jede Teilmenge hat entweder die Mächtigkeit $\aleph_0$ oder $\aleph_1$.

Wir bezeichnen deshalb die Mächtigkeit $\aleph_1$ von Z_2 als zweite Mächtigkeit und haben so den Satz:

III. Die zweite Zahlklasse besitzt die zweite Mächtigkeit $\aleph_1$.

3. Eine letzte Frage formaler Natur, die Cantor für die Zahlen von Z_2 behandelt hat, ist die, ob es für sie eine bestimmte einfachste Darstellungsart giebt, und wie man die Summe oder das Product zweier von ihnen in diese einfachste Form bringt[1]. Das Haupthilfsmittel besteht darin, dafs man im Gebiet der Zahlen α den Potenzbegriff definiren kann, und zwar so, dafs die grundlegenden Rechnungsgesetze erfüllt bleiben. Diese Untersuchungen haben bisher eine Anwendung in Analysis oder Geometrie nicht gefunden, sie haben wesentlich formale Bedeutung, und deshalb mag es genügen, sie hier nur in aller Kürze zu erwähnen.

Die Einführung des Potenzbegriffes beruht auf folgendem Satz:

---

1) Vgl. Math. Ann. 49, S. 229 ff. Ein Teil der bezüglichen Resultate befindet sich bereits in den „Grundlagen" kurz angegeben, S. 583 ff. Ein einfaches Beispiel für die bezügliche Aufgabe liefert die auf S. 38, Anm. 1 stehende Relation, dafs $\omega + \omega^2 = \omega^2$ ist.

IV. Ist ξ eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, ist $\gamma > 1$ und $\delta > 0$, so giebt es eine einzige eindeutige Function $f(\xi)$, die folgenden Bedingungen genügt: Es ist 1) $f(0) = \delta$, 2) $f(\xi) < f(\xi')$, falls $\xi < \xi'$ ist, 3) $f(\xi + 1) = f(\xi) \cdot \gamma$ und 4) $\operatorname{Lim} f(\xi_\nu) = f(\xi_\omega)$, wo $\xi_\omega = \operatorname{Lim} \xi_\nu$ ist.

Was den Beweis dieses Satzes betrifft, so folgt die Existenz einer eindeutigen Function $f(\xi)$ für $\xi = 1, 2, 3 \cdots$ aus 1) und 3) direct, und kann alsdann mittelst der Relationen 2) und 4) durch den Schlufs von ν auf $\nu + 1$ und von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω für jedes α leicht erwiesen werden. Setzt man nun insbesondere $\delta = 1$, so erhält man diejenige Function $f(\xi)$, die Cantor als Potenz γ^ξ bezeichnet; sie genügt den Gesetzen, dafs $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta$ und $\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta$ ist. Die einfachsten Potenzzahlen sind die bereits früher benutzten Zahlen $\omega^2, \omega^3, \cdots$, resp. die aus ihnen zusammensetzbaren

$$\varphi = \omega^\lambda \cdot \nu + \omega^{\lambda-1} \cdot \nu_1 + \cdots + \omega \cdot \nu_{\lambda-1} + \nu_\lambda,$$

wo alle λ und ν endlich sind. Mittelst dieses Potenzbegriffs hat Cantor zwei verschiedene Normalformen für die Zahlen α eingeführt, die eine ist eine Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern, die andere ein analoges Product. Die Productdarstellung gestattet auch den Primzahlbegriff für die Zahlen α zu definiren[1]).

Eine letzte bemerkenswerte Folge des Potenzbegriffs ist die Existenz einer Zahlengattung, die der Gleichung $\omega^\xi = \xi$ genügt, und die Cantor als E-Zahlen bezeichnet. Die einfachste von ihnen wird durch die Fundamentalreihe

$$\omega,\ \omega^\omega = \omega_1,\ \omega^{\omega_1} = \omega_2,\ \cdots \omega^{\omega_{\nu-1}} = \omega_\nu,\ \cdots$$

resp. durch deren Limeszahl dargestellt. Jede Zahl ε dieser Art genügt, falls $\alpha < \varepsilon$ ist, den drei Gleichungen

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha^\varepsilon = \varepsilon,$$

ihre Gesamtheit hat die zweite Mächtigkeit und bildet, der Gröfse nach geordnet, eine Menge, die der Menge aller Zahlen der zweiten Zahlklasse ähnlich ist.

4. In Verallgemeinerung der Definition der zweiten Zahlklasse kann man zu Definitionen noch höherer Zahlklassen aufsteigen. Insbesondere wird die dritte Zahlklasse als Gesamtheit derjenigen Ordnungszahlen definirt, die eine Menge zweiter Mächtigkeit darstellen. Um sie zu bilden, würde man noch eines neuen Erzeugungsprincips bedürfen, das Limeszahlen für eine wachsende Reihe von Ordnungszahlen auch in dem Fall postulirt, dafs die Reihe denjenigen Typus Ω hätte, der der wohlgeordneten Menge aller Ordnungszahlen der ersten

1) Es ist $\omega + 1$ eine Primzahl, dagegen ist $\omega + 2$ zerlegbar. Denn $\omega + 2 = 2 \cdot \omega + 2 = 2 \cdot (\omega + 1)$, was man auch leicht bestätigt, indem man die zu $\omega + 2$ und $2 \cdot \omega + 2$ gehörenden Mengen bildet.

und zweiten Zahlklasse zukommt. Von dieser dritten Zahlklasse würde sich wieder erweisen lassen, dafs ihr die nächsthöhere Mächtigkeit zu $\aleph_0$ und $\aleph_1$ beikommt. So kann man fortfahren; es erwächst so der Ausblick auf eine wohlgeordnete Menge der Gröfse nach geordneter Mächtigkeiten

$$\text{(A)} \qquad \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \cdots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1} \cdots,$$

und zwar ist jede als einer Zahlklasse zugehörig zu betrachten, die die Gesamtheit aller Ordnungstypen darstellt, die einer Menge der vorhergehenden Mächtigkeit entsprechen. Cantor hat dafür auch den Ausdruck benutzt, dafs die Ordnungstypen jeder Zahlklasse abzählbar werden durch die Ordnungszahlen der nächstfolgenden Klasse. Doch ist man hier über diese allgemeinen Definitionen und Formulirungen nicht hinausgekommen. Nur ist zu bemerken, dafs die obige Reihe aller $\aleph$ der schon früher erwähnten Reihe W ähnlich ist, die die Menge aller der Gröfse nach geordneten Ordnungszahlen darstellt.

Die vorstehende Reihe von Mächtigkeiten würde eine erhöhte Bedeutung erhalten, falls ein von Cantor in den „Grundlagen" bereits postulirter Satz eine Bestätigung finden sollte. Es ist der Satz, dafs jede wohldefinirte Menge auch in die Form einer wohlgeordneten Menge gesetzt werden kann. Cantor hat diesen Satz in den „Grundlagen" als ein „durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdiges Denkgesetz" bezeichnet[1]) und hat in Aussicht gestellt, auf ihn noch näher zurückzukommen. Doch ist dies bisher nicht geschehen, und so kann man dem Satz eine objective Geltung für den Augenblick in keiner Weise beilegen. Ja, man würde es sogar verstehen, wenn ein so umfassender und allgemeiner Satz einer ausgedehnten Skepsis begegnete.

Würde der Satz zutreffen, so würde er allerdings von den weitgehendsten Folgen sein, denn die Mächtigkeit einer jeden Menge müfste in der Reihe A) enthalten sein. Es ist kaum zuviel gesagt, wenn ich meine, dafs die Fixirung der Stelle, die $\mathfrak{c}$ in der Reihe A) hat, stets eines der Hauptziele Cantor's gewesen ist, und dafs wir diesem Umstande einen grofsen Teil seiner allgemeinen mengentheoretischen Untersuchungen zu danken haben. Soll $\mathfrak{c}$ überhaupt in A) vorkommen, so müfste es jedenfalls möglich sein, die Zahlengesamtheit in die Form einer wohlgeordneten Menge zu bringen, und falls insbesondere $\mathfrak{c} = \aleph_1$ ist, wie es der Cantor'schen Überzeugung entspricht, so müfste diese Menge der Menge aller Zahlen der zweiten Zahlklasse ähnlich sein. Es ist nicht zu leugnen, dafs

1) S. 8. Vgl. auch Math. Ann. 21, S. 550. Auch Borel's Mengendefinition geht von diesem Axiom aus. Beim C solle man sich die Punkte hintereinander durchlaufen denken! Leçons etc., S. 3; vgl. jedoch auch S. 15.

mancherlei äufsere und innere Momente es nahe legen, für das Continuum und die Zahlen der zweiten Klasse eine solche Beziehung vorauszusetzen. Als äufsere Analogie nenne ich den Limesbegriff, der beiden gemeinsam ist, sowie die Thatsache, dafs es in beiden Fällen eine Gesamtheit aller möglichen Limesgesetze ist, die für die Definition resp. für die Mächtigkeit beider Mengen in Frage kommen. Ein mehr inneres Moment ist der Umstand, dafs für die Untersuchung der Punktmengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse vollständig ausreichen[1]); von den Mengen, die nicht abzählbar sind, hat sich sogar in den allermeisten Fällen beweisen lassen, dafs ihre Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ ist. Trotzdem aber ist die Frage nach der Mächtigkeit des Continuums heute noch ebenso ungeklärt, wie damals, als Cantor es als nicht abzählbar erkannte[2]).

5. Um die Bedeutung der transfiniten Zahlen für Analysis und Geometrie darzulegen, gebe ich zunächst ein mehr formales Beispiel, das die oben begonnene Zerlegung der Menge R aller rationalen echten Brüche in Teilmengen betrifft. Die Teilmenge R_ω entstand, indem wir der Reihe nach die Brüche abtrennten, deren Nenner eine Potenz von 2, von 3, von 5 $\cdots$ war; sie besteht aus allen Brüchen, deren Nenner verschiedene Primzahlen enthalten. Von R_ω spalten wir wieder der Reihe nach diejenigen Brüche ab, deren Nenner eine Potenz von resp. $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7 \cdots\cdots$ ist; so entstehen aus R_ω nach einander die Restmengen

$$R_{\omega+1},\ R_{\omega+2},\ R_{\omega+3} \cdots\cdots,$$

die eine ihnen allen gemeinsame Teilmenge $R_{\omega \cdot 2}$ besitzen. Von ihr spalten wir die Menge ab, deren Nenner Potenzen resp. von $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $3 \cdot 11 \cdots\cdot$ sind, und gelangen dadurch zu den Mengen

$$R_{\omega \cdot 2+1},\ R_{\omega \cdot 2+2},\ R_{\omega \cdot 2+3} \cdots\cdot$$

und zu einer allen gemeinsamen Teilmenge $R_{\omega \cdot 3}$. So fortfahrend erhalten wir schliefslich eine Menge R_{ω^2} aller Brüche, deren Nenner mehr als zwei verschiedene Primzahlen enthalten. Von ihr spalten wir die Brüche ab, deren Nenner drei Primzahlpotenzen enthalten, und können dies so einrichten, dafs die restirende Teilmenge durch R_{ω^3} zu bezeichnen ist. Wir können auf diese Weise sogar eine Menge R_{ω^ω} erreichen, die alle Brüche enthält, in deren Nenner Primzahlen zu verschiedenen Potenzen vorkommen. Aus dem Satz, dafs die Menge der Zahlen von Z_2 die zweite Mächtigkeit besitzt, folgt

1) Vgl. insbesondere S. 67 ff.

2) Ich weise bei dieser Gelegenheit auf einen Satz von Bettazzi hin, der besagt, dafs man die Zahlengesamtheit nicht ausdrücken kann, wenn man zwar eine abzählbare Menge von Zeichen verwendet, aber für jede Zahl nur eine endliche Menge dieser Zeichen benutzt. Vgl. Per. di mat. 6, S. 14 (1891). Der Satz folgt daraus, dafs $\mathfrak{a}^\nu = \mathfrak{a}$ ist. Dafs $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ sei, meinte auch schon Bolzano, Paradoxieen, S. 102.

nun aber, dafs dieser Procefs, wie wir ihn auch fortsetzen mögen, für eine bestimmte transfinite Zahl α der zweiten Zahlklasse ein Ende nimmt, so dafs $R_\alpha = 0$ ist. Denn da R abzählbar ist, so müssen die Teilmengen, die wir der Reihe nach abspalten, eine abzählbare Menge bilden. Existirte nun ein R_α für jedes α, so würde die Menge R die zweite Mächtigkeit besitzen.

Nunmehr sind wir auch im stande, das auf S. 34 behandelte Beispiel näher zu erörtern, resp. den dort verlangten Beweis zu führen. Da die Intervalle, die man auf einer Geraden nebeneinanderlegen kann, eine abzählbare Menge bilden, so folgt sofort, dafs eine Zahl α der zweiten Zahlklasse existirt, für die der bezügliche Procefs ein Ende nimmt. Man kann dies auch so aussprechen, dafs, wenn man aus dem Continuum eine wohlgeordnete Menge von Zahlen herausgreift, die der Gröfse nach geordnet sind, diese Menge immer die erste Mächtigkeit besitzt.

Um ein letztes Beispiel zu geben, beweise ich folgenden Satz Borel's[1]), der einen bekannten Satz von Heine erweitert:

V. Giebt es auf einer Geraden eine unendliche Reihe von Intervallen δ, so dafs jeder Punkt des Intervalls $a \cdots\cdots b$ innerer Punkt mindestens eines Intervalles δ ist, so giebt es auch stets eine endliche Teilmenge solcher Intervalle.

Sei nämlich a_1 ein beliebiger Punkt und δ_1 das zugehörige Intervall, ferner sei a_2 der linke Endpunkt von δ_1, und δ_2 das zugehörige Intervall, ebenso sei a_3 der linke Endpunkt von δ_2 u. s. w. Wird nun a noch nicht mittelst einer endlichen Anzahl von Intervallen $\delta_1, \delta_2 \cdots\cdots \delta_\nu$ erreicht, so haben die Punkte

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots a_\nu \cdots$$

notwendig einen Grenzpunkt a_ω, zu dem ein Intervall δ_ω gehört. Alsdann sei $a_{\omega+1}$ der linke Endpunkt von δ_ω, ferner $\delta_{\omega+1}$ das zugehörige Intervall und $a_{\omega+2}$ dessen linker Endpunkt u. s. w. Wir gelangen so zu einer wohl bestimmten Reihe von Punkten

$$a_1,\ a_2, \cdots a_\omega,\ \cdots a_\alpha, \cdots$$

resp. von Intervallen

$$\delta_1,\ \delta_2, \cdots \delta_\omega, \cdots \delta_\alpha, \cdots,$$

die gemäfs dem Satz von S. 13 abzählbar ist und daher notwendig bei einem bestimmten α abbricht.

Diese Intervallreihe läfst sich nun immer durch eine endliche Menge analoger Intervalle ersetzen. Gehen wir zunächst zum Punkt a_ω zurück, so giebt es sicher eine Zahl μ, so dafs alle Punkte a_μ, $a_{\mu+1}, \cdots$ innerhalb δ_ω liegen und daher $a_1 \cdots a_\omega$ bereits durch die

1) Ann. de l'Ec. Norm. (3) 12, S. 51 (1895).

Intervalle $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_\mu, \delta_\omega$ bedeckt wird. Derselbe Schlufs gilt aber auch für jeden Punkt a_β, der Grenzpunkt einer Punktfolge

$$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, \cdots a_{\alpha_\nu}, \cdots$$

ist, so dafs auch der Schlufs von $\{a_{\alpha_\nu}\}$ auf $a_{\alpha_\omega} = a_\beta$ anwendbar ist. Wird nämlich vorausgesetzt, dafs jedes $a_{\alpha_{i+1}}$ von a_{α_i} aus durch eine endliche Anzahl von Intervallen erreichbar ist, so gilt dies auch von a_β; denn zu a_β gehört wieder ein Intervall δ_β, und innerhalb desselben liegen von einem bestimmten μ an alle Punkte a_{α_μ}, $a_{\alpha_{\mu+1}} \cdots$. Da nun auch zu den Endpunkten a und b Intervalle δ gehören sollen, so ist damit die Behauptung bewiesen.

Es ist nicht schwer, den gleichen Satz auch auf die Ebene und den Raum zu übertragen[1]). Ist nämlich a_1 jetzt ein Punkt eines ebenen Rechteckes H und δ_1 der um ihn gelegte Bereich, den ich der Einfachheit halber als Quadrat annehme, so gehört zu jedem Punkt a_2 auf dem Umfang von δ_1 ebenfalls ein solches Quadrat δ_1', und aus dem eben bewiesenen Satz folgt, dafs es eine endliche Zahl von Quadraten giebt, so dafs zunächst alle Punkte a_2 auf dem Umfang von δ_1 innere Punkte eines dieser Quadrate werden. Es giebt daher jedenfalls auch ein Quadrat δ_2, das δ_1 umschliefst, so dafs alle Punkte innerhalb und auf dem Umfang von δ_2 durch eine endliche Zahl von Quadraten bedeckt sind. Zu ihm giebt es ein analoges Quadrat δ_3 u. s. w., und der Beweis geht nun in analoger Weise weiter fort, wie der obige. Auch hier mufs zu jedem Punkt des Umfangs von H ebenfalls ein Bereich δ gehören.

6. Der eben bewiesene Satz liefert den einfachsten Beweisgrund für das folgende Theorem:

VI. Die Gesamtheit der Werte, die eine analytische Function in einem inneren Punkte ihres Convergenzgebietes annimmt, ist abzählbar oder endlich.

Diesen Satz hat zuerst Vivanti bewiesen, in Folge einer von Cantor an ihn ergangenen Aufforderung[2]), bald darauf haben auch Poincaré[3]) und Volterra[4]) einen Beweis dafür gegeben. Der Poincaré'sche Beweis stützt sich in erster Linie darauf, dafs man für die Bestimmung eines im Punkte ξ vorhandenen Functionswertes immer ein Functionselement wählen kann, dessen Mittelpunkt ein rationaler Punkt ist. Der eben bewiesene Satz sagt nun aus, dafs man, um von dem ursprünglichen Functionselement zu irgend einem daraus abgeleiteten zu gelangen, stets mit einer endlichen Zahl von Zwischenpunkten ausreicht. Ist daher r ein rationaler

1) Vgl. hierzu auch Thomae, Elementare Theorie, S. 29 (1880).
2) Rend. Palermo 2, S. 135 u. 150 (1888) und Zeitschr. f. Math. 34, S. 382.
3) Rend. Palermo 2, S. 197.
4) Rend. Linc. (4) 4, S. 355.

Punkt, so ist die Menge der ihm zugehörigen Functionselemente notwendig abzählbar, und da die Menge $R = \{r\}$ ebenfalls abzählbar ist, so ist damit gemäfs S. 11 der Satz bewiesen.

Nach einer Bemerkung von Borel[1]) gilt der Satz übrigens nicht mehr für die Werte auf der Grenze des Convergenzgebietes, falls solche überall existiren resp. definirbar sind. Für diese ist nämlich der bezügliche Wert immer nur als Grenze einer unendlichen Folge definirbar, und die Gesamtheit aller dieser Fundamentalreihen ist nicht mehr abzählbar.

Vivanti und Volterra haben an den obigen Satz noch einige weitergehende Folgerungen geknüpft. Volterra hat darauf hingewiesen, dafs auch die Menge der Verzweigungspunkte und der Convergenzgebiete einer analytischen Function abzählbar ist; Vivanti dagegen hat den Versuch gemacht, die mehrwertigen Functionen ganz allgemein nach ihrer Mächtigkeit in Klassen zu teilen. Sein Hauptresultat lautet, dafs falls y als Function von x für jedes x höchstens eine abzählbare Menge von Werten besitzt, dies auch für x als Function von y der Fall ist.

7. Die transfiniten Zahlen treten endlich auch bei einem Problem der elementaren Analysis auf, nämlich bei der Vergleichung von Grenzwerten, denen reelle Functionen zustreben, die über alle Grenzen wachsen[2]). Die allgemeine Theorie der einschlägigen Fragen ist von P. du Bois-Reymond dargestellt worden[3]). Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei monoton mit x ins Unbegrenzte wachsende Functionen, und hat für $\lim x = \infty$ der Quotient $f(x) : \varphi(x)$ einen endlichen Grenzwert, oder aber den Grenzwert ∞ oder 0, so sagt du Bois, $f(x)$ und $\varphi(x)$ haben gleiches Unendlich, oder aber $f(x)$ hat gröfseres, resp. kleineres Unendlich als $\varphi(x)$, was durch

$$f \sim \varphi,\ f \succ \varphi,\ \text{resp. } f \prec \varphi$$

ausgedrückt wird. Es ist damit natürlich nicht gesagt, dafs sich für irgend zwei monoton ins Unendliche wachsende Functionen ein fester Grenzwert dieser Art immer ergiebt[4]).

Sei jetzt F eine Klasse von Functionen $f(x)$, für die eine der drei genannten Beziehungen erfüllt ist, und dies möge auch der Fall sein, wenn wir irgend eine dieser Functionen mit x selbst vergleichen.

---

1) Leçons etc., S. 56.

2) Die Function e^x wird von höherer Ordnung unendlich als jede Potenz x^ν; soll also diese Ordnung durch ein Symbol dargestellt werden, so bedarf man eines solchen, das gröfser ist als jedes ν, genau wie es für ω der Fall ist.

3) Journ. f. Math. 74, S. 294, Math. Ann. 8, S. 363 ff. und 11, S. 149 ff. Man vgl. auch die analogen Untersuchungen von Stolz, Vorlesungen über Arithmetik 1, S. 205 ff.

4) Vgl. Stolz in Math. Ann. 14, S. 232.

Falls wir den Grenzwert von $f(x): x$ als das zu $f(x)$ gehörige Unendlich $Uf(x)$ bezeichnen, so bestehen folgende Sätze:

1) Aus den Relationen

$$Uf(x) \sim U\varphi(x), \quad Uf(x) \gtrless U\varphi(x)$$

folgen die obenstehenden Relationen und umgekehrt.

2) Die Unendlich besitzen Gröſsencharakter; sie lassen sich also der Gröſse nach in eine einfach geordnete Reihe bringen, die übrigens, wie wir sofort erweisen werden, keineswegs eine wohlgeordnete Menge zu sein braucht.

3) Für jede abzählbare Menge von Functionen $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \prec \cdots$ mit wachsenden Unendlich giebt es Functionen ψ, so daſs für jedes ν $\psi \succ \varphi_\nu$ ist. Es giebt also kein oberstes Unendlich.

Um den letzten Satz zu beweisen, bilde man eine Reihe von Functionen

$$\psi_1(x), \ \psi_2(x) \cdots\cdots \psi_\nu(x) \cdots,$$

so daſs für jeden Wert von x der Wert von $\psi_\nu(x)$ gleich oder gröſser ist als der Wert von $\varphi_\nu(x)$ und von $\psi_1(x), \psi_2(x) \cdots \psi_{\nu-1}(x)$, und daſs von einem bestimmten Wert x_ν an $\psi_\nu(x)$ mit $\varphi_\nu(x)$ übereinstimmt. Nachdem dies geschehen, definire man eine Function $\psi(x)$ durch die Bedingung, daſs für jedes ganzzahlige ν

$$\psi(\nu) = \psi_\nu(\nu)$$

ist, und daſs für $\nu < x < \nu + 1$ die Function monoton (also beispielsweise linear) zunimmt. Diese Function hat dann in der That die Eigenschaft, daſs für jedes μ der Quotient $\psi(x): \psi_\mu(x)$ den Grenzwert Unendlich besitzt.

Der hiermit bewiesene Satz stellt ein Analogon zu dem zweiten Erzeugungsprincip Cantor's dar und hat vielleicht als Ausgangspunkt für die Cantor'sche Ideenbildung gedient. Doch ist die Analogie zwischen den Unendlich und den Zahlen Cantor's nur eine scheinbare, und dies selbst dann, wenn man sich auf solche Functionsklassen beschränkt, deren Unendlichwerte als ganzzahlig betrachtet werden können.

Da nämlich jedes φ eine monoton zunehmende Function ist, so ist auch die zu φ inverse Function χ eine Function der gleichen Art wie φ, und besitzt daher ebenfalls ein bestimmtes Unendlich. Es gilt nun der Satz:

VII. Für eine Functionsklasse Φ, die zu jeder Function φ auch ihre inverse Function enthält, bilden die zugehörigen Unendlich keine wohlgeordnete Menge.

Bilden nämlich die Functionen

$$\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \cdots \prec \varphi_\nu \prec \cdots$$

eine Menge vom Typus ω, so bilden die Functionen

$$\chi_1 \succ \chi_2 \succ \chi_3 \cdots \succ \chi_\nu \succ \cdots$$

eine Menge vom inversen Typus $^*\omega$, während solche Mengen in der Gesamtheit der Ordnungszahlen gerade ausgeschlossen sind. Es folgt noch nebenbei, dafs ein zum Satz 3) analoger Satz für jede Reihe vom Typus $^*\omega$ gilt, so dafs es auch eine Function $\vartheta(x)$ giebt, die kleineres Unendlich besitzt, wie jedes χ_ν. Der eben bewiesene Satz deckt sich übrigens mit dem zweiten von du Bois für Φ als charakteristisch hingestellten Satz, der wie folgt lautet:

VIII. Ist $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \prec \cdots$ eine Reihe vom Typus ω, und ist $\psi \succ \varphi_\lambda$ für jedes λ, so giebt es keine erste Function ψ dieser Art, vielmehr giebt es für jedes ψ eine Function ψ', so dafs $\psi \succ \psi' \succ \psi_\lambda$ für jedes λ ist[1]).

Man braucht nämlich nur die Reihe

$$\frac{\psi}{\varphi_1} \succ \frac{\psi}{\varphi_2} \succ \frac{\psi}{\varphi_3} \succ \cdots$$

zu betrachten, die eine Menge vom Typus $^*\omega$ darstellt. Falls nun eine erste Function ψ dieser Art existirte, so müfsten die Unendlich der vorstehenden Reihe unter jedes Mafs sinken, und ebenso die Unendlich der inversen Functionen über jedes Mafs wachsen, was dem Satz 3) widerspricht; womit der Satz erwiesen ist.

Die vorstehenden Sätze gelten übrigens auch für die Gesamtheit aller Functionen, die ein bestimmtes Unendlich besitzen[2]).

Die der Gröfse nach geordnete Menge M der Unendlich aller Functionen $\varphi(x)$, für die ein bestimmtes Unendlich existirt, hat mit der wohlgeordneten Menge der Zahlen der zweiten Klasse nur die eine Eigenschaft gemein, dafs auf beide das zweite Erzeugungsprincip anwendbar ist. Im übrigen hat der Ordnungstypus μ von M, wie derjenige des Continuums die Eigenschaft, dafs das Unendlich f einer beliebigen Function $f(x)$ sowohl durch eine Reihe zu-

1) Du Bois führt als Beispiel die Reihe

$$x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{2}{3}}, \cdots\ x^{\frac{p}{p+1}} \cdots \text{ und } \psi' = x^{\frac{lx}{lx+1}}$$

an; die Reihe nähert sich unbegrenzt der Function $\psi = x$, und es ist das Unendlich von x gröfser als das der Function ψ'. Math. Ann. 11, S. 153.

2) Das einfachste Beispiel einer Klasse Φ bilden übrigens diejenigen Functionen, die aus

$$x,\ E_1(x) = e^x,\ E_2(x) = e^{E_1(x)} \cdots,\ L_1(x) = \lg x,\ L_2(x) = \lg L_1(x) \cdots$$

durch Multiplication und fortgesetzte Iteration gebildet sind. Die Unendlich dieser Functionen finden bekanntlich in der Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen sowie bei den Werten uneigentlicher Integrale wichtige Anwendung. Vgl. für das letzte: Dini, Grundlagen etc., S. 485.

nehmender Unendlich, wie durch eine Reihe abnehmender Unendlich approximirt werden kann. Es besagt nun aber der Satz 5), dafs auch zwischen M und dem Continuum ein sehr wesentlicher Unterschied besteht. Beim Continuum giebt es nämlich zu einer Fundamentalreihe von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \cdots$ eine bestimmte Zahl a', so dafs a' die kleinste aller Zahlen ist, die gröfser ist als jedes a_ν, während dagegen ein kleinstes Unendlich dieser Art nicht existirt[1]).

Der du Bois'sche Begriff des Unendlich enthält übrigens insofern ein willkürliches Element, als er von derjenigen Function abhängt, der man das Unendlichkeitssymbol 1 beilegt. Er enthält aber, wie Pincherle[2]) bemerkt hat, noch eine zweite Willkür. Davon ausgehend, dafs mit $f(x)$ auch $\log f(x)$ monoton ins Unendliche wächst, kann man auch folgende Definition aufstellen. Sei $F(x)$ irgend eine Function, die mit x monoton ins Unendliche wächst, so betrachte man die Differenz

$$\delta(x) = Ff(x) - F\varphi(x)$$

und definire

$$f \succ \varphi, \; f \sim \varphi, \; f \prec \varphi,$$

je nachdem diese Differenz für $\lim x = \infty$ positiv, Null oder negativ ist. Auch diese Definition genügt den sämtlichen oben ausgesprochenen Sätzen. Es besteht aber nun der bemerkenswerte Satz, dafs die Gröfsenbeziehung zwischen dem Unendlich von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bei verschiedener Wahl der Function $F(x)$ auch verschieden ausfallen kann. Es folgt daraus noch beiläufig, dafs im System der du Bois'schen Unendlich, falls $f \sim \varphi$ ist, nicht immer $F(f) \sim F(\varphi)$ zu sein braucht.

Ich erwähne zum Schlufs den Satz:

Die Mächtigkeit $\mathfrak{u}$ aller Unendlich ist gleich der des Continuums.

Erstens giebt es nämlich eine Teilmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, nämlich die Unendlich aller Functionen x^a, wo a irgend eine reelle Zahl ist. Da ferner das Unendlich einer jeden unstetigen Function dem einer gewissen stetigen Function gleich ist, so folgt daraus, dafs $\mathfrak{u} = \mathfrak{c}$ ist[3]).

---

1) Auf die hier angedeutete Verschiedenheit zwischen dem Zahlencontinuum und dem Ordnungstypus der Menge U komme ich im geometrischen Teil, in Verbindung mit dem Axiom des Archimedes, näher zurück. Nur das eine bemerke ich bereits, dafs du Bois' infinitäre Pantachie für die Menge U den der projectiven Geometrie entstammenden Begriff der unendlich fernen Geraden benutzt, der dem vorliegenden Gegenstand durchaus fremd ist. Die Auffassungen des Unendlichen sind für die einzelnen mathematischen Disciplinen durchaus verschieden.

2) Mem. di Bologna (4) 5 (1885), S. 739.

3) Borel, Leçons etc. S. 119.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Punktmengen.

Erstes Capitel.

Allgemeine Sätze über Punktmengen.

Die Lehre von den Punktmengen ruht teils auf arithmetischer, teils auf geometrischer Grundlage. Aufser der Mächtigkeit sind auch alle diejenigen formalen Begriffe arithmetischer Natur, die bereits in der Mengenlehre auftreten, und die wir als allgemeine Eigenschaften der Ordnungstypen geordneter Mengen kennen gelernt haben. Ihnen allen werden wir auch bei den Punktmengen wieder begegnen. Auf geometrischer Grundlage dagegen ruht der specifische Inhalt, den diese Begriffe dadurch erhalten, dafs die Punktmengen Bestandteile eines stetig ausgedehnten Raumes sind und daher an allen Eigenschaften Teil haben, die der empirisch gegebene geometrische Stetigkeitsbegriff resp. die im Raum mögliche Mafsbestimmung besitzt. (4, 5.)

Historisch liegen die Dinge so, dafs die Eigenschaften der Punktmengen den eigentlichen Anstofs zur theoretischen Ausgestaltung der Mengenlehre gegeben haben; insbesondere war es die Verteilung der Unstetigkeitspunkte einer Function, sowie anderer Punkte singulären Charakters, die hierzu die Veranlassung bieten mufste. Speciell ist Cantor selbst von dem Problem ausgegangen, die Eindeutigkeit der Coefficienten einer trigonometrischen Reihe auch für den Fall zu beweisen, dafs die Convergenz in unendlich vielen Punkten eines Intervalles aufhört. Er und P. du Bois-Reymond[1]) erkannten wohl zuerst, dafs die tiefere Analyse dieser Mengen es nahe legte, Grenzpunkte höherer Ordnung zu betrachten; du Bois gelangte sogar schon zur Idee eines Grenzpunktes unendlich hoher Ordnung[2]). Die methodische Betrachtung knüpft aber auch auf diesem Gebiet an Cantor an, resp. an den von ihm eingeführten Begriff der Ableitung[3]), der aus allen Grenzpunkten einer Punktmenge besteht und selbst wieder als Punktmenge aufgefafst wird. (2.)

Von den Resultaten der allgemeinen Mengenlehre ist es die oben S. 14 als möglich erkannte Menge M_ω, der auf dem Gebiet der Punktmengen eine grundlegende Bedeutung zukommt. Ist P

1) Journal f. Math. Bd. 79, S. 30 (1874).
2) Vgl. Math. Ann. Bd. 16, S. 128, Anmerkung.
3) Dieser Begriff wurde von Cantor 1872 eingeführt; vgl. Math. Ann. 5, S. 128 (1872).

eine beliebige Punktmenge, P_1 eine Teilmenge von P, ebenso P_2 eine Teilmenge von P_1 u. s. w., so ist es die durch die Gleichung

$$P_\omega = \mathfrak{D}(P, P_1, P_2, \cdots P_\nu, \cdots) = \mathfrak{D}\{P_\nu\}$$

definirte Menge, wo jedes $P_{\nu+1}$ eine Teilmenge von P_ν ist[1]) (1). Die Einführung dieser Menge sowie der aus ihr möglicherweise fliefsenden Teilmengen (3)

$$P_{\omega+1}, \; P_{\omega+2}, \cdots\cdots P_{\omega+\nu}, \cdots\cdots P_\alpha$$

ist es, die die feineren und tiefer liegenden Eigenschaften der Punktmengen ins Licht zu setzen gestattet hat[2]); hier ist die Stelle, wo die transfiniten Zahlen zum ersten Mal als ein durch die Natur der Dinge gefordertes objectives Hilfsmittel der mathematischen Forschung in die Erscheinung traten. Es ist das bleibende Verdienst Cantor's, in der Weiterbildung dieser Ideen ohne Scheu vor ihrer scheinbaren Paradoxie vorangegangen zu sein und dadurch die mathematische Denkweise um wichtige Begriffe und neue Methoden bereichert zu haben. Zuerst stark befehdet, haben seine Schöpfungen bewiesen, dafs sie für die wichtigsten Teile der Analysis und Geometrie ein ebenso notwendiges wie erfolgreiches Instrument darstellen.

1. Erscheint die Existenz der eben genannten Menge P_ω zunächst wieder nur als logisch möglich, so giebt es einen sehr allgemeinen Fall, in dem man im stande ist, ihre wirkliche Existenz in aller Form darzuthun, vorausgesetzt natürlich, dafs jedes P_ν aus unendlich vielen Punkten besteht. Nach einem bekannten Satz existirt für eine jede aus unendlich vielen Punkten eines C_ν bestehende Punktmenge P mindestens eine Stelle im C_ν, in deren Umgebung immer noch beliebig viele Punkte der Menge liegen. Diese Stelle, die man Grenzpunkt, Häufungspunkt, Verdichtungspunkt nennt, braucht der Menge P an und für sich nicht anzugehören. Wir wollen aber eine Punktmenge als abgeschlossen bezeichnen, falls jede ihrer Grenzstellen zu ihr gehört[3]), und beweisen nun folgenden Satz:

I. Bilden die abgeschlossenen Punktmengen P_1, P_2, $P_3, \cdots$ eine solche Reihe, dafs jedes $P_{\nu+1}$ in P_ν enthalten ist, so giebt es stets Punkte, die allen P_ν angehören.

---

1) Ein einfaches Beispiel ist das folgende. Sei

$$P = (1, \, {}^1\!/_2, \, {}^1\!/_3 \cdots\cdots 0), \quad P_\nu = (\tfrac{1}{\nu+1}, \, \tfrac{1}{\nu+2}, \, \cdots\cdots 0),$$

so existirt P_ω und besteht aus dem Nullpunkt. Wird dieser Nullpunkt aus P und somit aus allen Mengen P_ν getilgt, so existirt ein P_ω nicht.

2) Diese Einführung geschah in Math. Ann. 17, S. 357 ff. (1880).

3) In Übereinstimmung mit der Definition auf S. 32.

Sei nämlich p_1 ein Punkt von P_1, p_2 ein solcher von P_2 u. s. w., so wird auf diese Weise eine Punktmenge

$$\{p_\nu\} = p_1, p_2, p_3, \cdots p_\nu, \cdots\cdots$$

definirt, deren sämtliche Punkte P_1 angehören. Diese Menge besitzt mindestens einen Grenzpunkt p_ω, der, da P_1 abgeschlossen ist, ebenfalls P_1 angehört. Dieser Grenzpunkt gehört aber auch jedem P_ν an, denn er ist auch Grenzpunkt der Menge

$$p_\nu, p_{\nu+1}, p_{\nu+2}, \cdots\cdots,$$

deren sämtliche Punkte Punkte von P_ν sind. Damit ist die Existenz von Punkten, die allen P_ν angehören, nachgewiesen.

2. Nun sei P irgend eine aus unendlich vielen Punkten des C_ν bestehende Menge, so bilden auch ihre Grenzpunkte, gleichgültig ob sie der Menge P angehören oder nicht, eine Punktmenge; diese ist es, die Cantor Ableitung[1]) von P genannt und durch P' bezeichnet hat[2]). Enthält P' unendlich viele Punkte, so kann man auch für sie die Ableitung bilden; sie heifst die zweite Ableitung P'' von P. Während P' Punkte enthalten kann, die P nicht angehören[3]), ist dies für P'' in Bezug auf P' nicht der Fall. Es besteht nämlich der wichtige Satz:

II. Alle Punkte der zweiten Ableitung P'' gehören auch der ersten Ableitung P' an.

Ist nämlich p'' Punkt von P'', so liegen in seiner Umgebung unendlich viele Punkte p'; da aber in jeder Nähe jedes p' wieder Punkte p von P selbst liegen, so ist p'' auch Grenzpunkt von P.

Während also beim Fortgang von P zu P' neue Punkte auftreten können, gehen beim Fortgang von P' zu P'' höchstens Punkte verloren. Enthält nun auch P'' unendlich viele Punkte, so läfst sich der Procefs des Ableitens weiter fortsetzen. Es ergeben sich so die Ableitungen P', P'', P''', $\cdots$ $P^{(\nu)}$, und immer besteht der Satz, dafs alle Punkte von $P^{(\nu+1)}$ auch Punkte von $P^{(\nu)}$ sind. Jede dieser Ableitungen ist daher eine abgeschlossene Menge. Nun sind bei diesem fortgesetzten Ableitungsprocefs nur zwei Fälle möglich. Entweder wir gelangen einmal zu einer Ableitung $P^{(\nu)}$, die nur eine endliche Anzahl von Punkten enthält, dann enthält $P^{(\nu+1)}$ keinen Punkt mehr, was wir durch

---

1) Math. Ann. 5, S. 128 (1872).

2) Es kann vorkommen, dafs für einen Grenzpunkt nur links oder rechts Punkte von P existiren. Man kann demgemäfs eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung unterscheiden und damit weiteroperiren. In dieser Weise haben Peano und seine Schüler, besonders Burali-Forti die Sätze über Punktmengen darzustellen begonnen, ohne dafs jedoch Resultate vorliegen, die über diejenigen Cantor's wesentlich hinausgingen. Vgl. z. B. das Peano'sche Vocabulario.

3) So besteht z. B. die Ableitung der Menge aller rationalen Punkte eines Intervalls aus allen Punkten derselben.

$$P^{(\nu+1)} = 0$$

ausdrücken wollen. Mengen dieser Art sind als Mengen erster Gattung und ν-ter Art bezeichnet worden[1]). Oder aber es besteht jedes $P^{(\nu)}$ aus unendlich vielen Punkten. Alsdann erfüllt aber die Reihe der Ableitungen

$$P', P'', P''', \cdots P^{(\nu)}, \cdots$$

die Bedingungen des obigen Satzes, und es giebt daher eine ihnen allen gemeinsame Menge, die wir als ω-te Ableitung $P^{(\omega)}$ bezeichnen[2]); es ist also

$$P^{(\omega)} = \mathfrak{D}\,(P', P'', P'''; \cdots) = \mathfrak{D}\,\{P^{(\nu)}\}.$$

Wir werden sehr bald Beispiele von Punktmengen aufstellen, für die $P^{(\omega)}$ existirt, insbesondere sogar solche, für die $P^{(\omega)}$ selbst wieder aus unendlich vielen Punkten besteht. In diesem Fall läfst sich zeigen, dafs auch $P^{(\omega)}$ ihre sämtlichen Grenzpunkte enthält. Sind nämlich $q_1, q_2, q_3, \cdots$ Punkte von $P^{(\omega)}$, und ist q_ω ihr Grenzpunkt, so gehören gemäfs der Definition von $P^{(\omega)}$ die Punkte $q_1, q_2, q_3, \cdots$ auch jeder Menge $P^{(\nu)}$ an. Es gehört daher auch q_ω jedem $P^{(\nu)}$ und damit auch $P^{(\omega)}$ an. Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

III. Enthält jede der Ableitungen $P', P'', \cdots$ unendlich viele Punkte, so giebt es stets mindestens einen Punkt, der allen diesen Ableitungen gemeinsam ist. Die Gesamtheit aller dieser Punkte bildet die Ableitung $P^{(\omega)}$, die ebenfalls jeden ihrer Grenzpunkte enthält.

3. Auf Grund dieses Satzes ergiebt sich sofort eine unbegrenzte Perspective für die Fortsetzung des Ableitungsprocesses; man gelangt so zu einer fortschreitenden Reihe von Ableitungen, deren Indices die transfiniten Ordnungszahlen sind. Es beruht dies darauf, dafs der Satz, wonach jede Ableitung, die unendlich viele Punkte enthält, eine abgeschlossene Menge ist, sowohl den Schlufs von ν auf $\nu+1$, wie auch den Schlufs von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω zuläfst. Ist nämlich $P^{(\alpha)}$ abgeschlossen, so ist dies nach dem obigen auch für $P^{(\alpha+1)}$ der Fall, falls $P^{(\alpha+1)}$ aus unendlich vielen Punkten besteht. Ist andererseits jede der Ableitungen

$$P^{(\alpha)}, P^{(\alpha_1)}, P^{(\alpha_2)} \cdots\cdots P^{(\alpha_\nu)}, \cdots\cdots$$

abgeschlossen und in der vorhergehenden enthalten, so folgt genau wie oben, dafs es erstens Punkte giebt, die allen diesen Ableitungen gemeinsam sind, dafs sie zweitens, falls es unendlich viele Punkte

1) Vgl. Cantor in Math. Ann. 5, S. 129, sowie Dini, Grundlagen etc., S. 23.

2) Die Menge $P^{(\omega)}$ erscheint bei Cantor zuerst in Math. Ann. 17, S. 357, vgl. auch Cap. V dieses Abschnitts.

sind, eine abgeschlossene Menge $P^{(\beta)}$ bilden, und dafs endlich $\beta = \alpha_\omega$ ist. Wir sprechen dies noch folgendermafsen als Satz aus:

IV. Bilden die Ordnungszahlen $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \cdots\cdot$ eine Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$, und enthält jede Ableitung $P^{(\alpha_\nu)}$ unendlich viele Punkte, so giebt es mindestens einen Punkt, der allen diesen Ableitungen gemeinsam ist. Die Gesamtheit aller dieser Punkte bildet eine Ableitung $P^{(\beta)}$, die ebenfalls abgeschlossen ist, und zwar ist β die Limeszahl der Reihe $\{\alpha_\nu\}$. Es ist also

$$P^{(\beta)} = \mathfrak{D}\left(P^{(\alpha_1)}, P^{(\alpha_2)}, P^{(\alpha_3)}, \ldots\right) = \mathfrak{D}\{P^{(\alpha_\nu)}\}.$$

Betrachten wir endlich die sämtlichen Ableitungen, deren Ordnungen die Zahlen der zweiten Zahlklasse sind, also

$$P, P', P'', \ldots P^{(\omega)}, \ldots . P^{(\alpha)}, \ldots . .$$

Sind sie alle von Null verschieden, so folgt auf die gleiche Art, dafs es Punkte giebt, die ihnen allen gemeinsam sind; wir nennen ihre Gesamtheit mit Cantor P^{Ω}, und es enthält auch P^{Ω} die sämtlichen Grenzpunkte. Umgekehrt folgt daraus sofort, dafs, falls $P^{\Omega} = 0$ ist, nicht alle $P^{(\alpha)}$ von Null verschieden sein können[1]. Es giebt dann notwendig eine erste Ableitung, die Null ist. Aus den vorstehenden Sätzen folgt noch weiter, dafs die zugehörige Ordnungszahl keine Limeszahl sein kann. Denn wäre $P^{(\beta)}$ die erste Ableitung, die Null ist, und $\beta = \operatorname{Lim} \alpha_\nu$, so müfste $P^{(\alpha_\nu)}$ für jedes α_ν von Null verschieden sein, und das gleiche folgte daher für $P^{(\beta)}$. Wir erhalten also:

V. Ist $P^{(\alpha)}$ die erste Ableitung, die Null ist, so ist α keine Limeszahl.

Ist $P^{\Omega} = 0$, so giebt es auch bereits eine Ableitung $P^{(\alpha)}$, die Null ist.

Ich erwähne endlich noch einige formale Sätze über Ableitungen, deren wir später bedürfen. Wird die Menge P in P_1 und P_2 zerlegt, so ist jeder Punkt von P', der nicht Grenzpunkt von P_1 ist, notwendig Grenzpunkt von P_2, und umgekehrt. Es besteht also der Satz[2]:

$$\text{Ist } P = P_1 + P_2, \text{ so ist } P' = \mathfrak{M}(P_1' + P_2').$$

Dieser Satz gilt auch, falls P in eine beliebige endliche Zahl von Teilmengen zerspalten wird. Ist dagegen die Zahl der Teilmengen überendlich, so gilt er nicht mehr. Alsdann kann es nämlich Grenzpunkte p' geben, zu Punktfolgen gehörig, die Punkte eines jeden P_ν enthalten. Bezeichnen wir die Gesamtheit aller dieser Punkte p' durch P_ω, so folgt:

---

1) Auch dieser Schlufs beruht auf der S. 14 erwähnten Antithese.

2) Für die Bezeichnung vgl. man S. 6.

VI. Besteht P aus unendlich vielen verschiedenen Teilmengen P_ν, d. h. ist $P = \{P_\nu\} = \Sigma P_\nu$, so ist[1])

$$P' = \mathfrak{M}(\Sigma P'_\nu + P_\omega).$$

Es bedarf wohl kaum des besonderen Hinweises, dafs die vorstehenden Sätze, die wir für Ableitungen ausgesprochen haben, ebenso für jede Art von abgeschlossenen Mengen gelten, die den Bedingungen von Satz I genügen; ist ja dieser Satz die ausschliefsliche Quelle der abgeleiteten Resultate. Wir erkennen also die allgemeine Möglichkeit einer Reihe abgeschlossener Mengen

$$P_1,\ P_2,\ P_3, \cdots P_\omega,\ P_{\omega+1}, \cdots P_{\omega^2}, \cdots P_\alpha, \cdots P_\Omega,$$

deren jede eine Teilmenge aller vorhergehenden ist. Insbesondere gilt also auch in diesem Fall, dafs, falls $P_\Omega = 0$ ist, bereits eine erste Menge P_α existirt, die Null ist, wo α keine Limeszahl sein kann[2]).

4. Ein Punkt p einer Punktmenge P, der kein Grenzpunkt ist, heifst isolirter Punkt; jeder Punkt einer Menge ist also entweder Grenzpunkt oder isolirter Punkt, und wir setzen

$$P = P_i + P_g,$$

wo P_i die isolirten Punkte P enthält und P_g die übrigen Punkte[3]). Alle Punkte der Menge P_g sind Grenzpunkte und daher zugleich Punkte von P', es kann aber P' noch andere Punkte enthalten, als die von P_g. Nach dem Verhältnis von P_g und P_i zu P und P' sind die Mengen von Cantor mit Namen belegt worden[4]). Ist zunächst $P_g = 0$, also $P = P_i$, so heifst P eine isolirte Menge; ist $P_g = P'$, so dafs die Menge jeden ihrer Grenzpunkte enthält, so heifst sie, wie bereits oben S. 58 angegeben, abgeschlossen. Ist $P_i = 0$, so heifst die Menge in sich dicht, es ist alsdann jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt. Ist endlich $P_i = 0$ und $P_g = P'$, also $P = P'$, so heifst die Menge perfect[5]); sie ist alsdann ab-

1) Besteht z. B. P_1 aus dem Punkt 1, P_2 aus dem Punkt $1/2$, ebenso P_ν aus dem Punkt $\frac{1}{\nu}$, so ist jedes $P_\nu' = 0$, während sich für P_ω der Nullpunkt ergiebt.

2) Vgl. O. Baire in Ann. di mat. (3) Bd. 3, S. 50.

3) Vgl. auch S. 71.

4) Vgl. Math. Ann. 21, S. 52; 21, S. 575; 23, S. 470 ff. Ein Beispiel einer isolirten Menge liefert

$$P = \left(1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3}, \cdots\right) = \left\{\tfrac{1}{n}\right\},$$

falls diese Menge den Nullpunkt nicht enthält, während sie abgeschlossen wird, sobald man den Nullpunkt hinzufügt.

5) Jordan (Cours etc. 1, S. 19) gebraucht das Wort parfait, wo Cantor abgeschlossen sagt; Borel unterscheidet relativement parfait und absolument parfait (Leçons etc., S. 36).

geschlossen und in sich dicht. Sie kann auch so definirt werden, dafs sie mit ihrer Ableitung identisch ist.

Die rationalen Punkte eines Intervalls oder Gebiets bilden z. B. eine in sich dichte Menge, die aber nicht perfect ist, dagegen stellt jedes Continuum eine perfecte Menge dar. Man erkennt auch leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze:

VII. Ist die Menge P perfect, also $P = P'$, so ist auch $P' = P''$ u. s. w.

Die Ableitung einer in sich dichten, nicht perfecten Menge ist perfect[1]).

Nur der letzte Satz bedarf eines Beweises. Ist die Menge P in sich dicht, so ist sie Teilmenge von P'; es ist also jeder Punkt von P' auch Punkt von P''. Andererseits ist aber jeder Punkt von P'' auch Punkt von P', und daraus folgt, dafs $P' = P''$ ist.

Eine letzte geometrische Eigenschaft, die für Punktmengen in Betracht kommt, ist die Art, wie sie einen Bereich H erfüllen. Eine Punktmenge P heifst nämlich in einem Bereich H überall dicht[2]), falls in jedem Teilbereich von H Punkte der Menge enthalten sind; sie heifst nirgends dicht in H, falls keine Teilmenge von P überall dicht bezüglich H ist, so dafs es in jedem Teilbereich von H Bereiche H' giebt, deren Inneres von Punkten der Menge frei ist. Eine überall dichte Punktmenge ist auch in sich dicht, während das umgekehrte nicht der Fall zu sein braucht. Zerfällt die Menge P in die Teilmengen P_1 und P_2, so heifsen sie Complementärmengen bezüglich P.

Die überall dichten Mengen haben eine einfache Eigenschaft, die ich noch anführe; für sie besteht der Satz:

VIII. Ist eine Punktmenge in einem Bereich H überall dicht, so besteht ihre Ableitung aus allen Punkten von H.

Man kann diese Eigenschaft übrigens auch als Definition der überall dichten Mengen benutzen[3]).

5. Wie bereits S. 57 bemerkt, sind die vorstehenden Definitionen in voller Übereinstimmung mit denjenigen, die wir früher für die Ordnungstypen einfach geordneter Mengen ausführlich dargelegt haben, und die auch auf Ordnungstypen mehrfach geordneter Mengen übertragbar sind. Sie bestätigen die oben (S. 32) gemachten Ausführungen über den arithmetischen Charakter dieser Begriffe; diejenigen, die für Punktmengen gelten, erscheinen als specieller Fall der allgemeineren, in ihrer Eigenart bedingt durch die Natur des stetigen Raumes. Um diese Analogie, sowie aber auch den Unterschied zwischen den Ordnungstypen und den Punktmengen noch weiter

1) Math. Ann. 23, S. 471.

2) Diese Bezeichnung erscheint bei Cantor zuerst in Math. Ann. 15, S. 2 (1879); du Bois sagt pantachisch, vgl. Math. Ann. 15, S. 287.

3) So verfährt z. B. R. Baire, Ann. d. mat. (3) 3, S. 29.

aufzuhellen, weise ich auf eine Thatsache hin, der zuerst Harnack Ausdruck gegeben hat[1]). Man kann das Linearcontinuum auf eine nirgends dichte Menge einer Geraden so abbilden, daſs beide Mengen ähnlich geordnet sind. Zu einer solchen Abbildung gelangt man übrigens am einfachsten, indem man von der Decimalbruchdarstellung jeder Zahl ausgeht und den einzelnen Stellen gewisse Beschränkungen auferlegt[2]); beispielsweise auch so, daſs man jeden Punkt p der Einheitsstrecke durch einen dyadischen Bruch

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_\nu \cdots \quad a_\iota = 0 \text{ oder } 1$$

darstellt (vgl. S. 24) und diesen Bruch alsdann im Decimalsystem liest; er stellt dann eine Zahl y dar, der ein Punkt q einer zweiten Einheitsstrecke entspricht[3]). Falls nun jeder Bruch x eine unendliche Zahl von Einsen enthält, so wird ein jeder Punkt p genau einmal dargestellt, und wir erhalten in der Menge $Q = \{q\}$ ein Abbild des Continuums von der angegebenen Art. Die Menge Q ist als Punktmenge des stetigen Raumes nicht perfect; ihr Ordnungstypus dagegen ist wohl perfect, da ja ähnliche Mengen den gleichen Ordnungstypus besitzen. So ist z. B. die Strecke 0,011 ⋯ bis 0,1 von Punkten von Q frei, und zwar gehört der linke Endpunkt der Menge Q an, der rechte jedoch nicht, während in jeder Nähe rechts von 0,1 Punkte von Q liegen, so daſs der Punkt 0,1 ein Grenzpunkt von Q ist. Für die Menge Q erscheint überdies der Punkt 0,0111 ⋯ nur als einseitiger Grenzpunkt, für den Ordnungstypus dagegen liefert er ein beiderseitiges Grenzelement, da zwischen ihm und jedem rechts von ihm gelegenen Punkt immer noch andere Punkte liegen, die der Menge Q angehören.

Die nämliche Abbildung läſst sich für die Punkte einer Fläche oder eines begrenzten Raumteils durchführen und würde hier in analoger Weise die Analogie und zugleich den Unterschied zwischen den Punktmengen und den bezüglichen Ordnungstypen erläutern.

In dieser Hinsicht bemerke ich endlich, daſs R. Baire die obigen allgemeinen Begriffe kürzlich auch auf Mengen geordneter Mengen ausgedehnt hat, die endlich oder vom Typus ω sind. Sind

$$E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots E_\nu, \cdots$$

Mengen dieser Art, so daſs jedes $E_{\nu+1}$ mit E_ν in den ersten ν Elementen übereinstimmt, so wird die Menge E Grenzelement aller $\{E_\nu\}$ genannt, falls E mit jedem E_ν in mindestens den ersten ν Elementen übereinstimmt. Infolge dieser Begriffsbestimmung

1) Math. Ann. 23, S. 285.

2) Gesetze dieser Art hat Peano vielfach benutzt; vgl. Riv. di Mat. Bd. 2, S. 43.

3) Die obige Idee benutzte der Verfasser in Gött. Nachr. 1896, S. 255. Die allgemeinste Art einer derartigen Abbildung behandelt Bettazzi in Ann. di mat. (2) 16, S. 49. Er berichtigt darin einen Irrtum Harnack's.

lassen sich die Charaktere der Punktmengen auch auf diese Mengen übertragen. R. Baire wendet dies besonders auf den Fall an, dafs die E_ν Mengen beliebig geordneter Zahlen sind, also Reihen von Zahlen, die keine Fundamentalreihen zu sein brauchen[1]).

Zweites Capitel.

Die Mächtigkeit der Punktmengen.

Auf die Frage nach der Mächtigkeit p einer Punktmenge[2]) P läfst sich noch nicht in jedem Fall eine sichere Antwort geben. Wie bereits erwähnt, hat man thatsächlich bisher nur Mengen kennen gelernt, deren Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}$ ist; doch kann selbst die Frage, wann einer Menge die eine oder die andere Mächtigkeit zukommt, nicht vollständig beantwortet werden (1). Dies ist nur der Fall, wenn die Menge P abgeschlossen ist. Um zu allgemeinen Sätzen über Punktmengen beliebiger Art zu gelangen, hat Cantor mit Rücksicht darauf, dafs die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Continuums noch nicht geklärt ist, seine Untersuchungen später so modificirt, dafs er Mengen jeder Mächtigkeit zuläfst und eine gegebene Menge in homogene, in sich dichte Bestandteile verschiedener Mächtigkeit zerlegt (5).

Die Sätze und Formeln, welche die abgeschlossenen Mengen betreffen (2), gehen aufser auf Cantor[3]) auch auf J. Bendixson[4]) zurück, der einen Teil von ihnen selbständig gefunden und sogar vor Cantor publicirt hat. Die Grundlagen, auf denen ihre Beweise beruhen, gehören jedoch ohne Ausnahme in den Kreis der allgemeinen Cantor'schen Ideen (3). Aufser dem Mächtigkeitsbegriff bilden die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse das für sie notwendige und zugleich ausreichende Hilfsmittel, insbesondere der Satz, dafs ihre Gesamtheit eine Menge der zweiten Mächtigkeit darstellt. Doch aber besteht das merkwürdige Resultat, dafs in den von Cantor abgeleiteten Summenformeln, die formal eine nicht abzählbare Menge von Summanden enthalten, diese Summe in allen Fällen nach einer abzählbaren Menge von Gliedern abbricht, so dafs der Begriff der zweiten Mächtigkeit aus den Endformeln doch wieder verschwindet. Einem von diesem Begriff unabhängigen Beweise begegnen wir später (S. 81).

1. Am frühesten war die Mächtigkeit der isolirten und perfecten Mengen bekannt. Es bestehen die Sätze[5]):

1) Compt. rend. de l'Ac. des Sc. Bd. 129, S. 946 (1899).
2) Wir denken uns die Menge P stets ganz im Endlichen liegend.
3) Math. Ann. Bd. 23, S. 463 ff.
4) Acta math. Bd. 2, S. 415.
5) Für die beiden ersten Sätze vgl. Math. Ann. 21, S. 52; der Beweis des dritten Satzes findet sich in Math. Ann. 23, S. 459.

I. Jede isolirte Menge ist abzählbar.

Ist nämlich p ein Punkt der Menge, so läſst sich um ihn eine Kugel legen, die keinen Punkt der Menge enthält, und dies so, daſs alle Kugeln auſserhalb von einander liegen. Da nun diese Kugeln gemäſs S. 11 abzählbar sind, so ist es auch die Punktmenge. Eine Folgerung dieses Satzes lautet:

II. Ist P' abzählbar, so ist auch P abzählbar.

Dies ergiebt sich auf Grund der Gleichung $P = P_i + P_g$, wenn man beachtet, daſs P_g eine Teilmenge von P' ist. Denn da P_i und P_g abzählbar sind, so ist es auch P selbst.

III. Eine abzählbare Menge ist niemals perfect, und umgekehrt.

Dieser Satz wird genau so bewiesen, wie die ihm analogen Sätze von S. 19 u. 47. Es sei

$$P = \{p_\nu\} = p_1, p_2, p_3, \cdots p_\nu, \cdots$$

die bezügliche abzählbare Menge. Wäre sie perfect, so wäre jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt.

Man lege nun um p_1 eine Kugel K_1, so enthielte sie, da p_1 ein Grenzpunkt wäre, unendlich viele Punkte von P, die wir als Punktmenge P_1 bezeichnen. Der erste Punkt der obigen Reihe, der auch Punkt von P_1 ist, sei p_λ. Um ihn lege man eine Kugel K_λ, die ganz innerhalb von K_1 liegt, so enthielte sie eine aus unendlich vielen Punkten bestehende Teilmenge von P_1, die P_λ heiſsen möge. Der erste Punkt der Reihe, der zu P_λ gehört, sei p_μ, so folgt, da jeder Punkt von P_λ auch Punkt von P_1 ist, daſs $\mu > \lambda$ ist. So kann man fortfahren; läſst man die Radien der Kugeln H_1, H_λ, $\cdots$ gegen Null abnehmen, so erhält man eine Reihe von Punkten, $p_1, p_\lambda, p_\mu, \cdots$, die gegen einen Grenzpunkt p_ω convergiren. Dieser Grenzpunkt gehört einerseits der Menge an, andererseits kann er in obiger Reihe nicht enthalten sein, was ebenso geschlossen wird, wie im Beweis des analogen Satzes auf S. 19. Damit ist der Satz bewiesen, ebenso aber auch die mit ihm gleichwertige Umkehrung, daſs eine perfecte Menge nicht abzählbar ist.

2. Die wichtigsten Kriterien für die Beurteilung der Mächtigkeit $\mathfrak{p}$ einer Punktmenge ergeben sich aus zwei allgemeinen Formeln, die Cantor aufgestellt hat. Die erste giebt eine Darstellung der Ableitung P' einer Menge; da P'' Teilmenge von P' ist (S. 59), so läſst sich setzen (S. 62)

$$P' = P_i' + P_g' = P_i' + P'',$$

und zwar stellt P_i' die isolirten Punkte von P' dar[1]), die beim Fortgang von P' zu P'' verloren gehen. Dieselbe Zerlegung läſst sich

1) P_i' und P_g' sind also hier nicht die Ableitungen von P_i und P_g.

nun auch auf P'', dann auf P''' u. s. w. anwenden; man gelangt so zunächst zu der Formel

$$P' = \sum_{\lambda=1,\cdots\nu-1} P_i^{(\lambda)} + P^{(\nu)},$$

in der, wie immer, ν endlich ist. Diese Formel läfst sich aber auch auf transfinite Ordnungszahlen ausdehnen; mit andern Worten, sie gestattet auch den Schlufs von $\{\nu\}$ auf ω, vorausgesetzt natürlich, dafs Ableitungen transfiniter Ordnung existiren. Ein Punkt von P' gehört nämlich entweder $P^{(\omega)}$ an, oder nicht; gehört er $P^{(\omega)}$ nicht an, so giebt es eine erste Ableitung $P^{(\nu)}$, die ihn nicht mehr enthält, resp. eine Ableitung $P^{(\nu-1)}$, der er als isolirter Punkt angehört. Dieser Thatbestand findet seinen Ausdruck in der Formel

$$P' = \sum_{\lambda=1,2,3,\cdots<\omega} P_i^{(\lambda)} + P^{(\omega)}.$$

Man kann nun wieder $P^{(\omega)}$ in der gleichen Weise zerlegen wie die vorhergehenden Ableitungen und gelangt so durch fortgesetzte Anwendung des Schlusses von ν auf $\nu+1$ und von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω schliefslich zu der Gleichung

$$P' = \sum_{\beta=1,2,\ldots\omega,\ldots<\alpha} P_i^{(\beta)} + P^{(\alpha)}, \tag{1}$$

die in dem Fall, dafs Ableitungen $P^{(\alpha)}$ für **jede** Zahl α der zweiten Zahlklasse existiren, die Form

$$P' = \sum_{\beta=1,2,\ldots\omega,\ldots\alpha,\ldots\Omega} P_i^{(\beta)} + P^{(\Omega)} = R + S \tag{2}$$

annimmt[1]).

Die vorstehende Formel gilt übrigens auch für den Fall, dafs nicht alle $P^{(\alpha)}$ von Null verschieden sind; denn alsdann haben alle Ableitungen, von einer bestimmten an, den Wert Null, und die Formel geht von selbst in eine der vorhergehenden über. Wir können auf diese Weise die Formel (2) als für jede Punktmenge P giltig ansehen.

3. An diese Formel knüpfen wir nun folgende Betrachtungen. Wir scheiden zunächst die zwei Fälle, dafs P^{Ω} den Wert Null hat oder nicht. Ist zunächst $P^{\Omega} = 0$, so sind nicht alle $P^{(\alpha)}$ von Null verschieden, und es existirt, da es für jede Menge von Ordnungszahlen eine erste giebt, notwendig eine erste Ableitung $P^{(\alpha)}$, die Null ist. Alsdann enthält die rechte Seite von (2) nur eine **endliche** oder doch **abzählbare** Menge von Summanden. Jeder dieser Summanden stellt eine isolirte Menge dar, und daraus folgt gemäfs Satz I, dafs die gesamte Menge, d. h. also auch P' abzählbar ist. Nach Satz II ist daher auch P selbst abzählbar. Also folgt:

1) Für diese Formeln und die an sie anschliefsenden Sätze vgl. Math. Ann. 23, S. 463 ff., sowie die S. 65 citirte Arbeit von **Bendixson**. Für den einfachsten Fall findet sich die Formel schon in Math. Ann. 21, S. 53.

IV. Ist $P^{\Omega} = 0$, so sind P' und P abzählbar, und:

Giebt es ein α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so dafs $P^{(\alpha)} = 0$ ist, so ist P' und damit auch P abzählbar.

Diese Sätze lassen auch die Umkehrung zu; nämlich es besteht auch der Satz:

V. Ist P' abzählbar, so ist $P^{\Omega} = 0$, und es giebt ein erstes α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so dafs $P^{(\alpha)} = 0$ ist.

Wäre nämlich P^{Ω} nicht Null, so könnten an sich noch zwei Fälle eintreten. Es kann entweder jeder Summand der Formel (2) von Null verschieden sein; alsdann würde aber die Menge dieser Summanden eine Menge der zweiten Mächtigkeit darstellen, und P' könnte nicht abzählbar sein. Wäre andererseits irgend ein Summand gleich Null, so hätte man für das bezügliche α $P_i^{(\alpha)} = 0$, also $P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)}$, die Menge $P^{(\alpha)}$ müfste also perfect sein. Alsdann folgt auch $P^{\Omega} = P^{(\alpha)}$, und da eine perfecte Menge nicht abzählbar ist, so würde wieder folgen, dafs auch P' nicht abzählbar sein kann. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Wir erörtern jetzt den zweiten Hauptfall, dafs P^{Ω} von Null verschieden, also P' nicht abzählbar ist. Aus dem Vorstehenden folgt bereits, dafs alsdann entweder alle Summanden der rechten Seite von Null verschieden sind, oder aber bereits ein erstes α existirt, so dafs $P^{(\alpha)}$ perfect ist. Wir werden zeigen, dafs nur die zweite Möglichkeit zulässig ist. Zuvor beweisen wir folgende zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Ist die Menge P^{Ω} von Null verschieden, so ist sie perfect[1]).

Da P^{Ω} eine abgeschlossene Menge ist, so ist nur zu zeigen, dafs sie keine isolirten Punkte enthält. Enthielte P^{Ω} einen isolirten Punkt s, so liefse sich um s eine Kugel H legen, die keine weiteren Punkte von P^{Ω} enthält. Sei Q diejenige Teilmenge von P', die innerhalb H enthalten ist. Wir construiren nun um s eine Reihe einander einschliefsender Kugeln $H_1, H_2, H_3, \cdots$, die gegen den Punkt s als Grenzpunkt convergiren, und bezeichnen die zwischen $H_{\nu-1}$ und H_ν liegende Teilmenge von Q durch Q_ν, und zwar sollen Q_ν auch die etwa auf der Oberfläche von H_ν liegenden Punkte angehören. Alsdann ist

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots\cdots + s.$$

Nun ist zunächst klar, dafs jedes $Q_\nu^{\Omega} = 0$ ist; denn da Q_ν Teilmenge von P' ist, so ist ein Punkt von Q_ν^{Ω} auch Punkt von P^{Ω},

1) Math. Ann. 23, S. 465; vgl. auch J. Bendixson in Acta math. 2, S. 419. Den hier folgenden Beweis des zweiten Hilfssatzes gab E. Phragmén in Acta math. 5, S. 47; er stellt den einfachsten Fall eines allgemeineren von Cantor herrührenden Satzes dar; vgl. Math. Ann. 23, S. 457.

andererseits liegt aber innerhalb K nur der eine Punkt s von P^{Ω}, der wiederum nicht Punkt von Q_ν ist. Es ist mithin jedes Q_ν von der ersten Mächtigkeit, und demnach müfste es auch Q selbst sein. Andererseits wissen wir aber, dafs $Q^{\Omega} = s$ ist, also Q nicht abzählbar sein kann; damit ist gezeigt, dafs P^{Ω} keine isolirten Punkte enthält.

Hilfssatz 2. Die Menge $R = \Sigma P_i^{(\beta)}$ ist abzählbar.

Da die Menge P^{Ω} ihre Grenzpunkte enthält, so giebt es für jeden Punkt r von R eine von Null verschiedene untere Grenze seiner Abstände von allen Punkten von P^{Ω}; sie sei ϱ und heifse Abstand des Punktes r von P^{Ω}[1]. Nun werde eine Reihe von Gröfsen

$$\delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots\cdots > \delta_\nu > \cdots$$

mit $\lim \delta_\nu = 0$ ins Auge gefafst, und es sei R_ν diejenige Teilmenge von R, deren Punkte der Bedingung

$$\delta_\nu \geqq \varrho > \delta_{\nu+1}$$

genügen, so dafs auch für die Punkte von R_ν' die untere Grenze ihrer Abstände von den Punkten von P^{Ω} nicht kleiner als $\delta_{\nu+1}$ ist, so ist

$$R = R_0 + R_1 + R_2 + \cdots,$$

und man zeigt wieder leicht, dafs $R_\nu^{\Omega} = 0$, also R_ν abzählbar ist. Wäre nämlich R_ν^{Ω} nicht Null, so würde doch ein Punkt s_ν von R_ν^{Ω} auch der Menge R_ν' angehören, und es müfste für ihn die untere Grenze seiner Abstände von den Punkten von P^{Ω} von Null verschieden sein, was einen Widerspruch darstellt.

Da demnach R von der ersten Mächtigkeit ist, so folgt, dafs in der Gleichung $R = \Sigma P_i^{(\beta)}$ die von Null verschiedenen Summanden selbst eine Menge der ersten Mächtigkeit bilden. Sie können daher nicht alle von Null verschieden sein, und es giebt mithin ein erstes α, so dafs $P_i^{(\alpha)} = 0$, also $P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)}$ ist. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

VI. Ist P' nicht abzählbar, so giebt es eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so dafs $P^{(\alpha)}$ eine perfecte Menge ist[2].

Wir können die erhaltenen Resultate im Zusammenhang auch folgendermafsen aussprechen:

Hauptsatz. Ist die Menge P' abzählbar, so kann sie durch fortgesetzte Abtrennung isolirter Mengen allmählich erschöpft werden; man gelangt durch diese Abtrennung nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Schritten zu einer ersten Ableitung $P^{(\alpha)}$, die Null

1) Vgl. auch Jordan, Journ. de math. (4) Bd. 8, S. 74.
2) Math. Ann. 23, S. 467.

ist. Ist P' nicht abzählbar, so kann zwar die successive Abtrennung der bezüglichen isolirten Mengen ebenfalls noch vorgenommen werden; und auch für sie führt dieser Abtrennungsprocefs nach einer abzählbaren Menge von Schritten zu einem Ende; aber in diesem Fall führt der Procefs zuletzt zu einer perfecten Menge $P^{(\alpha)}$, die sich allen Reductionsprocessen gegenüber als unzugänglich erweist. Die in diesen Satz eingehende Zahl α soll die für P charakteristische Zahl heifsen.

Das vorstehende Resultat kann als das wichtigste Ergebnis allgemeinerer Natur aus der Theorie der Punktmengen betrachtet werden.

Die Menge R, die bei dem Reductionsprocefs von P' auf $S = P^{\Omega}$ allmählich abgespalten wird, bezeichnet Cantor als reductible Menge[1]. Von ihr beweisen wir noch folgenden von J. Bendixson aufgestellten Satz[2]:

VII. Die Mengen R und $R^{(\alpha)}$ enthalten keine gemeinsamen Punkte; es ist $\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) = 0$.

Da nämlich R und S keine gemeinsamen Punkte enthalten, so folgt dies auch für R und $P^{(\alpha)}$, wenn α die bezügliche Zahl des obigen Satzes ist, also erst recht auch für R und $R^{(\alpha)}$, da ja $R^{(\alpha)}$ entweder eine Teilmenge von $P^{(\alpha)}$ oder höchstens gleich $P^{(\alpha)}$ ist.

5. Die vorstehenden Formeln leiden insofern an einem Mangel, als in ihnen nicht P, sondern P' auftritt; sie bestimmen daher nur die Mächtigkeit von P' und nicht die von P. Schon das einfache Beispiel der rationalen Zahlen, deren Ableitung das Continuum ist, zeigt aber, dafs sich die Mächtigkeit beim Fortgang von P zu P' erheblich ändern kann. Sätze oder Methoden, nach denen sich die Mächtigkeit einer beliebigen Menge P beurteilen läfst, besitzen wir noch nicht. Cantor hat allerdings auch Formeln abgeleitet, die sich auf beliebige Mengen beziehen; diese Formeln betreffen aber mehr die Analyse der inneren Structur einer Menge, unter Voraussetzung ihrer Mächtigkeit, als dafs sie diese selbst erkennen liefsen. Sie beruhen darauf, dafs die Teilmenge P_i abzählbar ist, und dafs daher die Mächtigkeit von P mit derjenigen von P_c identisch ist. Diese Menge ist es, die von Cantor in gewisse gleichmächtige und in bestimmter Art gleichmäfsig in sich dichte Mengen höherer Mächtigkeit zerlegt wird, nach einer Methode, die ich hier im Auszuge folgen lasse[3].

---

1) Math. Ann. 21, S. 575 und 23, S. 466.

2) Acta math. 2, S. 425. Der Satz berichtigt einen von Cantor ausgesprochenen Irrtum, dafs $R^{(\alpha)} = 0$ sei; vgl. Math. Ann. 21, S. 575 und 23, S. 468.

3) Vgl. für das Folgende eine Abhandlung Cantor's in Acta math. 7, S. 105.

Man kann für die Punktmenge in der Umgebung eines beliebigen Punktes q einen Mächtigkeitsgrad definiren, und zwar auf folgende Weise. Man denke sich um q beliebige einander einschliefsende Kugeln

$$H_1, H_2, H_3 \cdots\cdots H_\nu \cdots\cdots,$$

die gegen q convergiren, und bezeichne die in H_ν enthaltene Teilmenge von P durch P_ν; alsdann hat P_ν eine ganz bestimmte Mächtigkeit β_ν, und es ist sicher $\beta_\nu \geqq \beta_{\nu+1}$. Wir nehmen nun ausdrücklich an, dafs die Mächtigkeiten eine wohlgeordnete Menge bilden[1]). Alsdann sind die β_ν Ordnungszahlen. Da es keine Menge Ordnungszahlen vom Typus $^*\omega$ giebt, so haben die Zahlen β_ν eine bestimmte untere Grenze α, oder mit andern Worten, diese Zahlen können von einem bestimmten β_μ an nicht mehr abnehmen. Die so definirte Zahl α ist alsdann der Mächtigkeitsgrad resp. die Mächtigkeit von P in der Umgebung von q.

Wir gehen aus von der Gleichung $P = P_i + P_g$, die wir jetzt mit Cantor

$$P = Pa + Pc$$

schreiben, und zwar heifst $Pa = P_i$ Adhärenz von P, und $Pc = P_g$ die Cohärenz von P; falls P einen in sich dichten Bestandteil enthält, gehört er notwendig der Cohärenz Pc an. Die Menge Pc kann in analoger Weise gespalten werden; setzt man

$$Pc = Pca + Pc^2,$$

so ist auch hier wieder Pca eine isolirte Menge, während Pc^2 jeden in sich dichten Bestandteil von P enthält. Diese Bezeichnungsweise folgt dem associativen Gesetz und gestattet daher den Schlufs von ν auf $\nu + 1$; man erhält nach ν-maliger Spaltung

$$P = Pa + Pca + Pc^2a + \cdots + Pc^{\nu-1}a + Pc^\nu$$
$$= \sum_{\lambda = 0, 1, \cdots \nu - 1} Pc^\lambda a + Pc^\nu,$$

und man erkennt wie oben, dafs diese Gleichung bis zu transfiniten Ordnungszahlen fortgesetzt werden kann, indem man auch hier

$$Pc^\omega = \mathfrak{D}(P, Pc, Pc^2, \cdots)$$

und allgemein, falls $\{\alpha_\nu\}$ eine beliebige Fundamentalreihe mit β als Limeszahl ist,

$$Pc^\beta = \mathfrak{D}(Pc^{\alpha_1}, Pc^{\alpha_2}, Pc^{\alpha_3}, \cdots)$$

definirt[2]). Man erhält so die Formel

---

1) Der folgende Schlufs wird illusorisch, falls die Mächtigkeiten keine wohlgeordnete Menge bilden.

2) Der Satz, dafs $P^{(\beta)}$ immer existirt, falls alle $P^{(\alpha_\nu)}$ existiren, wenn β die Limeszahl von $\{\alpha_\nu\}$ ist, hat hier übrigens kein Analogon; es beruht darauf, dafs die Mengen Pc^α nicht abgeschlossen sind.

$$P = \underset{\beta = 0, 1, 2, \cdots \omega, \cdots < \alpha}{\Sigma P c^{\beta} a} + P c^{\alpha},$$

in der sich die Summation über alle Ordnungszahlen bis zu α erstreckt, resp.

$$(3) \qquad P = \underset{\lambda = 0, 1, 2, \cdots \omega, \cdots \alpha, \cdots}{\Sigma P c^{\lambda} a} + P c^{\Omega},$$

in der die Summe über alle Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse auszudehnen ist. Auch in diesen Formeln ist jede Adhärenz $Pc^{\lambda}a$ eine isolirte Menge, während die Cohärenz Pc^{λ} stets alle in sich dichten Bestandteile von P enthält.

6. Wir discutiren jetzt unsere Gleichung in ähnlicher Weise, wie dies oben geschehen ist. Ist zunächst P abzählbar, so kann die rechte Seite von (3) wiederum nur eine abzählbare Menge von Summanden enthalten, die nicht Null sind; es giebt daher auch hier eine erste Zahl α, so dafs $Pc^{\alpha}a = 0$ ist. Andererseits ist aber

$$Pc^{\alpha} = Pc^{\alpha}a + Pc^{\alpha+1},$$

und daraus folgt wieder

$$Pc^{\alpha} = Pc^{\alpha+1} = Pc^{\Omega}.$$

Hier sind nun an sich zwei Fälle möglich; entweder ist $Pc^{\alpha} = 0$, und man hat

$$P = \Sigma P c^{\beta} a = R,$$

oder aber Pc^{α} ist von Null verschieden. Nun enthält, wie wir oben sahen, Pc^{α} jeden in sich dichten Bestandteil von P; aus der Gl. (3) folgt daher, dafs in diesem Fall Pc^{α} selbst eine in sich dichte Menge ist, die wir mit U bezeichnen; man hat also

$$P = \Sigma P c^{\beta} a + P c^{\Omega} = R + U.$$

Ist zweitens die Menge P von höherer Mächtigkeit, so läfst sich zunächst zeigen, dafs sie alsdann stets einen in sich dichten Bestandteil enthält. Wir betrachten dazu eine Menge Q, die aus allen Punkten q bestehen soll, in deren Umgebung P von höherer Mächtigkeit ist[1]). Ist nun $V = \mathfrak{D}(P, Q)$ der gemeinsame Teiler von P und Q, so mufs diese Menge, wie Cantor beweist, in sich dicht sein.

Hieraus ziehen wir nun eine Reihe von Folgerungen. Cantor nennt noch eine Menge separirt, falls sie keinen in sich dichten Bestandteil enthält; beispielsweise ist jede isolirte Menge separirt. Ferner soll eine in sich dichte Menge homogen heifsen, falls sie um jeden Punkt die gleiche Mächtigkeit hat, insbesondere homogen von der ν-ten Ordnung, falls sie von der ν-ten Mächtigkeit ist. Da wir nun eben sahen, dafs jede Menge höherer Mächtigkeit einen in sich dichten Bestandteil enthält, so folgt zunächst, dafs die sepa-

1) Vgl. die obenstehende Definition.

rirten Mengen abzählbar sind, und es folgt weiter, dafs sie demjenigen bei abzählbaren Mengen auftretenden Fall entsprechen, dafs $Pc^\alpha = 0$ ist. Also folgt:

Eine separirte Menge R ist abzählbar; es giebt für sie eine kleinste Zahl α, so dafs $Pc^\alpha = 0$ ist, und es besteht für sie die Gleichung

$$R = \sum_{\beta = 0, 1, 2, \cdots \omega, \cdots < \alpha} Pc^\beta a.$$

Für eine nicht separirte abzählbare Menge giebt es stets eine erste Zahl α, so dafs Pc^α eine in sich dichte Menge U erster Ordnung ist; es besteht die Gleichung

$$P = \Sigma\, Pc^\beta a + Pc^\alpha a = R + U.$$

Die Menge R kann Null sein; immer aber ist, wie leicht ersichtlich, $\mathfrak{D}(R, U') = 0$.

Ist die Menge P von höherer Mächtigkeit, so enthält sie, wie oben gezeigt, jedenfalls den in sich dichten Bestandteil V; er gehört Pc^Ω an, da dies für jeden in sich dichten Bestandteil von P der Fall ist. Die Menge $R = \Sigma\, Pc^\beta a$ ist daher auch hier eine separirte Menge; es mufs daher auch in diesem Fall ein erstes α existiren, so dafs $Pc^\alpha a = 0$ ist. Die in sich dichte Menge Pc^Ω enthält jedenfalls den Bestandteil V höherer Mächtigkeit; sie kann aber aufserdem noch einen in sich dichten Bestandteil erster Mächtigkeit U enthalten. Wir haben daher folgenden Satz:

VIII. Ist P eine Menge höherer Mächtigkeit, so besteht eine Gleichung

$$P = R + U + V,$$

wo $R = \Sigma\, Pc^\beta a$ eine separirte Menge ist, U eine homogene Menge erster Ordnung und V eine in sich dichte Menge höherer Mächtigkeit darstellt. Die Mengen R und U können auch Null sein.

Auch hier folgt leicht, dafs $\mathfrak{D}(R, U') = 0$, $\mathfrak{D}(R, V') = 0$ und $\mathfrak{D}(U, V') = 0$ ist.

Läfst man Mengen zu, deren Mächtigkeit beliebig ist, so braucht V nicht homogen zu sein; es kann aber V in homogene Mengen gespalten werden, die aufsteigende Mächtigkeit besitzen. Denjenigen Bestandteil von V, der eine in sich dichte Menge β-ter Mächtigkeit darstellt, hat Cantor als β-te Inhärenz $P_{i\beta}$ von P bezeichnet, so dafs U die erste Inhärenz ist.

Die vorstehenden allgemeinen Sätze haben eine Anwendung bisher nicht erfahren.

Drittes Capitel.

Die abgeschlossenen und perfecten Mengen.

Die theoretisch wichtigsten Punktmengen sind die abgeschlossenen und perfecten Mengen, sie sind zugleich diejenigen, die in Analysis und Geometrie am häufigsten auftreten. In der Analysis findet dies überall da statt, wo die Grenzpunkte einer Menge dieselbe Eigenschaft haben wie die Menge selbst, wie bei den Unstetigkeitsstellen einer reellen Function von gegebenem Unstetigkeitsgrad, ferner in der Theorie der ungleichmäfsigen Convergenz der Reihen, bei den singulären Stellen einer analytischen Function u. s. w. Ihre besondere Wichtigkeit für die Geometrie werden wir im vierten Abschnitt in eingehender Weise zu würdigen haben. Die mengentheoretische Erörterung der geometrischen Grundbegriffe ist gar nichts anderes als die Analyse und die Einteilung der perfecten Mengen, stellt doch das Continuum den einfachsten Typus einer perfecten Menge dar. Man begegnet diesen Mengen aber auch bei einzelnen besonderen geometrischen Problemen, so z. B. in einem scheinbar so heterogenen Gebiet, wie in der Theorie der geodätischen Linien, wie ein kürzlich von Hadamard ausgesprochener Satz beweist[1]).

Für die abgeschlossenen und perfecten Mengen kann man die Frage nach ihrer Mächtigkeit vollständig beantworten. Nach einem von Cantor schon früh ausgesprochenen Satz ist eine abgeschlossene Menge entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Continuums; insbesondere sind alle perfecten Mengen von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ (1). Aber auch ihre innere Structur ist uns ziemlich durchsichtig geworden. Diese Structur kommt naturgemäfs nur in solchen Gebietsteilen H in Frage, in denen die Menge nirgends dicht ist; denn eine abgeschlossene Menge, die in einem Gebiet H überall dicht ist, enthält gemäfs S. 63 alle Punkte von H. Die Structur der nirgends dichten abgeschlossenen Mengen drückt sich darin aus, dafs die von den Punkten der Menge freien Gebietsteile eine überall dichte Gebietsmenge D bilden; die eine ist durch die andere bedingt (3). Für die linearen perfecten Mengen ist dieser Zusammenhang zuerst von du Bois-Reymond[2]) und Harnack ans Licht gezogen worden[3]). Für ebene und räumliche Mengen habe ich selbst eine Darstellung ihrer Structur abgeleitet und geglaubt, sie diesem Bericht einfügen zu sollen (6). Für eine Reihe von Untersuchungen aus dem Gebiet der reellen Functionen mehrerer Variablen dürfte sie sich

1) Journ. de math. (5) 4, S. 67 ff.

2) Du Bois hat wohl zuerst darauf hingewiesen, dafs sich aufser Punkten auch Intervalle überall dicht verteilen lassen. Vgl. Math. Ann. 16, S. 128, Anm.

3) Vgl. übrigens auch die Beispiele in Cap. V dieses Abschnitts.

als eine ebenso natürliche wie zweckmäfsige Grundlage erweisen. Besondere Sätze über ebene und räumliche abgeschlossene Mengen liegen sonst nur wenige vor. Aufser denen, die von Cantor selbst stammen, sind kürzlich von Vivanti und Baire Beiträge zu ihrer Theorie geliefert worden (8).

Den nirgends dichten abgeschlossenen Mengen, insbesondere den perfecten kommt noch eine weitere Wichtigkeit formaler Art zu (5). Da das Continuum nur ein specieller Fall einer perfecten Menge ist, so läfst sich erwarten, dafs die Übertragung der oben (S. 32) genannten, scheinbar am Continuum haftenden Begriffe sich auf perfecte Mengen besonders natürlich gestaltet. Dies ist in der That der Fall und hat für einzelne Gebiete der Analysis wichtige Bedeutung, wie sich ausführlich im dritten Abschnitt zeigen wird. Die hierauf bezüglichen allgemeinen Untersuchungen sind erst ganz kürzlich von R. Baire aufgeworfen und durchgeführt worden.

1. Da eine abgeschlossene Menge ihre Grenzpunkte enthält, so ist jeder Punkt von P' auch Punkt von P; aus der Abzählbarkeit von P folgt jetzt also auch diejenige von P'. Umgekehrt folgt allgemein aus der Abzählbarkeit von P' diejenige von P; man kann also hier von P' auf P und von P auf P' schliefsen. Demnach nehmen die Sätze des vorigen Capitels hier die folgende einfache Fassung an:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Abzählbarkeit einer abgeschlossenen Menge P besteht darin, dafs es eine Zahl α giebt, für die $P^{(\alpha)} = 0$ ist.

II. Für jede nicht abzählbare abgeschlossene Menge existirt eine Zahl α, so dafs $P^{(\alpha)}$ eine perfecte Menge ist.

Eine abgeschlossene Menge ist daher entweder abzählbar, oder von der gleichen Mächtigkeit wie eine perfecte Menge. Im ersten Fall kann die abgeschlossene Menge durch successive Abtrennung isolirter Teilmengen erschöpft werden; im zweiten Fall führt diese allmähliche Abtrennung zuletzt auf eine nicht mehr auflösbare perfecte Menge. Von den perfecten Mengen weifs man nun weiter, und wir werden es sofort ausführlich begründen, dafs sie sämtlich die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen; es ergiebt sich also:

III. Jede abgeschlossene Menge ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Continuums, insbesondere hat jede perfecte Menge die Mächtigkeit des Continuums.

2. Sei nun zunächst $Q = \{q\}$ eine nirgends dichte abgeschlossene Menge, die auf einer Geraden enthalten ist, so hat sie links und rechts je einen Grenzpunkt, der ihr, da sie abgeschlossen ist, angehört. Beide Punkte bestimmen die zu Q gehörige Strecke τ. Sei nun $M = \{m\}$ die Complementärmenge zu Q, so giebt es um einen Punkt m ein ihn einschliefsendes Intervall $y_0 \cdots z_0$, dessen innere Punkte ebenfalls noch zu M gehören; denn sonst wäre m

Grenzpunkt von Q, und damit auch Punkt von Q, und wenn $y \cdots z$ die obere Grenze aller derartigen Intervalle ist, so folgt aus der Natur des Grenzpunktes wieder, dafs y und z auch Punkte von Q sind. Die Strecke $y \cdots z$ heifse das zu m gehörige punktfreie Intervall δ. Da Q nirgends dicht sein soll, so giebt es in jedem Teilintervall τ' von τ Punkte von M; es giebt daher auch immer Intervalle δ, die ganz oder teilweise in τ' fallen. Wir nennen deshalb die Intervalle δ eine überall dichte Intervallmenge und bezeichnen sie durch $D = \{\delta_\nu\}$. Da zu allen inneren Punkten m' eines Intervalles δ_ν ebenfalls δ_ν als punktfreies Intervall gehört, so ist die Menge D durch die Menge Q überdies eindeutig bestimmt.

Es ist nun aber auch die Umkehrung richtig; von einer beliebigen überall dichten Intervallmenge $D = \{\delta_\nu\}$ wird sich ergeben, dafs sie die Menge Q eindeutig bestimmt, und zwar so, dafs Q aus den Endpunkten der Intervalle und deren Grenzpunkten gebildet wird; d. h. es besteht der folgende Satz:

IV. Jede lineare, nirgends dichte, abgeschlossene Menge Q besteht aus den Endpunkten einer überall dichten Intervallmenge D und deren Grenzpunkten[1]), und umgekehrt.

Die Lage der punktfreien Intervalle kann nun entweder eine solche sein, dafs zwei von ihnen aneinandergrenzen oder dafs sie getrennt sind. Der Endpunkt zweier angrenzender Intervalle ist notwendig ein isolirter Punkt von Q. Da nun eine perfecte Menge keine isolirten Punkte enthält, so folgt weiter:

V. Jede lineare, nirgends dichte, perfecte Menge besteht aus den Endpunkten getrennter Intervalle und deren Grenzpunkten, und umgekehrt.

3. Für den vollständigen Beweis dieser Sätze ist nur noch zu zeigen, in welcher Weise eine überall dichte Menge $D = \{\delta\}$ die bezügliche abgeschlossene Menge bestimmt. Wir beginnen mit dem Beweis des zweiten Satzes, so dafs die Menge D aus lauter getrennten Intervallen besteht. Wiederum sei τ die Strecke, in der die Menge D enthalten ist, und wir setzen jetzt

$$C = T + M,$$

wo C alle Punkte von τ, $M = \{m\}$ die inneren Punkte der Intervalle δ_ν darstellt, und $T = \{t\}$ aus den übrigen Punkten von τ besteht, so dafs T und M Complementärmengen sind.

Sei nun δ das gröfste der Intervalle von D. Es bestimmt auf τ links und rechts von sich je ein Restintervall τ_0 resp. τ_1, so dafs

$$\tau = \tau_0 + \delta + \tau_1$$

1) Mit diesem Satz ist auch die Structur einer beliebigen nirgends dichten linearen Menge bestimmt; denn eine solche entsteht aus Q, falls man Grenzpunkte, die zu Q gehören, beliebig tilgt.

ist. Das gröfste innerhalb τ_0 gelegene Intervall von D sei δ_0, dasjenige von τ_1 sei δ_1; durch sie entstehen auf τ_0 die beiden Restintervalle τ_{00} und τ_{01}, auf τ_1 ebenso τ_{10} resp. τ_{11}. Das gröfste Intervall auf jeder Strecke τ_{ik} sei wieder δ_{ik} u. s. w.; so fortfahrend gelangen wir zu der folgenden Anordnung der Menge D:

$$\delta,\ \delta_0,\ \delta_1,\ \delta_{00},\ \delta_{01},\ \delta_{10},\ \delta_{11},\cdots,$$

in der notwendig jedes Intervall vorkommt. Wir setzen noch

$$D = \{\delta_{ikl\ldots}\} = \{\delta_N\},$$

wo N irgend eine Gruppe von ν Indices bedeuten mag, und setzen weiter

$$\tau_N = \tau_{N,0} + \delta_N + \tau_{N,1}. \tag{1}$$

Nun sei t irgend ein Punkt von T. Da er seiner Definition nach nicht innerer Punkt von δ ist, so ist er notwendig innerer Punkt oder Endpunkt von τ_0 oder τ_1, d. h. von einem Intervall τ_i. Da er wiederum nicht innerer Punkt eines Intervalles δ_i ist, so ist er innerer Punkt oder Endpunkt eines Intervalles τ_{ik} u. s. w.; es giebt also eine wohldefinirte Intervallreihe

$$\tau_i,\ \tau_{ik},\ \tau_{ikl},\ \cdots\ \tau_N,\ \cdots$$

mit bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$, die τ als inneren Punkt oder Endpunkt enthalten, und deren jedes ein Teil des vorhergehenden ist und mit ihm je einen Endpunkt gemein hat. Diese Reihe convergirt nun notwendig gegen t; denn da jedes Intervall δ_N als gröfstes bezügliches Intervall gewählt wurde, so convergirt, wie leicht ersichtlich, τ_N gegen Null. Der Punkt t kann nun aber auch als Grenzpunkt jeder Punktfolge betrachtet werden, in die je ein beliebiger Punkt der Intervalle $\tau_i,\ \tau_{ik},\cdots\tau_N\cdots$ eingeht, insbesondere also auch als Grenzpunkt einer Punktfolge, die aus den Endpunkten der entsprechenden Intervallreihe

$$\delta_i,\ \delta_{ik},\ \delta_{ikl},\ \cdots\ \delta_N,\ \cdots$$

besteht. Daraus folgt, dafs jeder Punkt von T Grenzpunkt von Intervall-Endpunkten ist und umgekehrt, so dafs in der That T eine perfecte Menge bildet. Der durch die obige Intervallreihe bestimmte Punkt t ist überdies selbst Endpunkt eines Intervalles δ_N oder nicht, je nachdem die Indices $i, k, l, \cdots$ von einem bestimmten an sämtlich den Wert 0, resp. sämtlich den Wert 1 haben oder nicht. Im ersten Fall bleibt nämlich von einem bestimmten τ_N an für alle dann folgenden Intervalle der Reihe der eine Endpunkt fest, und dies ist der Punkt t, der damit zugleich Endpunkt eines Intervalles δ_N ist. Wir setzen noch

$$T = T_e + T_g = T_l + T_r + T_g,$$

wo T_e die Endpunkte der Intervalle, insbesondere T_l die linken und T_r die rechten Endpunkte darstellt.

Die allgemeinste Structur einer nirgends dichten abgeschlossenen linearen Menge ergiebt sich nun folgendermafsen. Es ist

$$(2) \qquad Q = \Sigma Q_i^{(\alpha)} + Q^{\Omega} = R + T,$$

wo R abzählbar und T eine nirgends dichte, perfecte Menge ist. Ist zunächst $T = 0$, so folgt aus dem Vorigen, dafs alle punktfreien Intervalle δ aneinandergrenzen müssen. Ist dagegen T nicht Null, so sei wieder $D = \{\delta_N\}$ die zu T gehörige Intervallmenge, alsdann können die Punkte von R nur innere Punkte dieser Intervalle sein. Ist also R_N die im Intervall δ_N liegende Teilmenge von R, so ist R_N, falls man noch die Endpunkte von δ_N hinzurechnet, eine nirgends dichte abzählbare abgeschlossene Menge. Eine solche befindet sich in jedem Intervall δ_N; sie kann freilich auch Null sein. Es folgt also

$$(3) \qquad Q = \Sigma R_N + T.$$

Für die Structur der allgemeinsten abgeschlossenen linearen Menge ergiebt sich schliefslich, dafs die Intervalle, in denen sie überall dicht, und diejenigen, in denen sie nirgends dicht ist, je eine höchstens abzählbare Menge bilden. Endlich können wir noch folgenden Satz aussprechen:

VI. Eine überall dichte Intervallmenge $D = \{\delta\}$ bestimmt durch ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte eine perfecte oder eine abzählbare Menge, je nachdem jedes oder kein Intervall von allen andern getrennt ist[1]).

Die hiermit geschilderte Beziehung zwischen den überall dichten Intervallmengen und den Punktmengen dürfte in ihrer Bedeutung zuerst von du Bois[2]) und Harnack[3]) erkannt worden sein[4]). Ihr Interesse galt allerdings weniger den Punktmengen selbst, als vielmehr ihrem Inhalt.

4. Um zu zeigen, dafs die perfecten linearen Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, genügt es augenscheinlich, dies für eine nirgends dichte Menge T nachzuweisen. Zum Beweise benutzt man am besten eine Methode, die sich auch für spätere Anwendungen nützlich erweisen wird, und die darin besteht, die zu T gehörige abzählbare Intervallmenge $D = \{\delta_N\}$ auf eine abzählbare überall dichte Punktmenge $X = \{x_N\}$ so abzubilden, dafs zwei Punkte dieselbe Lage zu einander haben, wie die entsprechenden Intervalle.

1) Treten beide Eigenschaften combinirt auf, so ergiebt sich eine abgeschlossene Menge des allgemeinsten Typus.

2) Die allgemeine Functionentheorie, S. 188 (1882).

3) Math. Ann. 19, S. 239 (1892).

4) Vgl. übrigens auch Bendixson, Acta math. 2, S. 416 und Öfv. af Svensk. Vet. Forh. Stockholm, Bd. 39, Nr. 2, S. 31 (1883).

Diese Abbildung hat bereits Cantor zum Zweck des vorliegenden Beweises benutzt[1]).

Sei t ein beliebiges Intervall, und x ein Punkt innerhalb desselben. Durch x zerfällt t in t_0 und t_1, so dafs t_0 links von t_1 liegt. Innerhalb t_0 werde x_0 beliebig gewählt, ebenso x_1 innerhalb t_1; durch x_0 zerfalle t_0 in t_{00} und t_{01}, ebenso t_1 durch x_1 in t_{10} und t_{11}. Innerhalb jedes Intervalles t_{ik} wird wieder x_{ik} beliebig angenommen u. s. w.; so ergiebt sich eine Punktmenge

$$(4) \qquad x,\ x_i,\ x_{ik},\ x_{ikl}, \cdots x_N, \cdots$$

sowie eine Reihe von Intervallen

$$(5) \qquad t,\ t_i,\ t_{ik},\ t_{ikl}, \cdots t_N, \cdots,$$

und zwar ist auch hier jedes t_N Teilintervall des vorhergehenden. Werden nun insbesondere die Punkte x_N so gewählt, dafs

$$X = \{x_{ikl} \cdots\} = \{x_N\}$$

eine überall dichte Punktmenge abgiebt, so liefert wieder jede Reihe (5) bei bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$ einen Punkt des auf t enthaltenen Continuums C, und umgekehrt kann auch jeder Punkt von C durch eine solche Reihe dargestellt werden. Setzt man noch

$$C = X' = X + X_g,$$

so bestimmt die Reihe (4) wieder einen Punkt von X, falls alle Indices von einem bestimmten an sämtlich 0 oder sämtlich 1 sind, sonst aber einen Punkt von X_g. Werden nun jedem x_N die Endpunkte desjenigen δ_N zugeordnet, dessen Indices mit denen von x_N übereinstimmen, so entspricht damit auch jedem Intervall τ_N das bezügliche Intervall t_N, und damit jedem Punkt von X_g eindeutig ein Punkt von T_g und umgekehrt, während den Punkten von X, in Übereinstimmung mit der getroffenen Festsetzung, je zwei Punkte von T, nämlich je ein Punkt von T_l und je einer von T_r, entsprechen. Damit ist aber der Satz für die Menge T bewiesen, d. h. es ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$.

Auf Grund der Formel (3) folgt nun weiter, dafs jede lineare abgeschlossene Menge die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}$ hat.

5. Die Übertragbarkeit derjenigen Eigenschaften der Punktmengen, die ursprünglich eine Beziehung zum stetigen Raum betreffen, auf abgeschlossene und perfecte Mengen, hat durch die neuesten Arbeiten von R. Baire eine mehr als formale Bedeutung erlangt. Ist $U = \{u\}$ Teilmenge einer linearen nirgends dichten abgeschlossenen Menge Q, so wird ein Punkt u isolirt bezüglich Q heifsen, wenn U keine Punktfolge enthält, als deren Grenzpunkt er darstellbar ist; jeder andere Punkt u heifst Grenzpunkt bezüg-

1) Math. Ann. 23, S. 481.

lich Q, er ist natürlich auch Grenzpunkt in bezug auf das Continuum C, von dem Q selbst eine Teilmenge darstellt. Wir können also wieder

$$U = U_i + U_g$$

setzen, wo U_i die isolirten Punkte und U_g die Grenzpunkte bedeutet. Wie im allgemeinen Fall heifst dann U eine bezüglich Q isolirte Menge, falls $U_g = 0$ ist, sie heifst in sich dicht bezüglich Q, falls $U_i = 0$ ist. Sie heifst wieder abgeschlossen bezüglich Q[1]), falls sie jeden ihrer Grenzpunkte enthält, und heifst perfect bezüglich Q, falls sie abgeschlossen und in sich dicht ist. Sie heifst endlich überall dicht bezüglich Q, falls $U' = Q$ ist, sie heifst nirgends dicht bezüglich Q, falls sie keine Teilmenge enthält, die überall dicht bezüglich Q ist. Eine in sich dichte Menge U ist daher immer überall dicht bezüglich einer perfecten Menge T, so dafs damit der Begriff in sich dicht entbehrlich wird.

Die Beziehung der nirgends dichten Mengen zur Intervallmenge D bewirkt, dafs für sie manche Probleme einen besonders einfachen Ausdruck finden. Um nur ein Beispiel zu erwähnen, so sei Q irgend eine nirgends dichte abgeschlossene Menge, die zur Intervallmenge D gehört, und Q_1 eine ebenfalls abgeschlossene Teilmenge von Q, dann gehört zu Q_1 eine Intervallmenge D_1, die aus D so entsteht, dafs entweder das Gesamtintervall τ von Q sich verringert, oder aber gewisse Intervalle δ zu einem Intervall δ_1 zusammentreten. Der Übergang von D zu D_1 kann daher so beschrieben werden, dafs gewisse Intervalle von D aufser Betracht kommen. Diese Intervalle, resp. die von ihnen gebildete Menge sei Δ. Wird nun auch von Q_1 eine abgeschlossene Teilmenge Q_2 gebildet, und so weiter fortgefahren, so kann dieser Procefs bis zu transfiniten Ordnungszahlen fortgesetzt werden; aber er mufs nach einer abzählbaren Menge von Schritten abbrechen. Denn die Mengen

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_\omega, \cdots \Delta_\alpha, \cdots$$

können nur in abzählbarer Menge existiren, da jede von ihnen eine Teilmenge von D ist, und D selbst abzählbar ist. Es besteht also der Satz:

VII. Werden aus einer abgeschlossenen Menge Q der Reihe nach abgeschlossene Mengen Q_1, Q_2, $\cdots$ so gebildet, dafs jede eine Teilmenge der vorhergehenden ist, und gelangt man dadurch schliefslich zu einer abgeschlossenen Menge T, so mufs diefser Procefs bereits nach einer abzählbaren Reihe von Schritten zur Menge T führen, welches auch diese Menge T sein mag.

1) Eine bezüglich Q abgeschlossene Menge ist übrigens auch in bezug auf C abgeschlossen.

Die so bestimmte Menge T kann sowohl Null, wie auch eine perfecte Menge sein. Der einfachste Fall, auf den wir das obige Resultat anwenden können, sind die Formeln des vorigen Capitels, insbesondere der Satz, dafs die Abspaltung isolirter Punkte nach einer abzählbaren Menge von Schritten die Menge Q ganz oder auf eine perfecte Menge reducirt. In der That bedeutet jede Tilgung eines isolirten Punktes eine Verminderung der Menge D, und die Ableitungen von Q stellen eine Folge von Mengen dar, wie sie dem Satz VII entspricht. Hierin liegt also ein Beweis des Hauptsatzes auf S. 69, der auf die Mächtigkeit resp. die Gesamtheit der Zahlen der zweiten Zahlklasse nicht mehr Bezug nimmt[1]).

6. Wir wenden uns endlich zu den nirgends dichten abgeschlossenen Mengen der Ebene und des Raumes. Wie aus den Resultaten der folgenden Seiten hervorgeht, sind ihre Eigenschaften denen der linearen Mengen durchaus analog.

Sei T eine in dem ebenen Bereich H enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Menge, und $M = \{m\}$ ihre Complementärmenge bezüglich H. Um der Untersuchung ihrer gegenseitigen Beziehungen eine zwingende Form zu geben, construiren wir zunächst um einen Punkt m von M einen von den Punkten von T freien Bereich[2]).

Dazu nehme man in der Ebene eine x- und y-Axe beliebig an, der Einfachheit halber rechtwinklig, und es sei τ dasjenige, notwendig existirende, den Axen parallel gerichtete Rechteck, dessen Seiten mindestens je einen Punkt von T enthalten, während aufserhalb davon kein Punkt von T liegt. Dieses Rechteck heifse der zu T gehörige Bereich τ.

Sei nun m ein innerer Punkt von τ, und q ein um ihn als Mittelpunkt liegendes, den Axen parallel gerichtetes Quadrat, dessen sämtliche inneren Punkte wieder Punkte von M sind, so giebt es für diese Quadrate eine Grenzlage q_ω, so dafs auf dem Umfang von q_ω mindestens ein Punkt von T liegt; falls nicht etwa das bezügliche Wachstum von q bereits dadurch einen Stillstand erfährt, dafs eine oder mehrere seiner Seiten mit Seiten von τ zusammenfallen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dafs nur eine Seite s_1 von q_ω mit einer Seite von τ zusammenfällt oder Punkte von T enthält; zugleich setzen wir fest, dafs ein solcher Punkt nicht ein Eckpunkt des Quadrats sei. Wir lassen jetzt das Quadrat q_ω so wachsen, dafs die Seite s_1 fest bleibt. Die drei übrigen Seiten sind nach Annahme von Punkten von T frei, und zwar einschliefslich der Eckpunkte. Es giebt dann wieder eine Grenzlage r_ω, die ein Rechteck ist, so dafs eine der drei beweglichen Seiten entweder

1) Vgl. S. 65 dieses Berichts.

2) Vgl. auch eine Note des Verfassers in den Nachr. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1899, S. 282.

einen Punkt von T enthält oder mit einer Seite von τ zusammenfällt, während das Innere keine Punkte von T enthält. Ist s_2 die bezügliche Seite, so lassen wir das Rechteck r_ω weiterwachsen, so dafs s_1 und s_2 fest bleiben, während die beiden andern Seiten immer wieder einem Quadrat um m angehören. Es wird dann noch eine dritte und zuletzt auch die vierte Seite fest, und wir erhalten so zu m einen von der Richtung der x- und y-Axe abhängigen, sonst aber eindeutig bestimmten rechteckigen Bereich, dessen Inneres von Punkten von T frei ist, während sein Umfang notwendig mindestens einen Punkt von T enthält. Wir nennen ihn den zu m gehörigen punktfreien Bereich δ in bezug auf τ. Man sieht übrigens, dafs, wenn zugleich zwei oder mehr Seiten des veränderlichen Quadrats fest werden, dadurch nur das vorstehende Verfahren abgekürzt wird; ebenso, wenn ein Punkt t in einen Eckpunkt des Quadrats fällt, indem dadurch beide durch ihn gehenden Seiten fest werden.

7. Die Construction des punktfreien Bereiches δ für jeden Punkt m erscheint mir als das wesentlichste Hilfsmittel, um die Sätze über lineare Mengen auf ebene Mengen zu übertragen. Ehe ich dies thue, will ich auf die Unterschiede hinweisen, die für diesen Bereich bei linearen und ebenen Mengen bestehen. Der Bereich δ ist für lineare Mengen eindeutig bestimmt, bei ebenen Mengen hängt er von der Wahl der festen Richtungen ab. Ferner gehören bei linearen Mengen beide Endpunkte des Intervalls δ der Menge Q an; bei ebenen Mengen braucht δ nur einen Punkt von T auf dem Umfang zu enthalten, es können aber auch unendlich viele, ja sogar alle Punkte des Umfangs der Menge T angehören. Ferner gehört zu allen Punkten des linearen Intervalls δ dasselbe Intervall, nämlich δ selbst; bei den ebenen Mengen können jedoch zu zwei Punkten m' und m'' von δ Bereiche δ' und δ'' gehören, die unter sich und von δ verschieden sind[1]). In diesem Umstand besteht eine wesentliche Schwierigkeit. Im allgemeinen kann man freilich nachweisen, dafs wenigstens zu allen Punkten einer gewissen Umgebung von m ebenfalls noch δ als Bereich gehört, oder dafs diese Umgebung in eine endliche Zahl von Gebieten zerfällt, deren jedem der nämliche Bereich zugehört; es giebt jedoch einen Fall, in dem sich dieser Nachweis nicht ermöglichen läfst, und in ihm verliert daher der für lineare Mengen mögliche Schlufs, dafs es einen gröfsten Bereich giebt, seine Beweiskraft.

Aus diesem Grunde müssen wir hier einen andern Weg einschlagen, der übrigens auch für lineare Mengen gangbar ist. Sei wieder m ein Punkt von M, so kann sein Bereich δ ganz innerhalb τ liegen, er kann aber auch mit τ eine oder mehrere Seiten

1) Diese Bereiche greifen teilweise übereinander.

gemein haben, ja selbst mit τ identisch sein. Ist δ nicht mit τ identisch, so verlängere man, wenn nötig, die Seiten von δ bis zum Schnitt mit τ, dadurch wird τ in rechteckige Teile zerlegt, von denen einer δ ist; die übrigen, deren Zahl höchstens acht beträgt, seien

$$\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_\nu,$$

wo also $1 \leqq \nu \leqq 8$ ist. Im Rechteck τ_i nehme man den Punkt m_i von M beliebig an und construire seinen punktfreien Bereich δ_i in bezug auf τ_i; falls er nicht mit τ_i identisch ist, so zerlegt er τ_i in δ_i und die Restbereiche

$$\tau_{i1}, \tau_{i2}, \cdots \tau_{i\nu'},$$

wo wiederum $1 \leqq \nu' \leqq 8$ ist. In dieser Weise kann man weiter gehen und erhält so wiederum eine Reihe von Rechtecken

$$\tau, \tau_i, \tau_{ik}, \tau_{ikl}, \cdots \tau_N, \cdots$$

und in ihnen die punktfreien Bereiche

$$\delta, \delta_i, \delta_{ik}, \delta_{ikl}, \cdots \delta_N, \cdots,$$

so dafs jeder Bereich δ_N entweder innerhalb τ_N liegt oder damit identisch ist. Die so bestimmte Menge punktfreier Bereiche bezeichnen wir durch

$$D = \{\delta_{ikl} \cdots\} = \{\delta_N\}.$$

Sei nun t irgend ein Punkt von T, der nicht auf dem Umfang eines Bereiches δ_N liegt, so schliefst man, wie bei den linearen Mengen, dafs eine Reihe von Rechtecken

$$\tau_i, \tau_{ik}, \tau_{ikl}, \cdots \tau_N, \cdots$$

mit bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$ existirt, so dafs jedes ein Teil des vorhergehenden ist, und t in allen enthalten ist. Da t nicht auf dem Umfang eines δ_N liegen soll, so kann die Reihe nicht abbrechen; denn sonst würde das letzte Rechteck $\tau_{ikl} \cdots\cdot$ zugleich einen Bereich $\delta_{ikl} \cdots\cdot$ darstellen, auf dessen Umfang t liegen müfste. Bricht die Reihe nicht ab, so convergirt sie entweder gegen einen Punkt, oder gegen eine Strecke, oder gegen eine Grenzlage, die selbst ein Rechteck ist. Convergirt sie gegen einen Punkt, so folgt wie bei den linearen Mengen, dafs dieser Punkt auch als Grenzpunkt solcher Punkte von T darstellbar ist, die auf den Bereichen

$$\delta_i, \delta_{ik}, \delta_{ikl}, \cdots \delta_N, \cdots$$

liegen, wo die Indices dieser Reihe mit denen der obigen übereinstimmen. Convergirt die Reihe gegen eine Strecke h, so mufs auch auf ihr mindestens ein Punkt existiren, der in dieser Weise als Grenzpunkt darstellbar ist; es kann übrigens die Strecke h noch andere Punkte von T enthalten, doch ist dies nur so möglich, dafs sie zusammen eine abgeschlossene Menge bilden.

Convergirt dagegen die Reihe gegen ein Rechteck τ_ω, so hat es mindestens eine Seite, die nicht mit einer Seite eines Rechteckes τ_N zusammenfällt, und man schliefst zunächst wieder, dafs der Umfang von τ_ω mindestens einen Punkt von T enthält, der sich durch eine Folge wie die obige darstellen läfst. Mit τ_ω kann man verfahren wie eben mit τ; zu einem inneren Punkt m_ω von τ_ω construirt man zunächst den punktfreien Bereich δ_ω und erhält, so fortfahrend, eine Bereichmenge

$$D_1 = \{\delta_{\omega+ikl\ldots}\} = \{\delta_{\omega+N}\},$$

die zu τ_ω die nämliche Beziehung hat, wie D zu τ. So kann man weitergehen; man kann zu Mengen

$$D, D_1, D_2, \cdots D_\omega, \cdots D_\alpha, \cdots$$

mit transfinitem Index gelangen, aber diese Reihe kann nur eine endliche oder abzählbare Menge von Gliedern enthalten. Irgend zwei dieser Mengen haben nämlich die Eigenschaft, dafs die in sie eingehenden Rechtecke sämtlich aufserhalb von einander liegen, woraus gemäfs S. 13 die Behauptung folgt. Man wird daher den Punkt t nach einer abzählbaren Reihe von Schritten, resp. mittelst einer abzählbaren Menge von Rechtecken δ erreichen.

Die so bestimmte Menge bezeichnen wir nun wieder durch

$$D = \{\delta_\nu\},$$

indem wir uns die Bereiche δ_ν der Gröfse nach geordnet denken. Solcher Mengen kann es hier für dieselbe Menge T sehr wohl verschiedene geben, und zwar sogar unzählig viele. Für jede von ihnen besteht aber die Eigenschaft, dafs wir für den Punkt t eine unendliche Reihe von Rechtecken

$$\tau'_i, \tau'_{ik}, \tau'_{ikl}, \cdots$$

mit bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$, die t als inneren Punkt oder als Punkt des Umfanges enthalten, so bestimmen können, dafs diese Reihe notwendig gegen t selbst convergirt, oder doch gegen eine Strecke, der t angehört[1]). Wir erhalten somit schliefslich folgendes Resultat:

VIII. Zu jeder nirgends dichten abgeschlossenen ebenen Menge T läfst sich durch eine abzählbare Reihe von Schritten eine wohl definirte abzählbare überall dichte Menge $D = \{\delta_\nu\}$ von Bereichen construiren, so dafs jeder Punkt von T auf dem Umfang eines Bereiches liegt, oder ein Grenzpunkt solcher Punkte ist, oder aber einer Strecke

1) Dies kann z. B. so geschehen, dafs man von den eben zur Erreichung von t benutzten nur solche beibehält, dafs jeder nicht gröfser als sein vorhergehender ist, die also in $\{\delta_\nu\}$ consecutiv sind.

angehört, die als gemeinsame Grenzlage derartiger Bereiche betrachtet werden kann[1]).

Man wird nun wieder fragen müssen, wann die Menge abzählbar ist, und wann nicht. In dieser Hinsicht ergiebt sich zunächst:

IX. Ist die abgeschlossene Menge T eine abzählbare Menge Q, so mufs jeder Bereich δ längs seines ganzen Umfangs an benachbarte Bereiche δ', δ'', $\cdots$ angrenzen oder einen Teil des Umfangs des Bereichs $\mathfrak{r}$ bilden, in dem Q enthalten ist.

Die Bedingung dieses Satzes ist notwendig, jedoch nicht hinreichend. Ist nämlich unsere Menge T eine perfecte Menge, so wird dadurch der Lage der Bereiche δ nur die folgende Beschränkung auferlegt, die diesmal nicht so einfach ist, wie bei den linearen Mengen. Haben zwei Bereiche δ' und δ'' eine Strecke h ihres Umfangs gemein, so mufs das Innere dieser Strecke entweder punktfrei sein, oder die auf ihr enthaltene lineare Punktmenge mufs selbst perfect sein. Ein isolirter Punkt einer solchen Menge würde nämlich, da δ' und δ'' punktfrei sind, auch für die Menge T ein isolirter Punkt sein. Es folgt also:

X. Die Gebietsmenge $D = \{\delta\}$ bestimmt stets und nur dann eine perfecte Menge, falls die Bereiche δ aufser einander liegen, oder aber jede zweien von ihnen gemeinsame Strecke punktfrei ist oder selbst eine lineare perfecte Menge enthält.

Die Structur der allgemeinsten nicht perfecten abgeschlossenen Mengen kann, wie bei den linearen Mengen, jetzt wieder so definirt werden, dafs man in jeden Bereich δ_N einer perfecten Menge oder auf seinen Umfang eine abzählbare Menge R_N setzt, die selbst abgeschlossen ist oder es unter Hinzufügung von Punkten der perfecten Menge wird, so dafs auch hier die Formel (S. 78)

$$Q = \Sigma R_N + T$$

besteht. Da jedoch die Gebietsmenge D nicht eindeutig bestimmt ist, so entsteht die Frage, ob diese Darstellung eindeutig ist. Dies ist nun in der That der Fall und folgt aus dem nachstehenden, von Vivanti zu diesem Behuf aufgestellten Satz:

XI. Zerfällt eine perfecte Menge S in zwei Mengen S_1 und S_2, von denen die eine abgeschlossen ist, so hat die andere die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Ist nämlich S_1 die abgeschlossene Menge, so giebt es Gebiete H, in denen S_1 nirgends dicht bezüglich S ist, da ja sonst $S_1 = S_1' = S$ wäre. Es giebt daher auch Gebiete H_1, in denen kein Punkt von S_1 liegt, deren sämtliche zu S gehörigen Punkte also Punkte von S_2

1) Es ist wahrscheinlich, dafs sich dies letztere durch geeignete Wahl der Richtungen der Bereichseiten vermeiden läfst.

sind. Damit ist der Satz bewiesen. Aus ihm folgt nun auch die Eindeutigkeit. Sei nämlich

$$Q = R + T = R_1 + T_1,$$

so hat man

$$T_1 = \mathfrak{D}(R, T_1) + \mathfrak{D}(T, T_1) = R_2 + T_2.$$

Nun mufs, wie ersichtlich ist, T_2 abgeschlossen sein, also müfste $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{c}$ sein, was unmöglich ist. Daher ist $R_2 = 0$, und daraus folgt $T_2 = T = T_1$.

8. Auf Grund der vorstehenden Analyse kann man die über ebene und räumliche Mengen von Cantor, resp. Baire angegebenen Sätze unmittelbar erschliefsen. Ist zunächst T eine ebene perfecte Menge, so läfst sich in ihr immer eine Teilmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ angeben. Falls nämlich in T eine lineare perfecte Teilmenge vorhanden ist, so ist sie bereits eine solche; wenn dies aber nicht der Fall ist, so kann der zu einem Punkt m gehörige Bereich δ mit τ höchstens zwei Seiten gemein haben, und daraus folgt, dafs τ in mindestens zwei Teilbereiche τ_i zerfällt, und zwar so, dafs jedes τ_i Punkte von T im Innern enthält. Jede unendliche Folge

$$\tau_i, \tau_{ik}, \tau_{ikl}, \cdots,$$

bei der die Indices 0 oder 1 sind, convergirt daher notwendig mindestens gegen einen Punkt von T, und diese Punkte liefern die Teilmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Damit ist gezeigt, dafs die ebenen perfecten Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen.

Da die vorstehenden Entwicklungen auf Mengen eines jeden C_ν übertragbar sind, so können wir den folgenden Satz als bewiesen betrachten:

XII. Jede perfecte Menge des C_ν hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$[1]).

Bei der Wichtigkeit des Satzes möge hier noch ein zweiter Beweis eine Stelle finden, der sich des Schlusses von ν auf $\nu + 1$ bedient. Für eine ebene Menge T_2 geschieht dies so, dafs man sie auf eine Gerade projicirt. Von der so entstehenden linearen Menge T_1 zeigt man leicht, dafs sie abgeschlossen ist und nur dann einen isolirten Punkt enthalten kann, wenn auf der durch ihn laufenden Projectionsgeraden eine lineare perfecte Teilmenge von T_2 liegt. Daraus ist der Satz für T_2 unmittelbar zu schliefsen.

Aus unserer allgemeinen Analyse folgt auch leicht ein Satz Cantor's, der die Umkehrung davon ist, dafs jede Ableitung eine abgeschlossene Menge ist. Er lautet:

---

1) Ein Beweis dieses Satzes wurde zuerst von J. Bendixson gegeben; Bih. Svensk. Vet. Handl. 9, Nro 6. (1884). Cantor hatte vorher den Satz nur behauptet, Math. Ann. 23, S. 488.

Dafs dieser für nirgends dichte Mengen bewiesene Satz auch für solche Mengen gilt, die einen überall dichten Bestandteil haben, ist evident.

XIII. Jede abgeschlossene Menge Q läfst sich als Ableitung einer anderen Menge auffassen, insbesondere einer isolirten Menge, falls Q nirgends dicht ist.

Ist nämlich Q in einem Gebietsteil H überall dicht, so ist sie Ableitung jeder in H überall dichten Menge. Ist dagegen Q in H nirgends dicht und D wieder die zugehörige Gebietsmenge, so kann man stets in das Innere oder auf den Umfang von δ_N eine isolirte Menge so setzen, dafs deren Ableitung die auf dem Umfang von δ_N liegenden Punkte liefert.

Ferner ergiebt sich, dafs die oben (S. 79 u. 80) gemachten Ausführungen, die die Übertragung der dort genannten Begriffe auf perfecte lineare Mengen betreffen, ungeschmälert für perfecte Mengen eines C_ν Kraft behalten; ebenso auch der an sie anschliefsende Satz über die fortgesetzte Reduction einer perfecten, resp. abgeschlossenen Menge auf Teilmengen der gleichen Natur.

Endlich fliefst auch der von R. Baire aufgestellte Satz[1]) leicht aus unseren allgemeinen Entwicklungen. Er lautet, dafs die Projection einer ebenen nirgends dichten abgeschlossenen Menge T_2, die keine Strecke und kein Curvenstück enthält, auf einer Geraden wieder nirgends dicht und abgeschlossen ist. Dafs die projicirte Menge T_1 abgeschlossen ist, wurde schon oben bemerkt; dafs sie nirgends dicht ist, folgt so: Da die Bereiche δ_N abzählbar sind, und die Seiten eines jeden δ_N durch die Punkte von T in eine abzählbare Menge von punktfreien Intervallen zerfallen, so ergiebt sich auf der Geraden durch deren Projection ebenfalls eine abzählbare Menge punktfreier Intervalle. Da nun jeder innere Punkt eines solchen Intervalles der Menge T_1 nicht angehört, so folgt damit die Existenz von Punkten der Geraden, die nicht zu T_1 gehören; womit der Satz bewiesen ist.

Viertes Capitel.

Der Inhalt der Punktmengen.

Die Betrachtungen über den Inhalt der Punktmengen bilden ein Gebiet, auf dem mancherlei Controversen auszutragen waren. Einerseits begegnen wir hier Resultaten, die leicht paradox erscheinen konnten; andererseits hat die Inhaltsdefinition, wie jede mathematische Definition, zunächst einen gewissen subjectiven Charakter, und erst die aus ihr fliefsenden Folgerungen entscheiden darüber, ob sie den in der Sache ruhenden Zwecken gemäfs gewählt sind.

Historisch knüpft der Begriff des Inhalts einer Punktmenge P an den Integralbegriff an, insbesondere an die Frage, ob eine Function, die in den Punkten von P unstetig ist, integrirbar ist

1) Ann. di mat. (3) 3, S. 94.

oder nicht. Diesem Umstand verdankt der Inhaltsbegriff seine ursprüngliche Formulirung. Hankel ist der erste, der sich hiermit beschäftigt hat. Er teilt das Intervall τ, in dem die lineare Menge P liegt, in ν Intervalle, so dafs jeder Punkt von P innerer Punkt eines dieser Intervalle ist, und betrachtet als Inhalt der Punktmenge den Grenzwert, dem die Summe derjenigen Intervalle, in denen die Punkte von P liegen, bei Verkleinerung der einzelnen Intervalle zustrebt[1]). Dafs hier ein von der ursprünglichen Annahme der Intervalle unabhängiger Grenzwert vorliegt, wird durch die bekannte Schlufsweise gefolgert. Der bezügliche Beweis ist von O. Stolz[2]) und nach ihm von A. Harnack[3]) gegeben worden.

Die Hankel'sche Inhaltsdefinition kann auf Punktmengen eines beliebigen C_ν übertragen werden (2). Cantor ist es, der die bezüglichen Formulirungen zuerst in allgemeinster Form aufgestellt hat[4]). Er legt um jeden Punkt der Menge P eine Kugel von demselben Radius und betrachtet den Grenzwert derjenigen aus einer endlichen Zahl von Raumteilen bestehenden Summe, die durch das Innere der Kugeln dargestellt wird. Auf dem Boden dieser Definition hat man der Punktmenge ihre Grenzstellen von vornherein zuzuzählen, so dafs es sich nur um den Inhalt abgeschlossener Mengen handelt. Diese Festsetzung ist für den Zweck, für den die Inhaltsdefinition geschaffen wurde, sicher notwendig[5]); im übrigen aber liegt in ihr doch wieder ein willkürliches Element. Peano und nach ihm Jordan haben demgemäfs den Inhaltsbegriff dadurch schärfer zu formuliren gesucht, dafs sie beliebige Mengen ins Auge fassen und für den Inhaltsbegriff wie für das bestimmte Integral, dessen einfachsten Fall er ja darstellt, zwei verschieden definirte Grenzwerte einer ebenfalls endlichen Zahl von Summanden zu Grunde legen und demgemäfs den äufseren Inhalt von dem inneren unterscheiden (3).

Einen hiervon wesentlich abweichenden Standpunkt hat kürzlich E. Borel eingenommen[6]). Er sieht ebenfalls davon ab, der Menge P ihre Grenzpunkte hinzuzufügen, sieht aber überdies auch von der Forderung einer endlichen Menge von Gebieten ab, die alle Punkte einer Menge P enthalten[7]); er denkt sich jeden Punkt von P mit einem beliebigen Bereich umgeben und zieht den von ihnen erfüllten Raumteil, resp. dessen Grenze in Betracht (4). Eine Folge

1) Math. Ann. 20, S. 87 ff.
2) Math. Ann. 23, S. 152.
3) Math. Ann. 25, S. 241. Vgl. auch Pasch, Math. Ann. 30, S. 132.
4) Math. Ann. 23, S. 473.
5) Harnack hat zuerst auf den Einflufs hingewiesen, den die Grenzpunkte für den Inhaltsbegriff haben können. Math. Ann. 25, S. 241.
6) Leçons, S. 46 ff.
7) Auch dies findet sich bei Harnack a. a. O. bereits vorgebildet.

dieser Definition ist es, dafs alle abzählbaren Punktmengen den Inhalt Null haben, während dies nach der Hankel-Cantor'schen Definition nur dann der Fall sein kann, wenn die Mengen nirgends dicht sind. Die Differenz zwischen beiden Definitionen tritt naturgemäfs nur bei solchen Mengen hervor, bei denen der äufsere und innere Inhalt von einander verschieden sind.

Der erste allgemeinere Inhaltssatz stammt von Cantor[1]); er lautet (1), dafs jede lineare Menge, deren Ableitung abzählbar ist, den Inhalt Null besitzt[2]). Später hat Cantor den analogen Satz auch für Mengen eines beliebigen C_ν bewiesen. Hankel hatte irrtümlich geglaubt, dafs jede nirgends dichte lineare Menge den Inhalt Null hat[3]); ihm waren die perfecten Mengen, insbesondere ihr Zusammenhang mit den überall dichten Gebietsmengen, unbekannt geblieben. Der Hankel'sche Irrtum wurde zuerst von St. Smith aufgedeckt, der ein erstes Beispiel einer solchen Menge gab, deren Inhalt nicht Null ist[4]). Später haben auch du Bois-Reymond[5]), Harnack[6]), W. Veltmann[7]) und Volterra[8]) selbständig derartige Beispiele construirt. Veltmann hat auch bereits ein Beispiel einer ebenen Menge angegeben, die Inhalt hat. Ein erstes allgemeines Kriterium, wann eine lineare nirgends dichte Menge den Inhalt Null hat, ist von Harnack angegeben worden (5).

1. Der erste Cantor'sche Beweis des Satzes, dafs eine lineare Menge Q unausgedehnt ist, wenn Q' abzählbar ist, hat nicht allein historisches, sondern auch methodisches Interesse und mag daher hier eine Stelle finden. Der Einfachheit halber denke man sich die Menge Q im Intervall $0 \cdots 1$ enthalten, wohin man sie z. B. durch Ähnlichkeitstransformation projiciren kann. Der Beweis beruht darauf, dafs die zugehörige Intervallmenge $D = \{\delta\}$ abzählbar ist, während die Menge der Punkte der Einheitsstrecke die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Sei u die Gesamtsumme aller Intervalle δ, so ist zu zeigen, dafs $u = 1$ ist.

Ist x irgend ein Punkt der Strecke $0 \cdots 1$, so sei $s = f(x)$ die Summe aller Intervalle δ, die x vorangehen, mit der Mafsgabe, dafs, falls x ein innerer Punkt oder Endpunkt eines Intervalls ist,

1) Math. Ann. 21, S. 54 (1883).
2) Eine solche Menge heifst auch unausgedehnt oder inhaltslos. Bei Harnack heifst sie in wenig glücklicher Bezeichnung discret; du Bois nennt sie wegen ihrer Beziehung zum Integralbegriff integrirbar.
3) Math. Ann. 20, S. 88.
4) Proceedings of the Lond. math. Soc. 6, S. 148 (1875). Vgl. auch S. 101 dieses Berichts.
5) Math. Ann. 16, S. 128.
6) Math. Ann. 19, S. 239.
7) Zeitschr. f. Math. 27, S. 176 u. 199.
8) Giorn. di mat. 19, S. 80 ff. (1881).

dieses Intervall bis zum Punkt x in die Summe s eingehen soll. Diese Function $f(x)$ ist sicher eine stetige Function von x, da ja

$$f(x+h) - f(x) \leqq h$$

ist; insbesondere ist, falls x und $x+h$ innerhalb desselben Intervalls δ liegen, $f(x+h) - f(x) = h$. Demnach ist

$$\varphi(x) = x - f(x)$$

eine stetige Function, die innerhalb jedes Intervalls δ constant ist[1]) und die daher ihren Wert höchstens in den Punkten von Q ändern kann. Da nun Q abzählbar ist, so ist auch die Wertmenge von $\varphi(x)$ abzählbar. Nun ist

$$f(0) = 0,\ f(1) = u, \quad \text{also} \quad \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1 - u.$$

Als stetige Function von x mufs aber $\varphi(x)$ jeden Wert zwischen 0 und $1-u$ wirklich annehmen; wäre nun $u < 1$, so würde die Wertmenge von $\varphi(x)$ die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, während sie doch, wie wir eben sahen, abzählbar ist.

2. Die allgemeine Inhaltsdefinition für eine im C_ν enthaltene abgeschlossene Punktmenge $P = \{p\}$ hat bei Cantor folgenden Wortlaut:

Man lege um jeden Punkt p eine ν-dimensionale Kugel mit dem Radius ϱ, der für alle Kugeln constant sein soll. Diese Kugeln erfüllen einen Raumteil $\Pi(\varrho, P)$, der ihr kleinstes gemeinsames Multiplum ist und der mit abnehmendem ϱ ebenfalls abnimmt. Für $\lim \varrho = 0$ convergirt daher $\Pi(\varrho, P)$ gegen eine bestimmte, niemals negative untere Grenze; diese ist der Inhalt von P und wird durch $J(P)$ bezeichnet.

Der wichtigste, für diesen Inhaltsbegriff bestehende Satz lautet:

I. Der Inhalt einer Punktmenge ist gleich dem ihrer Ableitung: $J(P) = J(P')$.

Die wiederholte Anwendung dieses Satzes, der sowohl den Schlufs von ν auf $\nu+1$, wie auch den von $\{\nu\}$ auf ω gestattet, führt schliefslich zu der Folgerung, dafs

$$J(P) = J(P') = J(P^{(\alpha)})$$

ist, wo α die für P charakteristische Zahl ist (S. 68 u. 69). Ist nun zunächst $P^{(\alpha)} = 0$, also P' abzählbar, so ist auch der Inhalt von P gleich Null, also P unausgedehnt, d. h.:

II. Jede Punktmenge P eines C_ν, deren Ableitung P' abzählbar ist, hat den Inhalt Null.

Ist dagegen $P^{(\alpha)}$ perfect, so ist der Inhalt von P gleich dem einer perfecten Menge, so dafs die Inhaltsbestimmung nur für perfecte Mengen in Frage steht. Es folgt also weiter:

---

1) Vgl. auch die Erörterung dieser Functionsklasse in Abschnitt III, Cap. 4, wo die Relation $\varphi(x) = 0$ ebenfalls bewiesen wird.

III. Der Inhalt einer Menge P, deren Ableitung P' nicht abzählbar ist, ist gleich dem Inhalt der in P' enthaltenen perfecten Menge $P^{(\alpha)}$.

Für den Satz I hat Cantor folgenden Beweis gegeben. Es ist klar, dafs der Satz nur zu beweisen ist, falls P auch isolirte Punkte enthält. Man betrachte nun wieder für beliebiges ϱ den oben definirten Bereich $\Pi(\varrho, P')$. Dieser Bereich wird bei hinlänglich kleinem ϱ nur einen Teil des Bereiches $\Pi(\varrho, P)$ ausmachen, d. h. es ist

$$\Pi(\varrho, P) - \Pi(\varrho, P') > 0.$$

Ferner ist klar, dafs aufserhalb des Bereiches $\Pi(\varrho, P')$ nur eine endliche Anzahl isolirter Punkte von P liegt, da sie sonst eine Häufungsstelle besitzen müfsten. Ist M die von ihnen gebildete Menge, so kann man zunächst, nachdem eine Gröfse ε fest gewählt ist, ϱ so klein annehmen, dafs der Bereich $\Pi(\varrho, P - M)$ ganz innerhalb $\Pi(\varepsilon, P')$ liegt, so dafs also

$$\Pi(\varrho, P - M) < \Pi(\varepsilon, P')$$

ist. Es ist daher auch

$$\Pi(\varrho, P) - \Pi(\varrho, P') < \Pi(\varepsilon, P') - \Pi(\varrho, P') + \Pi(\varrho, P) - \Pi(\varrho, P - M),$$

und hieraus schliefst Cantor durch Grenzübergang, indem er bei festem ε zunächst $\lim \varrho = 0$ werden läfst, dafs

$$J(P) = J(P')$$

ist. Dafs hier auch der Schlufs von $\{\nu\}$ auf ω gestattet ist, ist in diesem Fall unmittelbar evident.

Ich erwähne endlich noch folgenden Satz[1]):

IV. Ist Q eine abgeschlossene Menge, Q_ν Teilmenge von Q, und wird Q_ν mit wachsendem ν überall dicht in Q, so ist $\lim J(Q_\nu) = J(Q)$.

Denn es ist $J(Q_\nu) = J(Q_\nu')$, und wenn Q_ν mit wachsendem ν überall dicht in Q wird, so convergirt Q_ν' gegen Q selbst, woraus der Satz folgt.

3. Die von Peano[2]) und Jordan[3]) herrührenden Formulirungen lasse ich hier für den R_3 folgen.

Sei die Menge $P = \{p\}$ in einem endlichen Raumteil H enthalten, so construire man im R_3 irgend eine Gebietsteilung, z. B. eine solche in Würfel der Kante ε. Ist Σ_ε die Summe aller Würfel, deren sämtliche Punkte innere Punkte der Menge P sind, so convergirt diese Summe für $\lim \varepsilon = 0$ gegen einen bestimmten Grenzwert S, von dem man in bekannter Weise zeigt, dafs er von

1) Vgl. W. F. Osgood, Am. Journ. of Math. 19, S. 178.
2) Applicazioni geometriche del calc. infinit. Turin 1887, S. 153 ff.
3) Journ. de Math. (4) Bd. 8, S. 77 ff. (1892).

der Art der Gebietsteilung unabhängig ist[1]). Man fasse jetzt zweitens diejenigen Würfel der Kante ε ins Auge, die innere Punkte von P oder Punkte auf der Grenze von P enthalten[2]), so hat ihre Summe die Form $\Sigma_\varepsilon + \Sigma_\varepsilon'$ und convergirt ebenfalls gegen einen von der Gebietsteilung unabhängigen Grenzwert $S + S'$. Ist $S' = 0$, so nennen Jordan und Peano die Menge P mefsbar und S ihren Inhalt. Es convergirt also dann die Summe der Würfel, die die Punkte auf der Grenze enthalten, gegen Null. Ist dagegen $S' > 0$, so wird zwischen dem äufseren Inhalt $S + S'$ und dem inneren Inhalt S unterschieden; die Menge ist alsdann nicht mefsbar. Der äufsere Inhalt stimmt mit dem Cantor'schen Inhaltsbegriff überein.

Ein einfaches Beispiel einer nicht mefsbaren Menge bilden die rationalen Punkte eines Bereiches H; ihr äufserer Inhalt ist H, während der innere Null ist.

Ist der äufsere Inhalt einer Menge Null, so ist die Menge natürlich mefsbar und hat den Inhalt Null; es kann also die Bezeichnung unausgedehnt in dem oben benutzten Sinne für sie beibehalten werden.

Es scheint mir übrigens zweckmäfsig, die vorstehenden Inhaltsdefinitionen formal noch etwas abzuändern. Man denke sich die Menge P innerhalb eines Würfels w und in ihm wieder eine Würfelteilung mit der Kante ε. Für einen einzelnen dieser Würfel gilt dann, dafs entweder jeder innere Punkt von ihm zu P gehört, oder es gehört kein innerer Punkt zu P, oder es gehören endlich einige innere Punkte zu P. Ist Σ_ε die Summe der erstgenannten Würfel, sind Σ_ε'' resp. Σ_ε' die beiden andern Summen, und ist $J(w)$ der Inhalt von w, so ist immer

$$\Sigma_\varepsilon + \Sigma_\varepsilon' + \Sigma_\varepsilon'' = J(w),$$

und es gilt daher auch für die Grenzwerte die Gleichung

$$S + S' + S'' = J(w).$$

Ist jetzt $S + S' = 0$, so ist $S'' = J(w)$; die Summe der punktfreien Würfel convergirt also bei unausgedehnten Mengen in der That gegen $J(w)$, und umgekehrt.

Für den so bestimmten Inhaltsbegriff besteht, wie leicht ersichtlich, der folgende Satz:

V. Sind P und P_1 mefsbare Mengen ohne gemeinsame Punkte, so ist auch die Vereinigungsmenge (P, P_1) mefsbar, und ihr Inhalt gleich der Summe der Einzelinhalte.

Der gleiche Satz gilt auch für den inneren Inhalt zweier Mengen, für den äufseren dagegen trifft er nicht mehr zu. Ebenso-

1) Vgl. z. B. Peano, Atti di Torino 18, S. 439.
2) Das Genauere über diese Begriffe im vierten Abschnitt.

wenig braucht er für den inneren Inhalt unendlich vieler Mengen erfüllt zu sein.

4. Der vorstehende Satz ist es, den Borel[1]) zur Grundlage seiner Inhaltsdefinition gemacht hat. Er bezeichnet ihn als die wesentliche Eigenschaft des Inhaltsbegriffs und verlangt daher, die Inhaltsdefinition müsse so gebildet werden, dafs sie diese Eigenschaft ausdrückt. Falls daher das auf einer Strecke τ liegende Continuum C in zwei Punktmengen P und P_1 irgendwie gespalten wird, so soll

$$\tau = J(C) = J(P) + J(P_1)$$

sein. Hierzu fügt Borel die zweite Forderung, dafs diese Gleichung auch für jede abzählbare Menge von Punktmengen erfüllt sein soll. Da nun eine endliche Menge von Punkten stets den Inhalt Null hat, und jede abzählbare Punktmenge als Summe von abzählbar vielen endlichen Mengen darstellbar ist, so fliefst daraus die Folgerung, dafs jede abzählbare Menge den Inhalt Null besitzt. Nun nimmt freilich die zweite Forderung Borel's keineswegs die gleiche Stellung ein wie die erste. Sie hat zunächst nur den Charakter eines Postulats, da ja die Frage, ob eine Eigenschaft endlicher Summen auf unendlich viele Summanden ausdehnbar ist, nicht durch Festsetzung erledigt werden kann, sondern vielmehr der Untersuchung bedarf. Borel zeigt aber, dafs seine Definition in sich widerspruchsfrei ist.

Der oben bereits citirte Satz Borel's, dafs eine abzählbare Menge stets den Inhalt Null hat, ergiebt sich nun folgendermafsen: Der Einfachheit halber beweise ich ihn für eine lineare Menge

$$X = \{x_\nu\} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\ x_\nu,\ \cdots),$$

die im Intervall $a \cdots b$ enthalten sei. Ist ε eine beliebig kleine Gröfse, so können wir doch stets eine unendliche Reihe von Gröfsen

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \cdots\ \varepsilon_\nu,\ \cdots$$

so bestimmen, dafs ihre Summe gleich ε ist. Nun construire man um jedes x_ν ein Intervall von der Breite ε_ν, so dafs x_ν im Innern des Intervalls liegt. Es werden dann einzelne dieser Intervalle ineinandergreifen[2]). Rechnen wir nun alle solchen Intervalle ε_ν als ein Intervall δ, so bilden diese Intervalle δ eine überall dichte Menge $D = \{\delta\}$, von der unmittelbar einleuchtet, dafs $\Sigma\delta < \varepsilon$ ist, d. h.:

VI. Jede auf $a \cdots b$ liegende abzählbare und überall dichte Menge kann so in Intervalle eingeschlossen werden, dafs jeder Punkt der Menge innerer Punkt eines Intervalls wird und die Intervallmenge einen beliebig kleinen Inhalt erhält.

---

1) Leçons etc., S. 46 ff.
2) Vgl. auch die genauere Darstellung auf S. 109.

Der gleiche Satz gilt offenbar für jede abzählbare Menge $P = \{p_\nu\}$ eines C_ν, falls man die Intervalle δ_ν durch Kugeln oder Würfel ersetzt, die um die Punkte p_ν gelegt werden.

5. Eine der wichtigsten Fragen ist die nach dem Inhalt der nirgends dichten perfecten Mengen T, insbesondere der linearen. Der innere Inhalt dieser Mengen ist stets Null, der äufsere Inhalt — und von ihm ist hier allein die Rede — wird durch den Wert von $\Sigma\delta_N$ bestimmt, denn dies ist der Grenzwert S'', gegen den die Summe Σ_ϵ'' der punktfreien Bereiche in diesem Fall convergirt.

Da für die Anwendungen immer nur dieser äufsere Inhalt in Frage steht, so will ich ihn von nun an wieder kurz als den Inhalt von T bezeichnen und durch $J(T)$ ausdrücken.

Die zu T gehörige Intervallmenge denken wir uns jetzt wieder der Gröfse nach geordnet und durch $D = \Sigma\{\delta_\nu\}$ dargestellt. Bleibt durch Ausscheiden von δ_1 vom Bereich τ der Teilbereich τ_1 übrig, von ihm durch Ausscheiden von δ_2 der Teilbereich τ_2, u. s. w., so ist

$$\tau = \tau_1 + \delta_1 = \tau_2 + \delta_1 + \delta_2 = \cdots = \tau_\nu + \sum_{i=1}^{\nu}\delta_i.$$

Setzt man nun

$$\delta_1 = \lambda_1\tau,\ \delta_2 = \lambda_2\tau_1,\ \cdots\ \delta_\nu = \lambda_\nu\tau_{\nu-1},$$

so erhält man

$$\tau = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_\nu)\,\tau + \sum_{i=1}^{\nu}\delta_i,$$

und hieraus folgt der Satz:

VII. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die perfecte Menge T unausgedehnt ist, besteht darin, dafs das Product

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_\nu)$$

den Grenzwert Null besitzt.

Dies wird besonders immer dann eintreten, falls alle λ_i einander gleich sind, oder falls dies wenigstens von einem gewissen Index an der Fall ist.

Der vorstehende Satz wurde für lineare Mengen von Harnack angegeben[1]); er gilt aber seiner Ableitung nach für Mengen T eines beliebigen C_ν, da ja für alle diese Mengen die Existenz einer zu ihnen gehörigen Menge $D = \{\delta_N\}$ nachgewiesen worden ist. Doch versteht sich diese Übertragung nicht ganz von selbst, da die zu einer Menge Q gehörige Bereichmenge $D = \{\delta\}$ nicht eindeutig bestimmt ist. Der Beweis, dafs für jede solche Menge D die Summen $\Sigma\delta_\nu$ und $\Sigma\epsilon$ gegen denselben Grenzwert convergiren, läfst sich jedoch

1) Math. Ann. 19, S. 239.

einfach führen und mag daher unterbleiben. Ebenso convergirt auch jede andere Summe von Bereichen, die das von der Menge Q freie Gebiet überall dicht bedecken, gegen $\Sigma\varepsilon$, was sich ohne Schwierigkeit in zwingender Form nach den bekannten Methoden darlegen läfst.

Der obige Satz hat bisher meist nur für lineare Mengen Anwendung gefunden. Ich lasse für sie noch einige Formeln folgen, deren ich für spätere Zwecke bedarf. Wie früher (S. 77), setzen wir allgemein

$$\tau_N = \tau_{N,0} + \delta_N + \tau_{N,1}$$

und setzen ferner

$$\delta_N = \lambda_N \cdot \tau_N = \lambda_N^0 \cdot \tau_{N,0} = \lambda_N' \cdot \tau_{N,1},$$

alsdann ist λ_N immer ein echter Bruch, während λ_N^0 und λ_N' jeden beliebigen endlichen positiven Wert haben können. Wird nun noch

$$\Sigma\delta_N = \Sigma\lambda_N\tau_N = \lambda^{(N)}\Sigma\tau_N$$

gesetzt, wo sich die Summation über alle 2^ν Gruppen N mit ν Indices erstreckt, so folgt:

$$\Sigma\tau_N' = (1-\lambda)(1-\lambda')\cdots(1-\lambda^{(N-1)})\tau = \Lambda^{(N)}\tau,$$

und auch hier besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs T unausgedehnt ist, darin, dafs das Product $\Lambda^{(N)}$ gegen Null convergirt.

Eine Menge T, die in keinem Intervalle unausgedehnt ist, soll als nirgends unausgedehnt oder als überall ausgedehnt bezeichnet werden. Für sie mufs $\lambda^{(N)}$ mit wachsendem ν sicher gegen Null convergiren, da ja $\lambda^{(N)}$ einen endlichen Grenzwert haben soll. Doch ist damit nicht gesagt, dafs dies auch von jeder Reihe

$$\lambda,\ \lambda_i,\ \lambda_{ik},\ \cdots\ \lambda_N,\ \cdots$$

gilt, wie auch umgekehrt, falls T unausgedehnt ist, derartige Reihen existiren können, für die das zugehörige Product

$$\Lambda_N = (1-\lambda)(1-\lambda_i)(1-\lambda_{ik})\cdots(1-\lambda_N)$$

nicht gegen Null convergirt.

Für die Art und Weise, wie sich diese Folgen über die Menge T verteilen können, vermag ich die zureichenden Bedingungen nicht anzugeben, nur bemerke ich, dafs hierfür wesentlich die Werte von λ_N^0 und λ_N' in Frage kommen werden, sowie die gleichmäfsige oder ungleichmäfsige Convergenz. Eine Aufstellung solcher Bedingungen würde sehr erwünscht sein[1]).

6. Die ebenen und räumlichen Mengen erfordern noch eine nähere Untersuchung. Ihre Inhaltseigenschaften bilden nämlich die

---

1) Man vgl. die Beispiele im Abschnitt III, Cap. 4.

natürliche Grundlage für die Theorie des Doppelintegrals und der mehrfachen Integrale. In einer ebenen Menge Q, deren Inhalt $J(Q) = \varrho$ ist, können nämlich lineare Mengen enthalten sein, deren (linearer) Inhalt gröfser oder kleiner als ϱ ist, und das gegenseitige Verhältnis dieser Mengen ist es, auf dem die Theorie der bezüglichen Integrale beruht. Es besteht zunächst der folgende Satz:

VIII. Ist Q eine ebene unausgedehnte Menge, so bilden diejenigen Geraden einer jeden Parallelschar, auf der die Teilmenge von Q einen oberhalb einer Gröfse σ liegenden Inhalt hat, eine nirgends dichte unausgedehnte Menge.

Wir denken uns die Menge Q innerhalb irgend eines Rechtecks H, teilen die Seiten h_1 und h_2 in ν_1 resp. ν_2 Teile und ziehen die bezüglichen Parallelen. Sei ferner x_σ ein solcher Punkt von h_1, durch den eine Gerade geht, auf der $J(Q^x) > \sigma$ ist. Wäre nun die Menge $X_\sigma = \{x_\sigma\}$ nicht unausgedehnt auf h_1, und ϱ ihr Inhalt, so würde die Summe derjenigen Intervalle τ von h_1, in denen Punkte x_σ liegen, stets gröfser als ϱ bleiben. Andererseits liegt in jedem über einem solchen Intervall stehenden Parallelstreifen mindestens eine Gerade h^x, für die $J(Q^x) > \sigma$ ist. Daraus folgert man aber leicht, dafs bei jeder Teilung $\Sigma_\nu' > \sigma\varrho$ sein müfste, während doch Σ_ν' bei hinreichend kleiner Teilung gegen Null convergirt.

Wichtiger noch ist der zweite Satz, der die Umkehrung des vorigen ausspricht. Er lautet:

IX. Ist Q eine ebene abgeschlossene Menge, und bilden diejenigen Geraden einer Parallelschar, auf denen die bezügliche Teilmenge von Q einen oberhalb einer Gröfse σ liegenden Inhalt hat, für jedes σ eine nirgends dichte unausgedehnte Menge, so ist auch Q unausgedehnt.

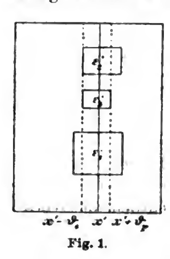


Fig. 1.

Wir denken uns wieder Q im Rechteck H, und es sei $X_\sigma = \{x_\sigma\}$ die von den bezüglichen Parallelen auf einer Rechteckseite bestimmte Menge, und $D = \{\delta_\nu\}$ die zugehörige Intervallmenge. Sei ferner (Fig. 1) x' ein Punkt innerhalb eines Intervalles δ_ν, so ist, wenn auf der durch ihn gehenden Geraden h' die Teilmenge Q' liegt, $J(Q') < \sigma$. Zur Menge Q' gehöre $E = \{\varepsilon_\nu\}$ als Intervallmenge. Alsdann wähle man die ν ersten Intervalle ε_i so, dafs

$$\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \cdots + \varepsilon_\nu' > h_2 - \sigma''$$

ist, wo ε_i' wieder beliebig innerhalb ε_i liegt. Neben jedem ε_i' läfst sich nun nach links und rechts ein rechteckiger Streifen bestimmen, der keine Punkte q enthält; ist ϑ_l die kleinste dieser Breiten nach links und ϑ_r die kleinste nach rechts für die ν Intervalle ε_i', so erhält man auf diese Weise ein bestimmtes, den Punkt x' ein-

schliefsendes Intervall $x' - \vartheta_l \cdots x' + \vartheta_r$. Über ihm errichte man den zugehörigen Parallelstreifen. Ein solches endliches Intervall $\vartheta = \vartheta_l \cdots \vartheta_r$ gehört nun zu jedem inneren Punkt x' eines Intervalles δ_i, und wenn δ_i' innerhalb δ_i liegt, so folgt zunächst wieder aus dem Heine-Borel'schen Satz, dafs man zur Bedeckung jedes Intervalles δ_i' mit einer endlichen Zahl solcher Intervalle ϑ ausreicht[1]). Wenn man nun noch μ so bestimmt, dafs bei vorgegebenem σ'

$$\delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_\mu' > h_1 - \sigma'$$

ist, so liegt in den über den Intervallen δ_i' construirten Parallelstreifen eine endliche Zahl punktfreier Bereiche η so, dafs

$$\Sigma\eta > (h_1 - \sigma')(h_2 - \sigma'')$$

ist. Da nun σ' und σ'' beliebig klein gemacht werden können, so ist damit der Satz bewiesen.

Die vorstehenden Sätze lassen sich übrigens auch in der Weise verallgemeinern, dafs man von Mengen Q handelt, die Inhalt besitzen. Ist $J(Q) = \varrho$, so kann die Menge X nicht einen Inhalt haben, der gröfser als ϱ ist, falls zu jedem x eine Parallele gehört, auf der $J(Q^x) \geqq \varrho + \sigma$ ist, und ebenso umgekehrt. Ebenso lassen sich die Sätze auf räumliche Mengen sowie auf Mengen eines beliebigen C_ν sinngemäfs übertragen.

Wichtig ist noch zu bemerken, dafs die vorstehenden Sätze versagen, falls man nicht mit abgeschlossenen Mengen operirt. Eine ebene oder räumliche Menge braucht nämlich nicht abgeschlossen zu sein, obwohl es eine Parallelschar geben kann, so dafs auf jeder dieser Parallelen die bezügliche lineare Menge selbst abgeschlossen ist. Solche Mengen kann man in mannigfacher Weise construiren, selbst so, dafs sie auf einer überall dichten Geradenschar perfect sind[2]).

---

1) Vgl. S. 51. Die Wirkung dieses Satzes besteht hier darin, es als unmöglich hinzustellen, dafs bei festgehaltenem σ entweder ν über jede Grenze wächst, oder ϑ_l und ϑ_r unter jede Grenze sinken, was man natürlich auch direct zeigen kann, indem man den Gedankengang dieses Beweises wiederholt. Ebenso fliefst die Existenz der endlichen Gröfsen ϑ_l und ϑ_r aus diesem Satz.

2) Ein einfaches Beispiel giebt Pringsheim, Ber. d. Münch. Akad. 1899, S. 50. Diejenigen Werte (x, y), die bei dyadischer Darstellung eine endliche und zwar die gleiche Zahl von Ziffern enthalten (z. B. $x = 0{,}011$ und $y = 0{,}101$), bilden eine Menge, von der auf jeder den Seiten parallelen Geraden nur eine endliche Anzahl liegt. Die Grenzpunkte der Menge erfüllen aber das ganze Rechteck. Ebenso für jedes andere Zahlsystem.

Fünftes Capitel.

Beispiele und Punktmengen besonderer Art.

Ich lasse zunächst die bemerkenswertesten Beispiele von Zahlenmengen und Punktmengen folgen, die bisher zu unserer Kenntnis gelangt sind. Die meisten dieser Punktmengen sind durch eigens erdachte Vorschriften zu bestimmten Zwecken construirt worden. Dabei hat es sich als sehr nützlich erwiesen, diese Vorschriften an die jedem Punkt zugehörige Decimalbruchdarstellung oder an eine ihr analoge Bestimmungsweise anzuschliefsen und Gesetze für die einzelnen Ziffern aufzustellen. Diese Methode geht meines Wissens wesentlich auf Peano zurück; er ist es auch, der zuerst statt des Decimalsystems die Einführung beliebiger anderer Zahlsysteme mit Erfolg benutzt hat[1]). Eine Verallgemeinerung hiervon ist diejenige Bestimmungsweise, die kürzlich Brodén benutzt hat und die darauf hinausläuft, für jede Stelle der Ziffernfolge eine andere Zahl als Basis des bezüglichen Zahlsystems zuzulassen.

Unter den allgemeinen Constructionsvorschriften erwähne ich auch hier die bereits oben (S. 78) erörterte Methode zur Herstellung nirgends dichter perfecter Mengen (2).

Am Schlufs des Capitels behandle ich (6) noch einige Fragen über gewisse besondere Kategorien von Punktmengen, die in neueren Arbeiten eine Rolle spielen, insbesondere die Erfüllung eines Intervalls mit einer unendlichen Menge perfecter Mengen.

1. Es ist leicht, eine Punktmenge P, insbesondere eine lineare, so zu bilden, dafs die ν-te Ableitung $P^{(\nu)}$ nur eine endliche Anzahl von Punkten enthält, also $P^{(\nu+1)} = 0$ ist. (Mengen erster Gattung und ν-ter Art.) So gab z. B. Ascoli die Menge[2])

$$P = \left\{ \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}} \right\},$$

in der die s_i unabhängig von einander alle positiven ganzen Zahlenwerte annehmen, und für die, wie leicht ersichtlich, $P'''' = (0)$[3]) ist.

Eine Methode allgemeinerer Art zur Erzeugung solcher Mengen ist folgende[4]). Die Menge

$$P = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{\nu}, \cdots\right)$$

hat den Nullpunkt als Grenzpunkt. Setzt man in jedes Intervall $1/\nu \cdots 1/\nu + 1$ eine Menge, die mit P ähnlich[5]) ist und an der

1) Vgl. z. B. Riv. di mat. 2. S. 41.
2) Ann. di mat. (2), Bd. 6, S. 56 (1875).
3) Dies bedeutet, dafs P'''' aus dem Nullpunkt besteht.
4) Vgl. Cantor in Math. Ann. 5, 129 (1872).
5) in dem S. 28 angegebenen Sinn.

Stelle $1/\nu + 1$ einen Grenzpunkt besitzt, so entsteht eine Menge Q, so dafs

$$Q' = P, \ Q'' = (0)$$

ist. Jetzt bilde man eine neue Menge R, indem man in jedes Intervall $1/\nu \cdots 1/\nu + 1$ eine Menge setzt, die Q ähnlich ist, so wird

$$R' = Q, \ R'' = P, \ R''' = (0)$$

u. s. w.[1]). Man sagt noch, dafs in Q der Nullpunkt ein Grenzpunkt **zweiter Ordnung** ist, in R ist er ein Grenzpunkt **dritter Ordnung** u. s. w.[2]).

Du Bois-Reymond hat bemerkt[3]), dafs die Nullpunkte der Function

$$y = \sin(1/x)$$

eine Menge bilden, die P ähnlich ist, ebenso die Nullpunkte von

$$y = \sin\frac{1}{\sin(1/x)}$$

eine Menge, die Q ähnlich ist, und wenn man

$$y = \sin\frac{1}{y_1}, \ y_1 = \sin\frac{1}{y_2}, \ \cdots y_\nu = \sin\frac{1}{x}$$

setzt, so bilden die Nullpunkte von y eine Menge, für die der Punkt $x = 0$ ein Grenzpunkt $(\nu + 1)$-ter Ordnung ist.

Die Cantor'sche Methode läfst sich auch benutzen, um Mengen Q zu bilden, für die $Q^{(\omega)}$ existirt[4]). (Punktmengen **zweiter Gattung** gemäfs S. 60.) Man geht wieder von der Menge P aus und setzt in jedes Intervall $1/\nu \cdots 1/\nu + 1$ eine Menge P_ν, für die der Punkt $1/\nu + 1$ ein Grenzpunkt der ν-ten Ordnung ist. Ist Q die so definirte Menge, so enthält $Q^{(\nu)}$ jedenfalls die Punkte

$$\frac{1}{\nu+1}, \ \frac{1}{\nu+2}, \ \frac{1}{\nu+3}, \ \cdots,$$

es ist also der Nullpunkt ein Grenzpunkt unendlich hoher Ordnung, und zwar ist

$$Q^{(\omega)} = (0).$$

Man kann auf diese Weise auch Mengen R definiren, für die nicht allein $R^{(\omega)}$, sondern auch noch weitere Ableitungen in beliebiger

1) Ähnlich bestimmte Punktmengen gab auch St. Smith; er stellte sie durch die Formel

$$P = \left\{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \cdots + \frac{1}{\nu_s}\right\}$$

dar, in der $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_s$ unabhängig von einander alle ganzen Zahlen annehmen (Proceed. of the Lond. Math. Soc. 6, S. 145; 1875).

2) Mengen, die in dieser Weise durch wiederholte Einschachtelung entstehen, gab auch Volterra; vgl. Giorn. di mat. 19, S. 78.

3) Journ. f. Math. 79, S. 36.

4) Math. Ann. 17. S. 358 (1880).

Menge existiren. Setzt man z. B. in jedes Intervall $1/\nu \cdots 1/\nu + 1$ eine Menge Q_ν, die der vorstehenden Menge Q ähnlich ist, und zwar so, dafs

$$Q_\nu^{(\omega)} = \frac{1}{\nu + 1}$$

ist, so ist

$$R^{(\omega)} = P, \quad R^{(\omega+1)} = (0)$$

u. s. w. u. s. w.

Interessante Beispiele von Mengen, die ziffernmäfsig definirt sind und Ableitungen transfiniter Ordnungen besitzen, hat Mittag-Leffler gegeben[1]). Setzt man

$$P_0 = (0),\ P_1 = \left\{\frac{1}{2^{m_1}}\right\},\ P_2 = \left\{\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}}\right\}, \cdots$$
$$P_\nu = \left\{\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\cdots+m_\nu}}\right\},$$

wo die m_i unabhängig von einander alle ganzen positiven Zahlen durchlaufen mit Einschlufs der Null, so ergiebt sich leicht
$P_1' = P_0,\ P_2' = (P_1, P_0), \cdots P_\nu' = \mathfrak{D}(P_{\nu-1}, P_{\nu-2}, \cdots P_1, P_0)$
woraus zunächst wieder folgt, dafs

$$P_\nu^{(\nu)} = (0)$$

ist. Man setze ferner

$$Q = \left\{\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+m_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu+m_1+\cdots+m_\nu}}\right\},$$

wo die m_i dieselbe Bedeutung haben, wie bisher, während ν alle ganzen positiven Zahlen mit Ausschlufs der Null annehmen soll, und betrachte zunächst die zu einem festen ν gehörige Menge

$$Q_\nu = \left\{\frac{1}{2^\nu}\left(1 + \frac{1}{1^{m_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+\cdots+m_\nu}}\right)\right\},$$

so ist dies eine Menge, die zu P_ν ähnlich ist[2]), und es wird daher

$$Q' = \mathfrak{D}(Q_1', Q_2', Q_3', \cdots).$$

Hieraus folgt leicht, dafs $Q^{(\nu)}$ jedenfalls die Punkte

$$\frac{1}{2^\nu}, \frac{1}{2^\nu+1}, \frac{1}{2^\nu+2}, \cdots$$

enthält, und daraus folgt weiter

$$Q^{(\omega)} = (0).$$

Auf ähnliche Weise construirt Mittag-Leffler auch eine Menge R, für die

$$R^{(\omega+\nu)} = (0)$$

1) Acta math. 4, S. 58, Anm.
2) Vgl. Anm. 5 auf S. 98.

ist. Diese Menge wird dargestellt durch

$$R = \left\{ \frac{1}{2^{p_1}} + \frac{1}{2^{p_1+p_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{p_1+p_2+\cdots+p_r}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{p_1+\cdots+p_r+\nu}} \left(1 + \frac{1}{2^{m_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+\cdots+m_\nu}}\right) \right\},$$

in der die m_i und ν die oben angegebene Bedeutung haben, während die p_i, wie die m_i, alle ganzen positiven Zahlen mit Einschlufs der Null durchlaufen sollen.

Alle hier erwähnten Mengen sind naturgemäfs nirgends dicht und abzählbar.

2. Im historischen Interesse lasse ich hier dasjenige Beispiel einer nirgends dichten perfecten Menge folgen, das St. Smith gab[1]), um den oben erwähnten Hankel'schen Satz über den Inhalt solcher Punktmengen zu widerlegen. Man teile zunächst die Einheitsstrecke in m $(m > 2)$ gleiche Intervalle, hebe das letzte heraus und teile jedes der $m - 1$ übrigen wieder in je m gleiche Intervalle, lasse von ihnen das letzte wieder ungeteilt und teile jedes der je $m - 1$ übrigen wieder in m gleiche Teile u. s. w., so bilden die Teilungspunkte nebst ihren Grenzpunkten eine Menge $T = \{t\}$, und es beträgt die Summe der punktfreien Intervalle

$$\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^2} + \frac{(m-1)^2}{m^3} + \cdots = 1.$$

Die Menge hat also den Inhalt Null. Wird das Verfahren nun so abgeändert, dafs bei den einzelnen Teilungen aus je einem Intervall der Reihe nach m, m^2, m^3, $\cdots$ neue Teilintervalle entstehen, so ergiebt sich als Summe der punktfreien Intervalle

$$\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^3} + \frac{(m-1)(m^2-1)}{m^6} + \cdots < \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \cdots,$$

und diese Summe kann durch Vergröfserung von m beliebig klein gemacht werden[2]).

Wie bei Smith, so hat auch bei du Bois, Harnack, Veltmann[3]), Volterra, die nach ihm unabhängig von einander perfecte Mengen durch überall dichte Intervallverteilung construirt haben, der perfecte Charakter dieser Mengen zunächst keine Rolle gespielt, sondern nur der Wert ihres Inhalts und die Widerlegung des Hankel'schen Irrtums. Das erste bewufst construirte Beispiel einer nirgends dichten perfecten Menge T ist von Cantor gegeben worden; es wird von allen Zahlen

---

1) Proc. of the Lond. Math. Soc. 6, S. 148 (1875).

2) Ähnlich ist das von Volterra angegebene Beispiel construirt, Giorn. di mat. 19, S. 80 ff. Mengen dieser Art finden sich auch bei T. Brodén, Acta Univ. Lund. 8, S. 17 ff.

3) Zeitschr. f. Math., 27, S. 177 u. 199.

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

gebildet, bei denen die Coefficienten c_ν irgend einen der Werte 0 oder 2 annehmen können[1]). Man kann diese Menge auch so definiren, dafs sie aus allen Zahlen eines triadischen Zahlsystems besteht

$$z = 0, c_1 c_2 c_3 \cdots$$

mit Ausnahme derjenigen, in deren Ziffernfolgen 1 vorkommt. Bei dieser Auffassung ist das Cantor'sche Beispiel einer grofsen Verallgemeinerung fähig, indem man für die Darstellung der Zahlen zwischen 0 und 1 von einem Zahlsystem mit beliebiger Basis ausgeht und die Zahlen beibehält, in deren Ziffernfolgen bestimmte Ziffern auftreten. Das einfachste Beispiel bilden diejenigen Zahlen des dekadischen Systems, deren Decimalbrüche nur die Ziffern 0 und 1 aufweisen, also alle Brüche

$$t = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \text{ für } a_i = 0 \text{ oder } 1. \qquad \text{(dekadisch)}$$

Die perfecte Natur dieser Menge T ist insbesondere leicht so erkennbar, dafs man jede Ziffernfolge zunächst dyadisch liest, wie es bereits auf S. 64 geschehen ist. Sie stellen dann die sämtlichen Punkte z einer Einheitsstrecke dar, und es ist T das Abbild der Menge Z aller Punkte z. Zum Unterschied von den früheren Ausführungen wird aber hier jeder Punkt r, der einem endlichen Dualbruch entspricht, doppelt dargestellt und es besitzt daher ein solcher Punkt r zwei verschiedene Bildpunkte t und t'. Die so bestimmten Intervalle $t \cdots t' = \delta$ sind die punktfreien Intervalle der Menge T; wir treffen hier also wieder auf diejenige Abbildung, die durch Beziehung der Mengen $R = \{r\}$ und $D = \{\delta\}$ auf einander vermittelt wird, analog wie es oben (S. 79) der Fall war.

Der Inhalt dieser Menge ist Null, ebenso der der Cantor'schen Menge, da für sie alle λ_N constant sind[2]). Das gleiche gilt von dem einfachen Beispiel, das Harnack später für Zwecke der Integralrechnung construirt hat[3]), und das ich deshalb anführe; es erfüllt eine Strecke von der Länge $^2/_3$ und entspricht den einfachen Werten

$$\delta = \frac{1}{3}, \quad \delta_N = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{2\nu}}, \quad \tau_N = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{2\nu-1}}, \quad \lambda_N = \frac{1}{2}.$$

Beispiele von Mengen, deren Inhalt ausgedehnt ist, werden uns noch später mehrfach begegnen (Abschnitt III, Cap. 4).

3. Eine Verallgemeinerung dieser Beispiele bilden diejenigen Punktmengen, die Brodén[4]) kürzlich aufgestellt hat, um sie für die

1) Math. Ann. 21, S. 590.

2) Im Beispiel Cantor's ist $\lambda_N = \frac{1}{3}$, für das andere $\lambda_N = \frac{4}{45}$.

3) Math. Ann. 24, S. 227.

4) Math. Ann. 51, S. 302.

Theorie der reellen Functionen einer Variablen zu verwenden. Sie stellen die Zahlen ebenfalls durch eine unendliche Ziffernfolge dar und lassen sich so auffassen, dafs sie kein festes Zahlsystem benutzen, vielmehr die Basis des Zahlsystems für jede Ziffer eine andere sein darf[1]). Dies geschieht wie folgt: Sei

$$l_1, l_2, l_3, \cdots$$

eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen, so dafs jedes $l_i \geqq 2$ ist, alsdann kann man jede Zahl x des Intervalls $0 \cdots 1$ in der Form

$$x = \frac{\varepsilon_1}{l_1} + \frac{\varepsilon_2}{l_1 l_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\nu}{l_1 l_2 \cdots l_\nu} + \cdots$$

darstellen, wo $0 \leqq \varepsilon_\nu < l_\nu$ ist, und umgekehrt; insbesondere ist x ein rationaler Wert r, falls von einem bestimmten Index an alle $\varepsilon_i = 0$ sind. Es ist andererseits auch

$$x = 1 - \frac{\eta_1}{l_1} - \frac{\eta_2}{l_1 l_2} - \cdots - \frac{\eta_\nu}{l_1 l_2 \cdots l_\nu} - \cdots,$$

wo allgemein $\eta_\nu + \varepsilon_\nu = l_\nu$ ist, und bei dieser Darstellung ist x rational, falls von einem gewissen Index an alle $\eta_\nu = l_\nu - 1$ sind. Wir finden also auch hier eine Menge $R = \{r\}$, deren Individuen eine doppelte Zifferndarstellung bei fest gegebenen l_ν zulassen. Nimmt man nun insbesondere an, dafs alle $\varepsilon_\nu \leqq e$ sind, wo e eine beliebige, übrigens feste Zahl bedeutet, so bilden wieder die zugehörigen Werte x eine nirgends dichte perfecte Menge $T^{(e)}$. Setzt man nämlich $l_1 l_2 \cdots l_\nu = L_\nu$, und setzt für beliebige aber feste ε_i

$$x' = \frac{\varepsilon_1}{l_1} + \frac{\varepsilon_2}{l_1 l_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\nu}{L_\nu} + \frac{e}{L_{\nu+1}} + \frac{e}{L_{\nu+2}} + \cdots$$

$$x'' = \frac{\varepsilon_1}{l_1} + \frac{\varepsilon_2}{l_1 l_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\nu + 1}{L_\nu}$$

so sieht man leicht, dafs das Intervall $x' \cdots x'' = \delta$ von Punkten der Menge frei bleibt, während die Endpunkte der Menge angehören. Den Mengen dieser Art läfst sich ein beliebiger Inhalt geben.

Ein einfaches Beispiel hierfür bildet die von Liouville angegebene Menge, für die $L_\nu = 10^{\nu!}$ ist, und die durch

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^{1\cdot 2}} + \frac{\alpha_3}{10^{1\cdot 2\cdot 3}} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^{\nu!}} + \cdots$$

dargestellt ist, mit der Mafsgabe, dafs alle α_ν unter einer bestimmten Gröfse g bleiben, z. B. $\alpha_\nu \leqq 9$. Diese Menge hat insbesondere die Eigenschaft, dafs alle ihre Elemente transcendent sind, und ist zu diesem Zweck von Liouville aufgestellt worden. In Folge eines a. a. O. bewiesenen Satzes[2]) kann man nämlich, falls ξ Wurzel einer

1) Diesen Gedanken finde ich zuerst bei Straufs, Acta math. 11, S. 13.

2) Journ. de math. 16, S. 133. Vgl. auch Lerch, Prager Athenaeum. Bd. 3, S. 236 (1886). (Böhmisch.)

algebraischen Gleichung ν-ten Grades ist, und $p:q$ ein in der Nähe von ξ liegender rationaler Bruch, einen hinreichend grofsen Wert Q so finden, dafs für jedes $q > Q$

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \frac{1}{q^{\nu+1}}$$

ist. Wenn man daher umgekehrt unbegrenzt grofs werdende Zahlen q angeben kann, für die

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| < \frac{1}{q^{\nu+1}}$$

ist, so kann ξ nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung ν-ten Grades sein, und wenn dies für jedes ν möglich ist, so ist ξ notwendig transcendent. Setzt man nun in dem obigen Beispiel

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^{1\cdot 2}} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^{\nu !}},$$

so dafs $q = 10^{\nu !}$ ist, so folgt:

$$x - \frac{p}{q} < \frac{\alpha_{\nu+1}}{q^{\nu+1}} + \cdots, \text{ d. h. } < \frac{1}{q^{\nu+1}}.$$

Es giebt also für jedes ν Werte q, die die obige Ungleichung nicht erfüllen, so dafs x transcendent sein mufs.

Borel knüpft hieran folgende Bemerkung[1]). Legt man um jeden rationalen Punkt p/q der Einheitsstrecke ein Intervall

$$\frac{p}{q} - \lambda\frac{1}{q^3} \cdots \frac{p}{q} + \lambda\frac{1}{q^3} \qquad \lambda < 1$$

von der Länge ε, so werden diese Intervalle einander wieder teilweise überdecken und in dem S. 93 genannten Sinn eine überall dichte Intervallmenge $D = \{\delta\}$ bestimmen. Nun ist

$$\Sigma\varepsilon < \lambda\Sigma(q-1)\frac{2}{q^3} < 2\lambda\Sigma\frac{1}{q^2}$$

und kann daher durch geeignetes λ beliebig klein gemacht werden. Die Intervalle liefern also ein Beispiel zu dem oben erwähnten Borel'schen Inhaltsbegriff und dem für ihn geltenden Satz.

Die so definirte Intervallmenge $D = \{\delta\}$ bestimmt andererseits eine abgeschlossene Menge $Q_1 = \{q_1\}$, so dafs für jeden Punkt q_1

$$\left| \frac{p}{q} - q_1 \right| > \frac{\lambda}{q^3}$$

ist. Man schliefst hieraus noch leicht, dafs jeder Punkt x der oben betrachteten transcendenten Menge innerer Punkt eines Intervalles δ ist, welches auch der Wert von λ sein mag, wie aus der für den Punkt x bestehenden Gleichung unmittelbar folgt.

1) Leçons etc., S. 44.

4. Specielle Beispiele ebener oder räumlicher nirgends dichter Mengen sind bisher nicht viele vorhanden. Die Methoden, die an die Decimalbruchdarstellung anknüpfen, sind auch hier anwendbar, falls man sie auf beide Coordinaten x und y überträgt. Ein erstes Beispiel einer ebenen nirgends dichten perfecten Menge, die nicht unausgedehnt ist, gab Veltmann[1]). Im übrigen ist zu bemerken, dafs diese Mengen hauptsächlich in der Theorie der Functionen einer complexen Variablen auftreten; sie können daher an dieser Stelle nur summarisch erwähnt werden[2]). Ebenso mufs hier die Bemerkung genügen, dafs auch die Curvenmengen bereits nach den Methoden der Mengenlehre untersucht worden sind[3]). Auf ein sehr merkwürdiges Auftreten solcher Curvenmengen, die ein genaues Analogon zu den nirgends dichten perfecten linearen Punktmengen bilden, ist kürzlich Hadamard[4]) geführt worden und zwar bei Untersuchungen über den Verlauf der geodätischen Linien auf mehrfach zusammenhängenden krummen Flächen.

5. Für die Theorie der reellen Functionen einer Variablen ist es von Wichtigkeit, das Continuum in Punktmengen zu spalten, die sämtlich überall dicht liegen und die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen[5]). Mit der allgemeinen Theorie dieser Punktmengen werden wir uns unten beschäftigen; hier führe ich zunächst einige Beispiele an.

Beispiele dieser Art hat zuerst T. Brodén construirt und zwar auf mannigfache Weise[6]). Man gehe z. B. von der Menge $Z = \{z\}$ aller Zahlen der Einheitsstrecke aus und stelle sie wiederum durch einen unendlichen Dualbruch

$$z = 0,\ a_1 a_2 a_3 \cdots \qquad a_i = 0 \text{ oder } 1$$

dar, wo der Fall, dafs alle a_i von einem bestimmten an gleich Null sind, ausgeschlossen ist. Nun sei L eine beliebige divergente Reihe gegen Null abnehmender Gröfsen $l_0, l_1, l_2, \cdots$. Ist $\vartheta < 1$, so kann man wachsende Zahlen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$ so finden, dafs

$$l_{\nu_{i+1}} < \vartheta l_{\nu_i}$$

ist, und daher $l_{\nu_1}, l_{\nu_2}, l_{\nu_3}, \cdots$ eine convergente Reihe L_c bilden. Wird jetzt dieser Reihe eine Zahl z_c so zugeordnet, dafs

$$a_{\nu_1} = a_{\nu_2} = a_{\nu_3} = \cdots = 1$$

ist, während die übrigen $a_i = 0$ sind, so hat die Menge $Z_c = \{z_c\}$

1) Zeitschr. f. Math. 27, S. 178 u. 313.

2) Ein einfach construirtes Beispiel findet sich bei Mittag-Leffler, Acta Math. 4, S. 23, Anm.

3) Genauer werde ich hierauf im vierten Abschnitt eingehen.

4) Journ. de math. (5) 4, S. 67 ff.

5) Vgl. besonders Abschnitt III, Cap. 2 u. 3.

6) Journ. f. Math. 118, S. 29. Vgl. auch Bih. Svensk. Vet. Handl. 23, I, Nr. 2 und Öfvers. af Stockh. Vet. Ak. Förhandl. 1896, Nr. 8.

dieser Zahlen die Mächtigkeit $\mathfrak{z}_c = \mathfrak{c}$. Es ist nämlich jede Teilreihe einer Reihe L_c ebenfalls convergent, und da die Gesamtheit dieser Teilreihen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat, so ist auch $\mathfrak{z}_c = \mathfrak{c}$. Jeder Reihe L_c entspricht andererseits eine divergente Restreihe L_d von L, und es besitzen daher auch die ihnen entsprechenden Zahlen z_d die Mächtigkeit $\mathfrak{z}_d = \mathfrak{c}$. Die so definirten Mengen liegen aber auch überall dicht, denn in der Nähe einer jeden Zahl z, die einer endlichen Ziffernfolge entspricht, können sowohl rechts, wie links Zahlen z_c resp. z_d angegeben werden.

Ein anderes Beispiel dieser Art erhält man aus den oben (S. 103) erwähnten Brodén'schen Mengen, falls man $\lim l_\nu = \infty$ setzt und dann die Mengen $T_1, T_2, \cdots$ betrachtet, die einer Reihe unbegrenzt wachsender Gröfsen $e_1 < e_2 < \cdots$ entsprechen. Die so entstehende Gesamtmenge $\mathfrak{M}\{T_\nu\}$, die wir auch kürzer durch $\{T_\nu\}$ bezeichnen, teilt das Continuum in der verlangten Weise[1]).

Eine Methode, die sogar zu beliebig vielen Teilmengen dieser Art führt, ist folgende. Seien wieder $Z = \{z\}$ die Zahlen der Einheitsstrecke, die man in irgend einem Zahlsystem, z. B. im dekadischen, derart darstelle, dafs die endlichen Decimalbrüche ausgeschlossen werden. Nun sei Z_1 die Menge aller derjenigen Zahlen, die unendlich oft die Ziffer 9 enthalten, mit Ausschlufs der Zahlen $Z' = \{z'\}$, bei denen von einer bestimmten Stelle an nur die 9 vorkommt, und es sei Z_2 ihre Complementärmenge. Alsdann ist nicht allein Z_1 überall dicht, sondern auch Z_2, da ja Z_2 die überall dichte Menge Z' als Teilmenge enthält. Es ist aber auch

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{c}.$$

Schreibt man nämlich eine Zahl z_1 in der Form

$$z_1 = 0,\ (a_1)(a_2)(a_3)\ \cdots,$$

wo jedes (a_i) entweder 9 ist, oder eine Gruppe von Ziffern, in der 9 nicht vorkommt, so sieht man unmittelbar, dafs Z_1 der Menge aller unendlichen dyadischen Brüche äquivalent ist, woraus $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{c}$ folgt. Andererseits enthält Z_2 als Teilmenge alle Zahlen, in denen nur die Ziffern 1, 2, $\cdots$ 8 auftreten, und es ist daher auch $\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{c}$.

Man kann nun die Spaltung von Z durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens noch weiter treiben. Von Z_2 spalte man jetzt die Menge Z_2' ab, in der die Ziffer 8 unendlich oft auftritt, so ist auch diese, da ihre ersten ν Ziffern für jedes ν unbeschränkt sind, notwendig überall dicht, und die Restmenge Z_3 ist es ebenfalls, da in ihr wieder Z' als Teilmenge existirt. Zugleich sieht man auch, dafs beide Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen.

So kann man fortfahren, und da man die Basis des Zahlsystems

1) Math. Ann. 51, S. 302 ff.

beliebig wählen kann, so kann man die Einheitsstrecke in beliebig viele Mengen dieser Art spalten.

6. Wir haben im Vorstehenden eine unendliche Menge

$$\mathfrak{M}\{T_\nu\} = \{T_\nu\}$$

nicht abzählbarer abgeschlossener Mengen kennen gelernt, deren jede nirgends dicht ist, und die in ihrer Gesamtheit das Intervall, in dem sie enthalten sind, überall dicht erfüllen. Die Natur dieser Mengen und ihrer Complementärmenge ist von principiellerer Wichtigkeit. Sie bilden für verschiedene Sätze der Analysis die Grundlage der Schlüsse und erfordern daher eine nähere Erörterung. Ich zeige zunächst, dafs man solche Mengen auch so construiren kann, dafs jede von ihnen den Inhalt Null hat.

Seien also im Intervall $a \,..\, b = \tau$

$$T', T'', \ldots . T^{(\lambda)}, \ldots$$

die bezüglichen Mengen, so können wir jedenfalls zeigen, dafs es für beliebig gegebenes λ erreicht werden kann, dafs $I(T^{(\lambda)}) = 0$ ist, resp. dafs sich die zu $T^{(\lambda)}$ gehörige freie Intervallsumme von dem Gesamtintervall τ um beliebig wenig unterscheidet und zugleich jedes einzelne freie Intervall beliebig klein wird. Ein mehreres läfst sich aber auch der Natur der Sache nach nicht erreichen.

Der Einfachheit halber setzen wir unsere Mengen als perfect voraus. Ferner seien

$$D' = \{\delta'_\nu\}, \quad D'' = \{\delta''_\nu\}, \ \ldots\ldots\ D^{(\lambda)} = \{\delta^{(\lambda)}_\nu\}, \ldots$$

die zugehörigen Intervallmengen, und es seien

$$\delta', \delta'', \ldots\ldots \delta^{(\lambda)}, \ldots$$

ihre gröfsten Intervalle; ist alsdann $\varepsilon' > \varepsilon'' > \cdots$ eine Reihe von Gröfsen, so dafs $\lim \varepsilon^{(\lambda)} = 0$ ist, so mufs bewirkt werden, dafs

$$\delta' < \varepsilon', \quad \delta'' < \varepsilon'', \ \ldots . \ \delta^{(\lambda)} < \varepsilon^{(\lambda)} \ldots$$

ist. Ist nun σ beliebig vorgegeben, so bestimmen wir die Gröfsen $\sigma', \sigma'' \ldots\ldots$ so, dafs

$$\sigma > \sigma' + \sigma'' + \cdots\cdots + \sigma^{(\lambda)} + \cdots .$$

ist, und construiren zunächst eine Menge T', so dafs $I(T') = 0$ ist, resp. dafs $\delta' < \varepsilon'$ und zugleich

$$\tau > \sum_1^{\nu'} \delta'_i > \tau - \sigma'$$

ist, was immer möglich ist. Jetzt setzen wir in jedes Intervall δ'_i eine perfecte Menge T'_i, so dafs, wenn wieder

$$\sigma'' > \sigma'_1 + \sigma'_2 + \cdots + \sigma'_\mu + \cdots .$$

gesetzt wird, $I(T_i') = 0$ ist, resp. ν_i' Intervalle der zu T_i' gehörigen Intervallmenge D_i' so gefunden werden können, dafs sich ihre Summe von δ_i' um weniger als σ_i' unterscheidet, so dafs

$$\delta_i' > \sum_1^{\nu_i'} \delta_{ik}' > \delta_i' - \sigma_i'$$

ist. Alsdann bestimmen die so definirten Mengen T_i', resp. die Intervallmengen D_i' Gesamtmengen

$$D'' = \{D_i'\} \quad \text{und} \quad T'' = \{T_i'\},$$

so dafs auch $I(T'') = 0$, resp.

$$\tau > \sum_1^{\nu''} \delta_i'' > \tau - \sigma''$$

ist; und dies kann auch so geschehen, dafs $\delta'' < \varepsilon''$ ist. In dieser Weise kann man fortfahren, womit die Behauptung erwiesen ist.

Von der Complementärmenge M, die zu $\mathfrak{M}\{T^{(\lambda)}\}$ gehört, gilt noch der Satz, dafs sie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat. Jeder Punkt von M ist nämlich innerer Punkt je einer unbegrenzten Reihe von Intervallen

$$\delta_\nu', \; \delta_{\nu\mu}'', \; \delta_{\nu\mu\lambda}''' \cdots$$

mit beliebigen Indices $\nu, \mu, \lambda \cdots$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Dieser Satz gilt augenscheinlich auch, wenn die Mengen $T^{(\lambda)}$ beliebigen Inhalt haben, falls sie nur nirgends dicht sind, da er ja nur mit den punktfreien Intervallen operirt. Also folgt:

I. Sind $Q, Q_1, Q_2, \cdots Q_\nu, \cdots$ nirgends dichte Mengen, von der Art, dafs jede die vorhergehende als Teilmenge enthält, und dafs $\mathfrak{M}\{Q_\nu\} = \{Q_\nu\}$ im Intervall τ überall dicht ist, so hat die Complementärmenge M von $\{Q_\nu\}$ die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$[1]).

Ein Beispiel zu diesem Satz bilden einerseits die Brodén'schen Mengen T_ν (S. 106), andererseits aber auch diejenigen Mengen des obigen Borel'schen Beispiels, die man erhält, wenn man der Gröfse λ eine unendliche Reihe gegen Null convergirender Werte beilegt.

7. Die durch dieses Beispiel charakterisirte Mengengattung hat sich als besonders wichtig für die Analysis herausgestellt und darf deshalb eine genauere Erörterung beanspruchen.

Mit Baire bezeichnen wir noch die Menge $\mathfrak{M}\{Q_\nu\} = \{Q_\nu\}$ als Menge erster Kategorie. Aus ihrer Definition folgt sofort, dafs das Continuum keine Menge erster Kategorie ist, und daraus folgt weiter der Satz:

II. Die Complementärmenge einer Menge erster Kategorie ist selbst keine Menge erster Kategorie.

1) Vgl. Baire, Ann. di mat (3), Bd. 3, S. 67 (1899).

Mengen dieser Art bezeichnet Baire als Mengen zweiter Kategorie. Zu bemerken ist, dafs der hier zu Tage tretende Unterschied mit dem Mächtigkeitsbegriff nichts zu thun hat, sondern nur mit der Raumerfüllung.

Eine Menge zweiter Kategorie hat zwar nach Satz I stets die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, es kann aber auch eine Menge erster Kategorie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben.

Sei nun $X = \{x\}$ eine im Intervall τ überall dichte Menge und X_g ihre Complementärmenge. Wenn nun — wie bei den Mengen Borel's — zu jedem Punkt x von X ein ihn einschliefsendes Intervall ε gehört, so kann zunächst auch jeder Punkt von X_g innerer Punkt eines Intervalles ε sein. Ist dies nicht der Fall, giebt es also Punkte von X_g, die nicht innere Punkte eines Intervalls ε sind, so ist die von ihnen gebildete Menge Q, falls sie unendlich ist, notwendig abgeschlossen und nirgends dicht. Die Menge Q kann auch perfect sein, obwohl dies im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Jedenfalls gehört zu ihr eine Menge $D = \{\delta\}$, die mit der S. 93 erwähnten Menge identisch ist, so dafs jeder innere Punkt eines Intervalles δ auch innerer Punkt von Intervallen ε ist. Wir sprechen die Existenz dieser Mengen durch folgenden Satz aus, der das Gegenstück des Heine-Borel'schen Satzes von S. 51 ist:

III. Gehört zu jedem Punkt x einer im Intervall $a \dots b$ überall dichten Punktmenge $X = \{x\}$ ein ihn einschliefsendes Intervall ε, und ist nicht jeder Punkt von $a \dots b$ innerer Punkt eines solchen Intervalles, so bestimmen die Intervalle ε eine endliche oder abgeschlossene Menge Q, von der Art, dafs kein Punkt von Q innerer Punkt eines Intervalles ε ist, während dies für jeden Punkt der Complementärmenge von Q der Fall ist.

Falls nun die zu jedem Punkt von X gehörigen Intervalle ε veränderlicher Natur sind und jedes von ihnen Werte $\varepsilon' > \varepsilon'' > \cdots$ annimmt, die gegen Null convergiren, so ergeben sich die Mengen

$$D', D'', D''', \dots \quad \text{resp.} \quad Q', Q'', Q''', \dots,$$

und es ist, wie im vorstehenden, leicht beweisbar, dafs diese Mengen bei geeigneter Beschaffenheit der Intervalle ε resp. von $\Sigma\varepsilon$ die Strecke $a \dots b$ allmählich überall dicht bedecken, so dafs, wenn wieder

$$C = \mathfrak{M}\{Q^{(\nu)}\} + M$$

gesetzt wird, die Menge M eine Punktmenge zweiter Kategorie ist.

Der Satz bleibt übrigens auch dann in Geltung, wenn ein Intervall ε, das zu einem Punkt x von X gehört, nicht den Punkt x einschliefst, sondern in ihm beginnt, falls nur die Punkte x und damit auch die Intervalle ε überall dicht liegen. Die vorstehenden Resultate gelten also für jede beliebige Menge $E = \{\varepsilon\}$

überall dichter Intervalle, wie diese Intervalle auch zu einander liegen mögen, resp. für jede aus derartigen Mengen gebildete Gesamtmenge $\{E^{(\nu)}\}$.

Ich werde die Mengen $E = \{\varepsilon_\nu\}$ sowie die durch sie bestimmten Mengen Q resp. $\{Q^{(\nu)}\}$ im folgenden als Borel'sche Mengen bezeichnen.

Über Mengen zweiter Kategorie führe ich noch folgenden Satz an:

IV. Die gemeinsamen Punkte zweier Mengen zweiter Kategorie bilden ebenfalls eine Menge zweiter Kategorie.

Ist nämlich M die eine dieser Mengen, und ist sie Complementärmenge von $\{Q^{(\nu)}\}$, die andere M_1 Complementärmenge von $\{Q_1^{(\nu)}\}$, so bilden auch die Mengen

$$\mathfrak{M}(Q', Q_1'),\quad \mathfrak{M}(Q'', Q_1''), \cdots \mathfrak{M}(Q^{(\nu)}, Q_1^{(\nu)}), \cdots$$

in ihrer Gesamtheit eine Menge erster Kategorie, woraus der Satz unmittelbar folgt.

Endlich noch eine letzte Bemerkung. Keine der beiden Arten von Punktmengen, zu denen wir hier gelangt sind, nämlich die Menge $\mathfrak{M}\{Q^{(\nu)}\}$, und ihre Complementärmenge M, ist abgeschlossen[1]). Sie stellen also allgemeine Vertreter der in (5) an Beispielen behandelten Mengengattung dar. In der That bilden sie auch diejenigen Typen, die bei Functionen reeller Variablen überall da auftreten, wo man zu Mengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ gelangt, die nicht abgeschlossen sind. Es würde zu untersuchen sein, ob jede überall dichte nicht abgeschlossene Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ stets eine Menge erster oder zweiter Kategorie ist. Ich mufs mich jedoch begnügen diese Frage anzudeuten.

Da die vorstehenden Betrachtungen nur mit den Intervallen δ operiren, so lassen sie sich ohne Ausnahme auf Mengen eines beliebigen C_ν übertragen. Man braucht unter den δ nur die entsprechenden Bereiche zu verstehen, und alles bleibt in Geltung.

8. Auch die Begriffe der Mengen erster und zweiter Kategorie sind, wie ich noch ausdrücklich begründen will, nicht an das Continuum gebunden; sie lassen sich für jede perfecte Menge T definiren. Ist U eine in T überall dichte Menge, und gehört zu jedem Punkt u ein Intervall oder Bereich δ, so kann man wiederum die Menge aller derjenigen Punkte ins Auge fassen, die nicht innere Punkte eines Bereiches δ sind, und sie mufs wieder eine abgeschlossene Menge Q sein. Allerdings enthält jetzt Q im allgemeinen ganze Intervalle resp. Gebiete. Nun betrachten wir die Menge

$$Q_t = \mathfrak{D}(Q, T);$$

1) Eine unendliche Menge abgeschlossener Mengen braucht also nicht selbst abgeschlossen zu sein. Eine endliche Menge abgeschlossener Mengen ist jedoch stets abgeschlossen.

sie ist abgeschlossen und zugleich Teilmenge von T, sie stellt daher das Analogon der früheren Mengen Q bezüglich T dar. Damit ist aber die Behauptung erwiesen. Denn wir können jetzt wiederum eine Gesamtmenge $\{Q_t^{(\nu)}\}$ definiren, und erhalten in ihrer Complementärmenge bezüglich T eine in T überall dichte Menge[1]), die als Menge zweiter Kategorie mit Bezug auf T zu bezeichnen ist.

Hier wie auch sonst tritt uns also eine wichtige Thatsache als sozusagen invariantes Resultat entgegen. Es ist eine gewisse Gleichwertigkeit aller perfecten Mengen, resp. der Umstand, dafs alle wichtigen Eigenschaften und Begriffe der Punktmengen für beliebige perfecte Mengen in gleicher Weise vorhanden sind, mögen sie continuirlich oder nirgends dicht sein, oder eine beliebige Combination dieser beiden Typen. Hierin liegt meines Erachtens einer der wichtigsten Erfolge der Mengenlehre. Damit ist zugleich erreicht, dafs für die Analysis eine jede perfecte Menge ein ebenso vollkommenes und geschlossenes Operationsgebiet darstellt, wie ein continuirlicher Bereich, und wie ich schon hier vorausschicke, ist es gerade dieser Gedanke, der sich in jüngster Zeit für die Analysis als fruchtbringend erwiesen hat.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen auf Functionen reeller Variablen.

Man mag geneigt sein, dasjenige Gebiet aus der Lehre von den reellen Functionen, auf dem die Mengenlehre ihre vornehmsten Erfolge gezeitigt hat, als eine Art von Pathologie der Functionen zu betrachten. Sind es doch wesentlich Ausnahmeerscheinungen, die hier in Frage kommen, Erscheinungen, die bei den sogenannten „regulären“ Functionen nicht anzutreffen sind. Aber die tiefere Einsicht in diese Dinge zeigt das Irrtümliche einer solchen Auffassung. Wie die Pathologie des Menschen ihre Gesetze hat, so ist auch für die singulären Eigenschaften der Functionen die Existenz einer sie beherrschenden Gesetzmäfsigkeit zu vermuten, und hier wie dort wird ihre wissenschaftliche Erfassung erst dann erreicht sein, wenn es gelingt, die Untersuchung positiv zu wenden, und von der singulären Einzelerscheinung zur Erkenntnis des Gesetzes zu gelangen, das sie regelt. Dieser Übergang hat sich gerade in den letzten Jahrzehnten stetig vollzogen. Nachdem die naiven Vorstellungen über den Functionsbegriff geschwunden waren, hat man sich zunächst

1) Es ist nämlich U Teilmenge der Complementärmenge.

längere Zeit damit begnügt, zur Wahrung des mathematischen Gewissens die Ausnahmeerscheinungen ausdrücklich auszuschliefsen und die Voraussetzungen so zu wählen, dafs sie allen Anforderungen der allgemein gehaltenen Beweise genügen. Aber dieser Standpunkt, der der Sache nach gegen die subtileren Ausnahmen ebenso ablehnend war, wie der naive, hat naturgemäfs einer mehr positiven Wendung Platz machen müssen. Wesentlich unter dem Einflufs und durch die Kraft der Riemann'schen Ideen hat sich allmählich die Erkenntnis Bahn gebrochen, dafs hier wie im Gebiet der complexen Functionen die regulären Fälle die Ausnahme und die Ausnahmeerscheinungen sozusagen die Regel bilden, dafs aber auch für sie Sätze allgemeinen Charakters existiren, auf denen sie beruhen[1]). Zur Ergründung dieser versteckteren Gesetzmäfsigkeit haben die mengentheoretischen Begriffe bereits mancherlei geleistet und berechtigen zu weiteren Hoffnungen. Wir dürfen insbesondere erwarten, dafs sich auch hier diejenige allgemeine Harmonie der Gesetze offenbaren wird, die das hervorragendste Kennzeichen und die grofse Anziehungskraft der mathematischen Erkenntnis bildet.

Um Functionen bestimmten Verhaltens zu bilden, kann man zwei wesentlich verschiedene Wege einschlagen. Man kann einen für den Zweck geeigneten analytischen Ausdruck bilden, man kann die Function aber auch so bestimmen, dafs man irgend welche Vorschriften giebt, die ihren Wert für jeden Wert der Variablen festlegen. Der hier skizzirte Gegensatz ist nicht allein stillschweigend, sondern auch polemisch zum Ausdruck gekommen. Ist die erste Art unbedingt als die vollkommenere zu betrachten, so hat uns doch auch die zweite Art wesentlich gefördert und ist an sich als eine der ersten gleichberechtigte Methode anzusehen. Insbesondere ist es die innere Structur der Functionen, für deren Erkenntnis sie sich von besonderer Zweckmäfsigkeit erwiesen hat. Auf beiden Gebieten hat die Mengenlehre reiche Früchte getragen. Für die analytische Darstellung der Functionen ist insbesondere diejenige Form des Princips der Verdichtung der Singularitäten zu nennen, die auf dem Abzählbarkeitsbegriff beruht, und was die Structurtheorien betrifft, so ist hier der Anteil der Mengenlehre an den neuen Resultaten noch erheblich gröfser. Sie hat es ermöglicht, die Structur der Functionen mit immer wachsender Vollkommenheit zu zergliedern, sowie auch umgekehrt Functionen bestimmter Structur durch gesetzmäfsige Vorschriften zu definiren resp. nachzuweisen[2]).

1) Man vgl. z. B. H. Hankel, Untersuchungen etc. S. 1 ff., resp. Math. Ann. 20, S. 63 und du Bois-Reymond im Journ. f. Math. 79, S. 21.

2) Was den oben erwähnten Gegensatz betrifft, so spielt hier natürlich auch die Frage hinein, in welchem Mafse man arithmetisirende Neigungen hat. Es würde zu weit führen, sachlich oder auch historisch auf diese Fragen einzugehen; nur bemerke ich, dafs der Standpunkt, wie ihn z. B.

Den Ausgangspunkt hierfür stellt der lange bekannte Satz dar, dafs eine stetige Function bestimmt ist, falls ihre Werte an einer überall dichten abzählbaren Menge gegeben sind. Zeigt dieser Satz zunächst theoretisch, dafs der Begriff der stetigen Function im Abzählbaren wurzelt, so gewährt er zugleich den grofsen praktischen Vorteil, dafs zur Bestimmung einer Function, die für eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ definirt ist, eine abzählbare Menge geeigneter Vorschriften hinreichend ist. Eine abzählbare Menge von Vorschriften läfst sich aber jederzeit wirklich aufstellen, und darin beruht es, dafs für die constructive Herstellung einer bestimmten Structur diese Methode der Functionsbestimmung besonders geeignet ist. Es kommt dazu, dafs der nämliche Thatbestand bis zu einem gewissen Grade auch bei punktweise unstetigen Functionen vorhanden ist.

Über den allgemeinen Charakter dessen, was die Mengentheorie für die Analysis leisten kann oder bisher geleistet hat, gestatte ich mir noch folgende Bemerkung. Ich erinnere zunächst an die Wandlung, die der seiner ganzen Natur nach mehr verschwommene als mathematische Begriff „im allgemeinen“ im Lauf der letzten Jahrzehnte durchgemacht hat[1]). Zunächst nur auf eine endliche Zahl von Ausnahmepunkten bezogen, hat er mit der Zeit auch auf unendliche Mengen solcher Punkte ausgedehnt werden müssen. Ihm einen wirklichen Inhalt zu geben, und dies so, dafs dieser Inhalt die zureichende Erklärung der mathematischen Thatsachen liefert, ist ein Ziel, das die Theorie der Punktmengen im Gebiet der Analysis erreichen mufs. In diesem Sinn aufgefafst, wird die Theorie der Punktmengen zu einer Art molecularer Theorie der mathematischen Gesetze, die aber zur Erklärung dieser Gesetzmäfsigkeit einer besonderen Hypothese, wie in den Naturwissenschaften, nicht bedarf[2]).

Hiermit ist aber zunächst nur eine Forderung bezeichnet. Wenn es möglich war, ihr bereits mit einem gewissen Erfolg zu entsprechen, so liegt die Erklärung meines Erachtens in folgendem Umstand. Sicherlich bildet der Grenzbegriff und seine präcise

---

auch Borel in seinem Buch eingenommen hat, und der auf das Bestreben hinausläuft, die Untersuchung stets an literale oder algorithmische Darstellungen zu knüpfen, durch die Sache keineswegs als geboten erscheint. Der Inhalt eines jeden mathematischen Satzes mufs auch ohne Benutzung der Formeln und Symbole ausdrückbar sein; die Formeln und Symbole stellen also eventuell nur eine Erleichterung der Darstellung vor, sind aber nicht Selbstzweck. In Wirklichkeit ist auch die Zahl der durch analytische oder rechnerisch formale Vorschriften bestimmten Beispiele nur gering, wie sich andererseits unsere Einsicht gerade durch die anders gestalteten Beispiele wesentlich vermehrt hat. Ich erlaube mir noch den Hinweis, dafs die ganze Cantor'sche Theorie für diese Auffassung spricht.

1) Hier ist nur vom Gebiet der Analysis die Rede.

2) Das einzige hierzu nötige Postulat ist die oben S. 14 erwähnte Antithese, resp. der Grenzbegriff, und die Stetigkeitsdefinition.

Fassung die natürliche und notwendige Grundlage aller mathematischen Erkenntnis, die über die Betrachtung endlicher Processe hinausgeht, mag sie nun arithmetischer oder geometrischer Natur sein. Der Fortschritt der Methode besteht aber darin, geschlossene Begriffe zu schaffen[1]), die freilich aus dem Boden des Grenzbegriffes erwachsen müssen, die aber gestatten, in einfacherer Weise zu operiren, und es uns erlassen, in jedem einzelnen Fall immer von neuem in die auf dem ε und δ beruhende Analyse einzutreten. In dieser Hinsicht Abhilfe geschafft und Fortschritte gezeitigt zu haben, ist ein Verdienst, das die Theorie der Punktmengen für sich beanspruchen kann. Gerade für sie ist die Geschlossenheit ihrer Begriffe und Methoden charakteristisch. Diese Geschlossenheit hat nicht allein die Beweise vereinfacht und die Erkenntnisse präciser zu formuliren erlaubt, sie ist sogar im stande gewesen, Fälle aufzudecken, in denen die vorhandenen scheinbar strengen Vorstellungen irrig waren. Wenn wir diese Begriffe im grofsen und ganzen der schöpferischen Phantasie Georg Cantor's verdanken, so sind es doch wesentlich andere, die sich ihre Anwendung auf die Analysis zum Ziel setzen. In erster Linie habe ich A. Harnack zu nennen; ihm verdanken wir trotz erheblicherer Irrtümer mancherlei wertvolle Theoreme. In neuerer Zeit sind es hauptsächlich die französischen Mathematiker, die sich ihrer für die Zwecke der Analysis und Geometrie bedient und sie zur Grundlage der Begriffsbestimmungen gemacht haben. Ich nenne z. B. C. Jordan und E. Borel; was man mit ihnen erreichen kann, hat kürzlich auch R. Baire erkennen lassen. Die deutschen Vertreter der subtileren Analyse, wie z. B. Pringsheim und Stolz, haben sich zu diesem Schritt noch nicht recht entschliefsen können, was ich nicht allein methodisch, sondern auch sachlich für bedauerlich halte. Als Beleg hierfür mag und wird hoffentlich dieser Bericht sprechen. Ich habe mich bemüht, die Geschlossenheit der Begriffe und der Darstellung überall weiterzuführen, wo es mir möglich war; dafs hier nur Anfänge einer Entwickelung vorliegen, dürfte selbstverständlich sein. Ich habe überdies geglaubt, den Bericht möglichst vollständig halten zu sollen, und auch über solche Untersuchungen berichtet, in denen ein Vorzug der mengentheoretischen Behandlung vielleicht nicht vorhanden ist, oder auch die Problemstellung selbst von untergeordneter Natur erscheinen mag.

---

1) Als einen solchen Fortschritt betrachte ich z. B. auch die Einführung der Folge oder Fundamentalreihe.

Erstes Capitel.

Der Stetigkeitsbegriff.

Als Wertmenge der unabhängigen Variablen einer Function pflegte man ursprünglich gemäfs stillschweigender Übereinkunft einen continuirlichen Bereich zu betrachten. Die Idee, diese Wertmenge beliebig zu wählen, reicht jedoch ebenfalls schon ziemlich weit zurück. Sie mag an den allgemeinen Functionsbegriff Dirichlet's anknüpfen und ist allmählich eine selbstverständliche Vorstellungsweise geworden. Die Untersuchung der Frage, inwieweit sich die Begriffe und Sätze über Stetigkeit auf solche Functionen übertragen lassen, die für beliebige Punktmengen P definirt sind, ist jedoch erst neueren Datums (1). Da der Stetigkeitsbegriff der Definition gemäfs nur für solche Punkte in Frage kommen kann, die Grenzpunkte der bezüglichen Menge sind, so werden diejenigen Mengen P das wesentlichste Interesse beanspruchen, bei denen jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt ist, d. h. in sich dichte Mengen. Eine solche Menge ist dann entweder abgeschlossen und damit auch perfect oder nicht, und davon hängt in der That der Inhalt der Sätze ab, die hier eine Rolle spielen. Beide Arten von Mengen verhalten sich wesentlich verschieden.

C. Jordan ist wohl der erste gewesen, der diesen Dingen methodisch gerecht geworden ist. Er hat in seinem Traité bereits gezeigt[1]), dafs die Hauptsätze, die den Stetigkeitsbegriff betreffen, auf abgeschlossene resp. perfecte Mengen unmittelbar übertragbar sind (2, 3). Anders liegen die Dinge, falls die Mengen nicht abgeschlossen sind, wie dies ganz kürzlich von T. Brodén gezeigt worden ist; so verliert z. B. der Satz, dafs eine für jeden Punkt stetige Function gleichmäfsig stetig ist, für nicht abgeschlossene Mengen seine Geltung. Dies ist besonders für den Fall wichtig, dafs man eine stetige Function dadurch bestimmen will, dafs man ihre Werte an einer überall dichten Menge Q in geeigneter Weise vorschreibt (4).

Für alle allgemeinen, die Stetigkeit betreffenden Fragen bildet die von Peano und Hilbert angegebene Abbildung des Quadrats auf die Strecke ein lehrreiches Beispiel; ich schliefse deshalb eine genauere Analyse dieser Abbildung hier an (5). Ihr Charakter ist dahin zu beschreiben, dafs einer linearen continuirlichen Menge des Quadrats eine nirgends dichte Menge der Einheitsstrecke entspricht. Es ist zu vermuten, dafs dies bei allen stetigen Abbildungen einer Fläche auf eine Strecke der Fall ist (6).

1. Der moderne Stetigkeitsbegriff geht bekanntlich auf

1) Vgl. besonders Band 1, S. 46 ff. Diese Untersuchungen erschienen zuerst im Journ. de math. (4) Bd. 8, S. 72.

Cauchy zurück. Der Cauchy'schen Vorstellungsweise gemäfs heifst die Function $f(x, y, \cdots)$ der reellen Variablen $x, y, \cdots$ im Punkt $(x, y, \cdots)$ stetig, falls zu beliebig vorgegebenem ε eine Gröfse δ so bestimmt werden kann, dafs

$$|f(x+h, y+k, \cdots) - f(x, y, \cdots)| < \varepsilon$$

ausfällt, sobald $|h| < \delta$, $|k| < \delta, \cdots$ gewählt werden. Wird ε durch eine beliebige Reihe gegen Null abnehmender Gröfsen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots$ ersetzt, so leitet die Cauchy'sche Definition unmittelbar zu derjenigen über, die auf dem von Cantor für die Theorie der Irrationalzahl eingeführten Begriff der Fundamentalreihe oder Folge beruht. Bedienen wir uns, im Interesse der Kürze, der geometrischen Sprechweise, so lautet diese Definition wie folgt: Ist $p = (x, y, \cdots)$ irgend ein Punkt des Gebietes, für den die Function definirt ist, und ist p_ω Grenzstelle einer Punktmenge

$$p_1, p_2, p_3, \cdots = \{p_\nu\},$$

so heifst $f(x, y, \cdots) = f(p)$ an der Stelle p_ω stetig, falls die Functionswerte

$$F(p_1),\ F(p_2),\ F(p_3), \cdots = \{F(p_\nu)\}$$

eine Fundamentalreihe bilden, und der durch sie dargestellte Wert mit dem Functionswert $F(p_\omega)$ übereinstimmt, was man auch so schreiben kann, dafs

$$\lim F(p_i) = F(\lim (p_i))$$

ist. Diese heute durchaus geläufige Formulirung dürfte der Sache nach im wesentlichen auf Dirichlet'sche Ideen zurückgehen[1]); in ihrer expliciten Form erscheint sie wohl zuerst bei Heine[2]), und seiner Angabe nach unter dem Einflufs von G. Cantor.

Im vorstehenden ist über die Punktmenge $P = \{p\}$, die den Bereich der unabhängigen Variablen bildet, keinerlei Angabe enthalten. Die obigen Definitionen zeigen überdies, dafs der Stetigkeitsbegriff nur am Begriff des Grenzpunktes hängt, also mit einer abzählbaren Menge discreter Werte operirt. Daraus folgt, dafs er den Bereich der unabhängigen Variablen keineswegs als continuirlich voraussetzt; er kann vielmehr auf jede Punktmenge übertragen werden, die Grenzpunkte enthält.

2. Um dies durchzuführen, ist es zweckmäfsig, die Functionsbeziehung als Abbildung zweier Punktmengen aufzufassen. Ist $P = \{p\}$ eine beliebige Menge von Punkten $p = (x, y, \cdots)$ eines beliebigen Raumes, und ist $F(x, y, \cdots) = F(p)$ eine eindeutige oder

1) Dabei denke ich daran, dafs schon Dirichlet die Werte $F(p+0)$ und $F(p-0)$ mit $F(p)$ verglichen und für die Definition der Unstetigkeit benutzt hat.

2) Journ. f. Math. 74, S. 182.

mehrdeutige Function von x, y, $\cdots$, doch so, dafs zu jedem p nur eine endliche Zahl von Functionswerten gehört, so soll die Gesamtheit der Werte dieser Function als Punktmenge $Q = \{q\}$ bezeichnet werden, die Bild von P ist. Alsdann heifst Q ein stetiges Bild von P, wenn zwischen den Mengen P und Q folgende Beziehung obwaltet. Sind p_1, p_2, p_3, $\cdots$ Punkte von P mit der Grenzstelle p_ω, und q_α, q_β, q_γ, $\cdots$ die sämtlichen ihnen entsprechenden Punkte von Q, so soll jede ihrer Grenzstellen q_ω dem Punkt p_ω als Bildpunkt entsprechen[1]), woraus noch beiläufig folgt, dafs die Zahl dieser Punkte p_ω endlich ist. Alsdann bestehen folgende Sätze[2]):

I. Das endlichdeutige und stetige Abbild Q einer abgeschlossenen Menge P ist selbst eine abgeschlossene Menge.

II. Das eindeutige und stetige Abbild Q einer perfecten Menge P ist wiederum eine perfecte Menge.

Ist nämlich q_ω Grenzpunkt einer in Q enthaltenen Punktmenge $\{q_\nu\} = q_1, q_2, q_3, \cdots$, so sind diese Punkte Bildpunkte gewisser Punkte p_α, p_β, p_γ, $\cdots$, die notwendig in unendlicher Menge vorhanden sind. Diese haben mindestens eine Grenzstelle p_ω, der alsdann q_ω entsprechen mufs. Damit ist der erste Satz bewiesen. Für den zweiten Satz ist weiter zu zeigen, dafs Q keine isolirten Punkte enthält. Wäre q ein solcher, und p ein Punkt, dessen Bild q ist, so ist p Grenzpunkt einer Menge $\{p_\nu\}$, der die Punkte $\{q_\nu\}$ entsprechen mögen. Diese Punkte haben alsdann mindestens eine Grenzstelle q_ω, die ebenfalls Bild von p ist, und da die Abbildung eindeutig ist, so ist q_ω mit q identisch, woraus noch nebenbei folgt, dafs es nur eine solche Grenzstelle q_ω giebt.

Der hier erörterte allgemeine Stetigkeitsbegriff besitzt auch die Eigenschaft, dafs, wenn f_1, f_2, $\cdots$ in dem genannten Sinn stetige Functionen der abgeschlossenen Menge $P = \{p\}$ sind, eine stetige Function $F(f_1, f_2, \cdots)$ auch wiederum stetige Function der Menge P ist, wie man leicht beweist. Alle diese Sätze gelten überdies unabhängig davon, ob die Menge P auch ein eindeutiges Bild von Q ist oder nicht; sie sind ferner durchaus unabhängig davon, in welchen räumlichen Gebieten die Mengen P resp. Q liegen, und die bezüglichen Variablen und Functionen ihre geometrische Darstellung finden. Es kann endlich auch die eine Menge continuirlich, die andere hingegen nirgends dicht sein, und es kann in dieser Hinsicht

1) Vgl. auch den Züricher Vortrag von Hurwitz, Verhandl. des ersten math. Congresses, Zürich, S. 102. Es ist naturgemäfs klar, dafs die obige für beliebige Mengen ausgesprochene Definition nur für solche Punkte einen Sinn hat, die Grenzpunkte der Menge sind. Für andere Punkte der Menge kommt sie aber auch nicht in Betracht.

2) Diese Sätze finden sich für das lineare Gebiet zuerst bei K. Beckmann, Dissertation, Upsala 1888, S. 54.

jede an sich mögliche Combination bei P resp. Q vorliegen. Das einfachste Beispiel für diese Thatsache liefert die S. 79 angegebene Beziehung zwischen einer nirgends dichten linearen Menge $T = \{t\}$ und dem Continuum C der Einheitsstrecke, die auf der Zuordnung der überall dichten Menge $X = \{x_N\}$ zur Intervallmenge $D = \{\delta_N\}$ beruht. Ordnen wir den beiden Endpunkten t_l und t_r eines Intervalles δ_N den Punkt x_N von C zu, und jedem Punkt von T_g, der Grenzpunkt einer Folge von Intervallendpunkten ist, denjenigen Punkt von X_g, der Grenzpunkt der entsprechenden Folge ist, so ist dadurch x als eindeutige und stetige Function der Menge T resp. der Werte t definirt[1]), während t nur in den Punkten von X_g eindeutige und stetige Function von x, in den Punkten von X selbst dagegen zweideutig und damit unstetig ist. Andererseits liefert die bekannte Peano'sche Abbildung des Quadrats auf die Einheitsstrecke ein Beispiel, in dem die stetige Beziehung zwischen Quadrat und Strecke in der Weise hergestellt ist, dafs die Punkte der Einheitsstrecke eindeutig und stetig von den Punkten des Quadrats abhängen. Die unten folgende nähere Erörterung dieser Abbildung wird übrigens ergeben, dafs auch bei ihr continuirliche Mengen des Quadrats auf nirgends dichte Mengen der Einheitsstrecke abgebildet sind.

3. Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, dafs die Beziehung zwischen den Mengen P und Q eineindeutig ist. Alsdann besteht der folgende wichtige und für die geometrischen Anwendungen grundlegende Satz:

III. Ist Q umkehrbar eindeutiges Bild der abgeschlossenen Menge P, und ist Q überdies stetiges Bild von P, so ist auch P stetiges Bild von Q[2]).

Für den Beweis dieses Satzes ist folgendes zu zeigen: Sind p' und q' zwei entsprechende Punkte, und ist q' Grenzpunkt einer Menge $\{q_\nu\} = q_1, q_2, q_3, \cdots$, so hat die entsprechende Menge $\{p_\nu\} = p_1, p_2, p_3, \cdots$ den Punkt p' als Grenzpunkt. Dies ist aber leicht zu sehen. Ist nämlich p_ω irgend eine Grenzstelle von $\{p_\nu\}$, und ist sie insbesondere Grenzstelle von Punkten $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, \cdots$, so entsprechen ihnen die Punkte $q_\alpha, q_\beta, q_\gamma, \cdots$ mit der Grenzstelle q', und es mufs, weil Q stetiges Bild von P ist, q' Bild von p_ω sein. Daraus folgt aber, dafs $p_\omega = p'$ ist, und dafs also $\{p_\nu\}$ nur die eine Grenzstelle p' besitzt, womit der Satz bewiesen ist.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dafs die Menge P und damit auch Q perfect ist. Für eine solche Menge gelten, auch wenn sie nirgends dicht ist, die nämlichen beiden Hauptsätze über

1) Dies gilt übrigens auch dann noch, wenn man alle Werte x, die links eines t_r, resp. rechts eines t_l liegen, um eine und dieselbe Constante vermehrt, resp. wenn man dies beliebig oft ausführt.

2) Vgl. C. Jordan, cours etc., Bd. I, S. 53. Auch dieser Satz findet sich in seinem einfachsten Fall schon bei Beckmann, a. a. O. S. 54.

ihre Stetigkeitseigenschaften wie für das Continuum, das ja selbst eine perfecte Menge darstellt. Die erste Eigenschaft ist die der gleichmäfsigen Stetigkeit, auf die im Fall einer linearen continuirlichen Menge zuerst Heine hingewiesen hat[1]), und die sich durch folgenden Satz ausdrückt:

IV. Eine für jeden Punkt einer perfecten Menge P stetige Function ist auch gleichmäfsig stetig.

Dem Stetigkeitsbegriff gemäfs giebt es nämlich um einen Punkt $p = (x, y, \cdots)$ eine Kugel H, so dafs für jeden ihrer inneren Punkte $p_i = (x + h, y + k, \cdots)$ die Differenz $| F(p_i) - F(p) |$ unterhalb der beliebigen Gröfse ε liegt[2]). Die Radien dieser Kugeln haben eine obere Grenze η, so dafs bei gegebenem ε zu jedem Punkt p eine solche Gröfse η gehört, und man kann zeigen, dafs die untere Grenze aller η, die zu den sämtlichen Punkten von P gehören, bei perfecten Mengen nicht Null ist. Wäre sie nämlich gleich Null, so fasse man irgend welche Punkte $p_1, p_2, p_3, \cdots p_\nu, \cdots$ so ins Auge, dafs die zugehörigen Gröfsen $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \cdots \eta_\nu > \cdots$ gegen Null convergiren. Ist dann p_ω ein Grenzpunkt der genannten Punkte, so gehört doch auch zu ihm ein endliches η, und dies steht damit in Widerspruch, dafs es in jeder Nähe von p_ω Punkte p_ν geben soll, deren η_ν unterhalb jeder Gröfse bleibt.

Der Schlufs beruht ganz wesentlich darauf, dafs der Punkt p_ω der Menge P angehört, was nur bei abgeschlossenen Mengen der Fall ist. Für nicht abgeschlossene Mengen versagt daher der vorstehende Beweis; in der That gilt auch der Satz nicht für sie[3]). Dieser Satz kann übrigens auch als eine unmittelbare Folge des S. 51 erwähnten Heine-Borel'schen Theorems betrachtet werden.

Der zweite der hier zu erwähnenden Sätze gilt für alle Arten von Mengen, also auch für alle in sich dichten Mengen. Er ist für den einfachen Fall einer Function einer continuirlichen Variablen zuerst von Heine aufgestellt worden[4]), ich spreche ihn folgendermafsen aus:

V. Eine für eine beliebige Menge P stetige Function $F(x, y, \cdots)$ ist für alle Punkte von P bekannt, wenn sie für eine in Bezug auf P überall dichte[5]) Teilmenge U bekannt ist.

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Stetigkeitsdefinition, in Verbindung mit der Thatsache, dafs $P = U + U_g$ ist,

---

1) Journ. f. Math. 74, S. 188. Vgl. auch Lüroth, Math. Ann. 6, S. 319.

2) Dies gilt sowohl für perfecte, wie für in sich dichte Mengen, da bei beiden jeder Punkt Grenzpunkt ist.

3) Vgl. noch S. 132. Man vergleiche auch eine gelegentliche Bemerkung von L. Scheeffer, Acta math. 5, S. 295.

4) Journ. f. Math. 74, S. 183.

5) Vgl. S. 80.

also jeder Punkt von P als Grenzpunkt einer in U enthaltenen Punktmenge darstellbar ist.

4. Dieser Satz hat, wie bereits oben erwähnt wurde, zunächst eine hervorragend praktische Bedeutung. Wie aus ihm folgt, kann man nämlich eine in Bezug auf P stetige Function in der Weise bilden, dafs man ihre Werte an einer bezüglich P abzählbaren und überall dichten Teilmenge U geeignet vorschreibt, z. B. eine Function einer continuirlichen Variablen durch ihre Werte an den rationalen Stellen[1]). Dies geschieht bekanntlich so, dafs wenn

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots = \{u_\nu\}$$

irgend welche Punkte von u sind, die $u_\omega = p$ als Grenzstelle haben, der Functionswert $F(p)$ durch die Folge

$$F(u_1),\ F(u_2),\ F(u_3) \cdots = \{F(u_\nu)\}$$

zu definiren ist. Hier entsteht aber nun die Frage, wie die Werte von $F(u)$ beschaffen sein müssen, damit diese Function in der angegebenen Weise in eine für die Menge P stetige Function übergeht, so dafs also die Reihen $\{F(u_\nu)\}$ stets einen Grenzwert besitzen, und zwar unabhängig von der Fundamentalreihe $\{u_\nu\}$, durch die p dargestellt wird. Hierzu ist jedenfalls notwendig, dafs $F(u)$ für jeden Punkt der Menge U die Stetigkeitseigenschaft besitzt, doch ist diese Bedingung keineswegs hinreichend. Denn da jetzt U eine in sich dichte und nicht perfecte Menge ist, so kann man nicht mehr schliefsen, dafs die oben betrachtete untere Grenze von η gröfser als Null ist, da jetzt der bezügliche Punkt p_ω der Menge U nicht immer angehört. Dies ist nur der Fall, falls man die nicht erweisbare gleichmäfsige Stetigkeit für $F(u)$ ausdrücklich fordert oder voraussetzt. Auf diese Thatsache hat kürzlich Brodén[2]) aufmerksam gemacht. Ihre weitere Bedeutung wird sich weiter unten ergeben; hier genüge es, das Resultat wie folgt auszusprechen:

VI. Ist U eine überall dichte Teilmenge einer perfecten Menge P, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs eine bezüglich U stetige Function $F(u)$ zu einer für P stetigen Function $F(p)$ erweitert werden kann, darin, dafs $F(u)$ bezüglich U gleichmäfsig stetig ist[3]).

---

1) Es folgt hieraus ein neuer Beweis dafür, dafs die Mächtigkeit aller stetigen Function gleich $\mathfrak{c}$ ist; denn ihre Gesamtheit ist eine Teilmenge der Belegungsmenge von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{c}$, d. h. $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$.

2) Journ. f. Math. 118, S. 3 und Acta Univ. Lund. Bd. 8, S. 10.

3) Brodén bezeichnet a. a. O. eine für eine überall dichte, abzählbare Menge U stetige Function als quasistetig und nennt jede Function $F(p)$, die aus $F(u)$ durch obengenannten Erweiterungsprocess entsteht, eine limitäre Function. Er bezeichnet überdies die Punkte von U als primäre, die von U_g als secundäre Stellen.

Man kann den vorstehenden Satz unter anderem auch benutzen, um eine stetige Function zu bilden, die an jeder rationalen Stelle einen rationalen Wert hat, ohne doch längs irgend eines Intervalls selbst eine rationale Function zu sein, und dies sogar so, dafs die Function monoton ist[1]). Die Möglichkeit der eineindeutigen und ähnlichen Abbildung der der Gröfse nach geordneten rationalen Zahlen auf sich selbst findet sich übrigens auch bei Cantor erwähnt[2]), ohne dafs jedoch die Stetigkeit in Betracht gezogen wird. Es ist leicht, dies so zu thun, dafs auch die Stetigkeit gewahrt wird.

Ich werde in der Folge sagen, dafs $F(p)$ aus $F(u)$ durch einen Erweiterungsprocefs hervorgeht, auch $F(p)$ die auf die Menge P erweiterte Function nennen[3]).

Ich führe noch folgende Bezeichnung ein. Ist eine für eine Menge P definirte Function gegeben, und Q eine Teilmenge von P, so kann gelegentlich die Function nur für die Werte in Frage kommen, die sie an der Menge $Q = \{q\}$ hat. Alsdann wollen wir die so aufgefafste Function durch

$$F(q) = F(p, Q)$$

bezeichnen. Demgemäfs würde die eben benutzte Function $F(u)$ auch als $F(p, U)$ zu bezeichnen sein, wenn man von $F(p)$ ausgeht.

5. Es ist hier der Ort, wo sich die Erörterung der Peano'schen Abbildung am natürlichsten einfügt. Sei C_2 die Punktmenge des Quadrats, und C_1 die Punktmenge auf der Einheitsstrecke. Gemäfs dem vorstehenden wird eine stetige Abbildung von C_2 auf C_1 sicher vorhanden sein, wenn es gelingt, diese Abbildung für eine abzählbare und überall dichte Punktmenge des Quadrates C_2 gleichmäfsig stetig herzustellen. Als solche Mengen bieten sich zunächst die rationalen Punkte dar; die einfachste Art der Abbildung erhält man jedoch, falls man solche Teilmengen der rationalen Punkte ins Auge fafst, die bei fortgesetzter Teilung der Einheitsstrecke und des Quadrates entstehen. Es handelt sich nur darum, wie man eine stetige Beziehung zwischen diesen Mengen vermittelt, und dies geschicht folgendermafsen[4]).

---

1) Vgl. hierüber auch Cap. 2 dieses Abschnitts, S. 137. Eine Function einer Variablen soll monoton im Intervall $a \ldots b$ heifsen, wenn sie in ihm entweder niemals zunimmt oder niemals abnimmt. Ich bemerke ferner ganz allgemein, dafs ich die Angabe, ob einem Intervall seine Endpunkte zuzurechnen sind oder nicht, meist unterlassen werde. Ob dies zu geschehen hat oder nicht, ist von sich aus klar. Ist die Menge P, die die Wertmenge von x bildet, abgeschlossen, so gehören die Endpunkte dem Intervall an; ist sie nicht abgeschlossen, so ist es belanglos, ob sie ihm zugerechnet werden oder nicht. Ähnlich ist es im Gebiet mehrerer Variablen.

2) Math. Ann. 46, S. 504.

3) Vgl. auch S. 132 ff.

4) Die hier folgende Darstellung gab der Verf. bereits 1898 in Düsseldorf. Sie ist kürzlich auch von anderer Seite veröffentlicht worden vgl. Moore, Trans. of the Am. Math. Soc. 1, 1, S. 77.

Sei μ eine beliebige **ungerade** Zahl, so teile man die Einheitsstrecke in $\mu^2 = \varrho$ der Einfachheit halber gleiche Teile, die der Reihe nach

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \cdots e_\varrho$$

sein mögen. Ebenso teile man die Quadratseiten in je μ gleiche Teile, so lassen sich die $\mu^2 = \varrho$ Teilquadrate q_i in einem einzigen Linienzug L_1 so durchlaufen, dafs (Fig. 2) jedes q_i eine Diagonale d_i zu L_1 beiträgt. Durch diesen Linienzug werden die Quadrate q_i in eine Reihenfolge

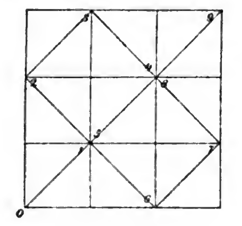


Fig. 2.

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \cdots q_\varrho$$

gebracht; wir ordnen sie den obigen Intervallen so zu, dafs e_i und q_i einander entsprechen, und zugleich den Endpunkten x_{i-1} und x_i von e_i die Endpunkte p_{i-1} und p_i der Diagonale d_i. Wir haben dann bereits zwei endliche Mengen

$$X_1 = \{x_i\} \text{ und } P_1 = \{p_i\},$$

so dafs X_1 eindeutiges Bild von P_1 ist, aber P_1 nicht eindeutiges Bild von X_1.

Man teile nun jedes Intervall e_i wieder in ϱ gleiche Teile

$$e_{i1},\ e_{i2},\ e_{i3},\ \cdots e_{i\varrho},$$

und analog jedes Quadrat q_i in ϱ gleiche Teilquadrate

$$q_{i1},\ q_{i2},\ q_{i3},\ \cdots q_{i\varrho},$$

so lassen sich auch diese Quadrate durch einen Linienzug $L^{(i)}$ durchlaufen, der dem Linienzug L_1 analog ist und für die Quadrate q_{ik} die vorstehende Anordnung bestimmt. Es fällt dabei der Anfangspunkt und Endpunkt von $L^{(i)}$ mit dem Anfangspunkt und Endpunkt der Diagonale d_i zusammen, die q_i zum Linienzug L_1 beiträgt, und dies bewirkt, dafs alle diese Linienzüge $L^{(i)}$ einen einheitlichen Linienzug L_2 bilden, der die Quadrate q_{ik} in derselben Reihenfolge durchläuft, die die Intervalle e_{ik} auf der Einheitsstrecke haben.

In dieser Weise kann man fortfahren. Man erhält so die Linienzüge

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ \cdots L_\nu,\ \cdots,$$

und jeder Linienzug L_ν liefert zwei endliche Mengen

$$X_\nu = \{x_{ikl\ldots}\} \text{ und } P_\nu = \{p_{ikl\ldots}\},$$

die das Quadrat allmählich überall dicht bedecken und zwei überall dichte Mengen[1])

$$X = \{x_N\} \text{ und } P = \{p_N\}$$

liefern von der Art, dafs X ein eindeutiges und stetiges Abbild von P ist, wohingegen P nicht eindeutiges Bild von X ist. Diese Abbildung läfst sich nun wieder zu einer für alle Punkte von C_2 resp. C_1 giltigen erweitern. Ist nämlich x_g ein beliebiger Punkt von X_g, so ist er Grenzpunkt einer Intervallreihe

$$e_i, e_{ik}, e_{ikl}, \cdots e_N, \cdots$$

für bestimmte $i, k, l, \cdots$, und ihm entspricht derjenige Punkt p von P_g, der durch die Folge von Quadraten

$$q_i, q_{ik}, q_{ikl}, \cdots q_N, \cdots$$

dargestellt wird. Da nun nach der Construction P ein gleichmäfsig stetiges Bild von X ist, so ist auch C_2 stetiges Bild von C_1; also folgt:

VII. Man kann eine abzählbare überall dichte Punktmenge eines Quadrats eindeutig und gleichmäfsig stetig auf eine abzählbare überall dichte Punktmenge einer Strecke abbilden; durch Erweiterung dieser Abbildung wird alsdann auch die Gesamtheit aller Punkte des Quadrats eindeutig und stetig auf die Gesamtheit der Punkte der Strecke abgebildet.

Das umgekehrte ist natürlich nicht der Fall, da C_1 nicht eindeutiges Bild von C_2 ist. Es entsprechen vielmehr jedem Punkt des Quadrats, der zu einer Menge P_ν gehört, zwei Punkte der Strecke, nämlich je zwei Punkte der Menge X_ν, ferner jedem Punkt des Quadrats, der auf einer der benutzten Teilungslinien liegt, ohne einer Menge P_ν anzugehören, vier Punkte der Strecke, jedem andern Punkt des Quadrats hingegen nur ein Punkt der Strecke.

Übrigens kann man diese Abbildung noch mannigfach modificiren, insbesondere so, dafs man die Teilung des Quadrates so vornimmt, dafs man es erst in μ Rechtecke zerlegt, die nicht gleich zu sein brauchen, und dann jedes Rechteck wieder irgendwie in μ weitere rechteckige Teile, oder auch so, dafs man die feste Zahl μ durch beliebige ungerade Zahlen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots$ ersetzt, die sogar auch beliebig wachsen mögen, u. s. w.; nur mufs dabei naturgemäfs die Bedingung der gleichmäfsigen Stetigkeit erfüllt bleiben. Die Peano'sche Abbildung entspricht dem einfachsten Fall des obigen Verfahrens, dafs nämlich $\mu = 3$ ist[2]).

Über die Besonderheit dieser Art stetiger Abbildungen bemerke

1) Für die Bezeichnung vgl. S. 77.

2) Dies läuft darauf hinaus, alle Punkte in einem Zahlsystem mit der Basis 3 darzustellen. Von dieser Darstellung geht Peano aus und giebt die an sie anschliefsenden arithmetischen Abbildungsgesetze.

ich noch folgendes. Aus dem Charakter der Abbildung folgt, dafs jedem beliebigen Stück der Einheitsstrecke eine solche Teilmenge des Einheitsquadrats q entspricht, der gewisse Teilquadrate q_N mit allen ihren Punkten angehören. Einer in q gezogenen Geraden oder beliebigen Curve entspricht daher notwendig eine nirgends dichte Menge der Einheitsstrecke, und aus dem Satz I folgt, dafs diese Menge abgeschlossen ist. Dagegen braucht einer perfecten Menge des Quadrats keine perfecte Bildmenge auf der Einheitsstrecke zu entsprechen, da Satz II die eindeutige Abbildung voraussetzt[1]. Also folgt:

VIII. Bei der obigen Abbildung des Quadrats auf die Strecke entspricht jeder das Quadrat durchziehenden Geraden eine nirgends dichte abgeschlossene Menge der Einheitsstrecke, die jedoch nicht perfect zu sein braucht[2].

Denkt man sich alle Geraden g, die einer und derselben Richtung parallel sind, so entspricht jeder von ihnen eine nirgends dichte Menge G der Einheitsstrecke, und die Gesamtheit dieser Mengen G liefert das auf der Einheitsstrecke liegende Continuum C_1[3].

Der vorstehende Satz gilt übrigens auch für die von Hilbert[4] angegebene Abbildung des Quadrats auf die Strecke. Was die Stellung dieser beiden Abbildungsweisen zu einander betrifft, so kommen in ihnen die zwei wesentlichen Methoden zur Anwendung, mittelst deren man eine „Curve“ durch Polygonzüge von wachsender Seitenzahl zu approximiren pflegt. Dies kann erstens so geschehen, dafs man auf der Curve eine endliche Punktmenge P_ν auswählt, die zu Ecken der Polygonzüge benutzt wird, und die mit wachsendem ν die Curve überall dicht bedeckt, und dies ist bei der Peano'schen Abbildung realisirt. Hierin liegt zugleich der geometrische Inhalt des oben abgeleiteten allgemeinen Satzes. Man kann aber auch die Punktmenge P_ν in anderer Weise wählen, und zwar ist der extremste Fall der, dafs man keinen Punkt von P_ν auf der Curve annimmt, so dafs, falls die Curve geschlossen ist, die approximirenden Polygone ganz innerhalb von einander liegen; und dies ist bei der Hilbert'schen Abbildung der Fall[5].

---

1) Es ist leicht, Beispiele anzugeben, in denen dies der Fall ist. Man wähle z. B. die Strecke 01 bei der unten erwähnten Hilbert'schen Abbildung, resp. ihre Bildmenge.

2) Wählt man z. B. als Gerade die Diagonale 01 des Quadrats, so bleiben bei der Peano'schen Abbildung auf der Einheitsstrecke die Intervalle 14 und 58 von Bildpunkten frei, ebenso alsdann je zwei analoge Intervalle auf den Strecken 01, 45, 89 u. s. w.

3) Eine analoge Composition des Continuums C_1 aus nirgends dichten Mengen, die bei der Abbildung des Quadrats auf die Gerade auftritt, zeigte der Verfasser in Gött. Nachr. 1896, S. 255.

4) Math. Ann. 38, S. 459.

5) Vgl. z. B. die a. a. O. befindlichen Figuren. Eine Abbildung des Quadrats auf die Strecke, die in einer überall dichten Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ stetig ist, giebt auch Cesaro; vgl. Bull. des Scienc. math. (2) 21, S. 257.

Das obige Verfahren der stetigen Abbildung läfst sich auf den Würfel des C_3, sowie auf einen Würfel des C_ν ausdehnen. Teilt man den gewöhnlichen Würfel w in $\mu^3 = \varrho$ Teilwürfel w_i, wo μ wieder eine ungerade Zahl ist, so kann man zunächst jeden der μ^2 Würfel der über einer Seitenfläche q stehenden Schicht in der Reihenfolge durchlaufen, wie vorstehend die μ^2 Quadrate q_i. Der sie durchziehende Linienzug L' ist überdies so zu wählen, dafs er von jedem dieser Teilwürfel eine Körperdiagonale enthält, so dafs er abwechselnd einen Punkt der Fläche q und der zu ihr parallelen Fläche q' enthält, und dafs zugleich seine Projection auf q den oben benutzten Linienzug L_1 liefert. Wenn alsdann der Linienzug L' in der Fläche q beginnt, so endigt er in q', und man kann nun die zweite Schicht in derselben Weise durchziehen u. s. w. Man kann dann wieder jede Diagonale dieses Linienzuges durch einen analogen Linienzug ersetzen und gelangt so zu den gleichen Resultaten, wie vorher[1]).

6. Man kann umgekehrt die Frage stellen, ob Satz VIII für jede eindeutige und stetige Abbildung des Quadrats auf die Strecke erfüllt ist, die nicht für alle Punkte des Quadrats umkehrbar eindeutig ist. Diese Frage dürfte zu bejahen sein, wenn man überdies voraussetzt, dafs jedem Punkt des Quadrats nur eine endliche Zahl von Punkten der Strecke entspricht. Man kann zunächst folgern, dafs die Punkte, in denen die Abbildung nicht umkehrbar eindeutig ist, eine überall dichte Menge $P = \{p\}$ bilden müssen. Wäre nämlich H ein Gebietsteil des Quadrats, in dem kein derartiger Punkt p vorhanden wäre, so läge für den Gebietsteil H eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung vor, und das Bild von H ist dann notwendig ein Flächenstück[2]). Betrachtet man jetzt wieder eine das Quadrat durchziehende Gerade und denkt sich ihre Punkte durch einen Parameter t dargestellt, so ist die Abscisse x des auf der Einheitsstrecke liegenden Bildpunktes eine Function, die in jedem Punkt p, der auf der Geraden liegt, mehrwertig ist. Hieraus ist der Satz zu folgern, ich mufs es aber dahingestellt lassen, ob dies ohne weitere Annahmen möglich ist. Eine allgemeine Aufzählung aller überhaupt möglichen stetigen Abbildungen des Quadrats auf die Strecke vermag ich in zwingender Form hier nicht anzugeben.

Zweites Capitel.

Die punktweise unstetigen Functionen.

Hankel ist der erste gewesen, der eine systematische Untersuchung der punktweise unstetigen Functionen angestellt hat; von ihm stammt auch bereits die Einteilung aller Functionen in überall

1) Dafs die Abbildung auf den Würfel übertragbar ist, findet sich schon bei Peano, Math. Ann. 36, S. 59.

2) Vgl. eine Note des Verf. in den Götting. Nachr. 1900, Heft 1.

stetige, punktweise unstetige und überall unstetige Functionen. Den Anstofs zu dieser Untersuchung hatte bekanntlich Riemann gegeben, indem er ein erstes Beispiel einer Function kennen lehrte, die unendlich viele und sogar überall dicht liegende Unstetigkeitspunkte enthält. Die genauere Analyse dieser Functionen erfordert die Einführung des einer jeden Stelle zukommenden Unstetigkeitsgrades (Sprunges) ω einer Function (1). Aufser Hankel sind auch Volterra und Harnack als diejenigen zu nennen, denen man die ersten allgemeineren Sätze auf diesem Gebiete verdankt.

Wie der Heine-Borel'sche Satz bei überall stetigen Functionen die Quelle der gleichmäfsigen Stetigkeit ist, so ist es auch hier ein Gedanke Borel's, der die einfachste und durchsichtigste Grundlage der Schlüsse bildet (2). Es ist dasjenige Theorem, das bereits (S. 109) als das Gegenstück des eben genannten Satzes bezeichnet wurde, und mittelst dessen wir die Mengen zweiter Kategorie construirt haben. Eine solche Menge wird von den Stetigkeitspunkten einer jeden punktweise unstetigen Function gebildet. Die immer abgeschlossenen Mengen K_ν, die aus den Unstetigkeitspunkten $\omega \geqq k_\nu$ bestehen, stellen in ihrer Gesamtheit diejenige Menge erster Kategorie $\mathfrak{M}\{K_\nu\}$ dar, deren Complementärmenge die Stetigkeitspunkte liefert (3). Die besondere Art der Mengen K_ν, sowie die aus ihnen gebildete Gesamtmenge $\{K_\nu\}$ bilden daher die natürliche Grundlage für die Einteilung der punktweise unstetigen Functionen. Die bekannteren Beispiele sind meist solche, in denen jedes K endlich ist, während $\{K_\nu\}$ überall dicht ist. Man kennt aber auch Functionen, bei denen die Mengen K unendlich sind oder sogar die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen (7, 3).

Neuere Untersuchungen Brodén's gehen darauf aus, die Erörterung der punktweise unstetigen Functionen $F(p)$ an die Werte zu knüpfen, die sie an den Stetigkeitspunkten haben. Die methodische Weiterbildung dieses Gedankens führt dazu, die Function in zwei Bestandteile zu spalten, von denen der eine eine Function ist, die an allen Stetigkeitspunkten den Wert Null hat und als eine Art äufserlicher Zuthat betrachtet werden kann (5). Diese Spaltung wird sich für manche Zwecke als von erheblichem Nutzen erweisen, insbesondere da, wo, wie beim Integralbegriff, die Werte der Function an den Unstetigkeitsstellen in gewissem Sinn belanglos sind.

Sätze besonderen Inhalts waren bis vor kurzem nur für Functionen einer Variablen bekannt. Baire hat kürzlich solche Sätze auch für Functionen mehrerer Variablen aufgestellt, er hat insbesondere untersucht, wie man bei einer Function von zwei Variablen aus der Stetigkeit bezüglich jeder einzelnen Variablen auf die Gesamtstetigkeit schliefsen kann (9). Er hat auch die allgemeine Analyse der punktweise unstetigen Functionen durch neuere Untersuchungen wesentlich vertieft (10).

Die vorstehenden Resultate beziehen sich übrigens nicht allein

auf Functionen eines continuirlichen Gebiets. Die Punktmenge, für die sie definirt sind, kann vielmehr auch nirgends dicht sein.

1. Ist $F(x, y, \cdots) = F(p)$ eine für die unendliche Menge P definirte Function, und ist

$$(1) \qquad \{p_\nu\} = p_1, p_2, p_3, \cdots p_\nu, \cdots$$

eine Punktfolge, die gegen p_ω convergirt, so heifst die Function an der Stelle p_ω **unstetig**, falls die Reihe

$$(2) \qquad \{F(p_\nu)\} = F(p_1), F(p_2), \cdots F(p_\nu), \cdots$$

für irgend eine den Punkt p_ω darstellende Folge der Form (1) nicht gegen den Functionswert $F(p_\omega)$ convergirt. Um hierfür eine präcisere Begriffsbestimmung zu erhalten, führt man den Begriff der **Schwankung** und des **Unstetigkeitsgrades** ein. Ist nämlich H_ν irgend eine um p gelegte Kugel mit dem Radius ϱ_ν, so wird bekanntlich die Differenz zwischen der oberen und unteren Grenze aller Functionswerte, die $F(p)$ innerhalb der Kugel H_ν annimmt, als Schwankung σ_ν bezeichnet. Wenn nun ϱ_ν gegen Null convergirt, so convergirt σ_ν gegen eine bestimmte untere Grenze k, und es ist $F(p)$ nach dem vorigen an der Stelle p **stetig**, falls $k = 0$ ist. Ist jedoch $k > 0$, so heifst $F(p)$ an der Stelle p **unstetig**, und es soll k als der **Unstetigkeitsgrad** ω an der Stelle p bezeichnet werden[1]. Es wird auf diese Weise jeder Stelle p eine bestimmte Zahl $\omega(p) = k$ zugeordnet. Diese Zahl k ist davon unabhängig, ob der Kugel H_ν die Punkte der Oberfläche zugerechnet werden oder nicht; ist ferner $k' > k$, so giebt es stets eine Kugel H, für die $\sigma \leqq k'$ ist, während für $k' < k$ solche Kugeln nicht existiren.

2. Sei nun insbesondere die Menge P, für die die Function $F(p)$ definirt ist, eine abgeschlossene Menge. Alsdann giebt es einen einfachen Satz allgemeiner Art über die Unstetigkeitspunkte. Aus der Natur des Grenzpunktes und der Definition des Unstetigkeitsgrades folgt unmittelbar, dafs die Punkte vom Unstetigkeitsgrad $\omega \geqq k$, falls sie in unendlicher Zahl vorhanden sind, eine **abgeschlossene** Menge K bilden. Dieser Satz beherrscht die Verteilung der Unstetigkeitspunkte vollständig.

Sei jetzt die Menge P insbesondere eine perfecte Menge T, die in einem Gebietsteil H enthalten ist, so dafs also jeder Punkt ein Grenzpunkt ist und auf jeden von ihnen der Stetigkeitsbegriff anwendbar ist. Es sind dann an sich drei Fälle möglich. Es können erstens alle Punkte von T Stetigkeitspunkte sein, oder sie sind sämtlich Unstetigkeitspunkte, oder aber sie sind teils Stetigkeits-

---

1) Eine andere, auf Wahrscheinlichkeitsbegriffen ruhende Definition des Unstetigkeitsgrades giebt **Cesaro**. (Rend. dell' Acc. dei Linc. (4) 4, S. 12.)

punkte, teils Unstetigkeitspunkte. Im ersten Fall ist die Function in T **überall stetig**, im zweiten heifst sie **überall oder total unstetig**. Was den dritten Fall betrifft, so ist weiter zu unterscheiden, ob es Teilbereiche von H giebt, in denen die Function total unstetig bezüglich T ist oder nicht. Giebt es keinen Teilbereich dieser Art, und dieser Fall ist der einzige, der der näheren Erörterung bedarf, und auf den wir uns daher ausdrücklich beschränken[1]), so heifst dies andererseits, dafs **die Stetigkeitspunkte einer solchen Function überall dicht bezüglich T liegen**. Diese Functionen sollen als **punktweise unstetige** Functionen in T bezeichnet werden.[2]) Mit Rücksicht auf S. 63 u. 80 schliefsen wir nun weiter, dafs die Menge der Unstetigkeitspunkte $\omega > k$ nirgends überall dicht bezüglich T sein kann; d. h. es folgt:

I. **Ist $F(x, y, \ldots)$ eine für die perfecte Punktmenge T punktweise unstetige Function, so bilden die Punkte $\omega > k$ für jedes k eine bezüglich T nirgends dichte abgeschlossene Menge K.**[3])

Die Menge K ist nichts anderes als eine **Borel**'sche Menge (S. 110). Wird nämlich zu einem Punkt von T der gröfste Bereich η gesucht, innerhalb dessen die Functionsschwankung $\sigma \leqq k$ ist, so gehört jetzt nicht zu jedem Punkt ein solcher Bereich, es bilden aber diese Bereiche in ihrer Gesamtheit eine **Borel**'sche Gebietsmenge, und K ist die zugehörige abgeschlossene Menge. In diesem

---

1) Der Bereich H, in dem eine Function definirt ist, mufs immer in eine höchstens abzählbare Menge von Teilbereichen H_1, H_2, H_3, ... zerfallen, so dafs in jedem Bereich H_i die Function einen der drei oben genannten Charaktere besitzt.

2) Die Bezeichnung stammt im wesentlichen von **Hankel**, wenn auch seine Einteilung sich mit der obigen nicht ganz deckt, Math. Ann. 20, S. 85. Eine davon verschiedene, jedoch nicht allgemein acceptirte Bezeichnung findet sich bei **Harnack**, die Elemente etc., S. 262.

3) Da der Begriff der punktweise unstetigen Function sich meist an eine continuirliche unabhängige Variable knüpft, so scheint es angemessen, ein Beispiel zu geben, das sich auf den Fall einer Menge T bezieht. Dazu betrachte man zunächst eine Function $F(x)$, die für alle Punkte eines Intervalls $a \ldots b$ definirt ist und in allen Punkten von T den Wert 1 hat, sonst aber Null ist, so ist diese Function in Bezug auf T constant, also auch stetig. Würde man die Function $F(x)$ so abändern, dafs sie nur an den Stellen von T_l und T_r (S. 77) den Wert 1 hat, sonst aber Null ist, so ist sie eine in T total unstetige Function. Nimmt man $F(x)$ als punktweise unstetige Function im Intervall $a \ldots b$ an, bildet das auf $a \ldots b$ liegende Continuum C in der oben (S. 79) angegebenen Weise auf die Menge T ab und ordnet jedem Punkt t der Menge T denjenigen Functionswert zu, der dem Bildpunkt x in C entspricht, so ergiebt sich eine in T punktweise unstetige Function. Die Function behält diese Charaktere sogar auch, wenn man an allen links von einem Punkte t_r oder rechts von einem Punkte t_l liegenden Stellen die Functionswerte um eine beliebige Constante vermehrt.

Thatbestand und seinem Gegensatz zum Heine-Borel'schen Theorem findet der Unterschied zwischen stetigen und punktweise unstetigen Functionen seinen einfachsten Ausdruck[1]).

3. Die Existenz einer Menge K für jedes k bildet danach die notwendige Bedingung dafür, dafs die Function nur punktweise unstetig ist; naturgemäfs kann die Menge K auch aus einer endlichen Anzahl von Punkten bestehen. Diese Bedingung ist nun aber auch umkehrbar; d. h. es besteht der Satz:

II. Bilden für eine perfecte Menge T die Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ einer Function für jedes k eine nirgends dichte abgeschlossene Menge K, so ist die Function für die Menge T punktweise unstetig.

Sei nämlich

$$k_1 > k_2 > k_3 > \cdots > k_\nu > \cdots$$

eine Reihe positiver gegen Null abnehmender Gröfsen, so entspricht jedem k_i eine nirgends dichte Menge K_i von Punkten $\omega \geqq k_i$. Wir erhalten so die Mengen

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \cdots K_\nu,\ \cdots,$$

deren jede in der folgenden als Teilmenge enthalten ist, und die mit wachsendem Index die Unstetigkeitspunkte des Bereichs mehr und mehr absorbiren. Es kann dabei vorkommen, dafs die Punkte von K_ν mit wachsendem ν in jeden Teilbereich eindringen und zuletzt überall dicht in T liegen, doch braucht dies keineswegs der Fall zu sein. Jedenfalls liegen aber die Stetigkeitspunkte noch überall dicht in T. Die Mengen K_ν bilden nämlich, wie unmittelbar ersichtlich ist, eine Menge erster Kategorie, deren Complementärmenge die Stetigkeitspunkte darstellt. In der That ist jeder Unstetigkeitspunkt notwendig Punkt einer Menge K_ν, also ist jeder Punkt der Complementärmenge ein Stetigkeitspunkt. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Die Eigenschaft der punktweise unstetigen Functionen, dafs ihre Stetigkeitspunkte überall dicht liegen, läfst sich noch genauer formuliren; wie aus dem obigen folgt, besteht nämlich folgender darüber hinausgehender Satz:

III. Die Stetigkeitspunkte einer punktweise unstetigen Function besitzen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und bilden eine Menge zweiter Kategorie.

---

1) Du Bois-Reymond, der für diese Dinge eine feine Empfindung hatte, wenn er auch nicht immer zu bleibenden Begriffen gelangte, bezeichnet diesen Gegensatz so, dafs er Streckenstetigkeit und Punktstetigkeit unterscheidet und allgemein der Streckenbedingung, die für jeden Punkt gelten soll, die Punktbedingung gegenüberstellt. Vgl. z. B. Journ. f. Math. 100, S. 338 und C. R. 92, S. 962. Er sagt ferner, dafs bei Annäherung an einen Unstetigkeitspunkt der Stetigkeitsgrad unter jede Grenze sinkt.

Aus der Thatsache, dafs jede Menge K nirgends dicht ist, folgert man noch leicht, dafs auch die Summe und das Product beliebig (aber endlich) vieler punktweise stetigen Functionen niemals total unstetig sein kann. Hieraus folgt unmittelbar ein Satz von Volterra, der hier noch eine Stelle finden mag, und der besagt, dafs es zu einer im Bereich H punktweise unstetigen Function $F(p)$ keine punktweise unstetige Function giebt, die stetig ist, wo $F(p)$ unstetig ist, und umgekehrt[1]).

4. Ein Unstetigkeitspunkt x einer Function einer Variablen heifst bekanntlich links resp. rechts von der ersten oder zweiten Art, je nachdem ein bestimmter Grenzwert $f(x-0)$ resp. $f(x+0)$ vorhanden ist oder nicht. In Verallgemeinerung hiervon kann man nach der Menge Q aller Werte $\{q\}$ fragen, die sich an einer Unstetigkeitsstelle p einer Function $F(p)$ als analog definirte Functionswerte einstellen können[2]). Hierauf ist zu antworten, dafs diese Menge sowohl endlich, wie auch unendlich, sowohl abzählbar, als auch von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ sein kann. Es bestehen nämlich in dieser Hinsicht folgende Sätze:

IV. Die Menge $Q=\{q\}$ ist eine abgeschlossene Menge.

V. Jede abgeschlossene Menge $Q=\{q\}$ kann Wertmenge einer punktweise unstetigen Function an einem Unstetigkeitspunkt sein.

Nur der zweite Satz bedarf einer Erläuterung. Um ihn zu erweisen, genügt es, wenn wir eine Function einer Variablen construiren, die punktweise unstetig ist und an einer Seite des Punktes x' alle Werte der Menge Q als Grenzwerte annehmen kann, z. B. als Werte $f(x'+0)$. Diese Möglichkeit beruht darauf, dafs die Menge Q durch eine in Q überall dichte, abzählbare Menge V bestimmt ist. Ist nämlich

$$V=(v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots v_\lambda,\ \cdots\cdots)$$

diese Menge, so denken wir uns aus der Menge aller Werte von x eine abzählbare, nirgends dichte Menge X ausgewählt und diese wieder in eine abzählbare Menge anderer Mengen

$$X_1=\{x_{1\nu}\},\quad X_2=\{x_{2\nu}\},\quad \cdots\cdots\quad X_\lambda=\{x_{\lambda\nu}\},\ \cdots$$

zerlegt, die sämtlich nur den Punkt x' als Grenzpunkt haben. Wir bestimmen nun eine Function $f(x)$ so, dafs die Wertmengen

$$\{f(x_{1\nu})\},\quad \{f(x_{2\nu})\},\ \cdots\ \{f(x_{\lambda\nu}\},\ \cdots$$

---

1) Giorn. di Mat. 19, S. 76. Der Satz findet sich dort nur für eine Function einer einzigen Variablen ausgesprochen. In ihm kommt der Gegensatz zwischen Mengen erster und zweiter Kategorie zum Ausdruck.

2) Ist p Grenzpunkt der Punkte $p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_\nu,\ \ldots$, so wird jede Reihe $F(p_1),\ F(p_2),\ \ldots\ F(p_\nu),\ \ldots$, falls sie eine Fundamentalreihe ist, einen solchen Wert q liefern.

gegen $v_1, v_2, \cdots v_\lambda, \cdots$ convergiren, dafs aber im übrigen $f(x)$ beliebig, also z. B. für alle Punkte der Complementärmenge X_g von X constant ist, so ist damit eine Function der verlangten Beschaffenheit construirt. Dafs an der Stelle x die Werte von V selbst angenommen werden können, ist nämlich unmittelbar klar; man kann aber auch Werte x_{ik} so wählen, dafs die zugehörigen Werte der Function gegen irgend einen Punkt von V_g convergiren[1]).

Die vorstehenden Sätze stammen von Bettazzi[2]). Dem in ihnen enthaltenen sehr allgemeinen Resultat kommt jedoch bei näherer Betrachtung nur eine secundäre Bedeutung zu. Es beruht dies darauf, dafs der Function sozusagen ein gewisser äufserlicher Bestandteil anhaften kann, von dem sie sich aber reinigen läfst. Hierzu gelangt man, wenn man einem Gedanken nachgeht, der sich bei Brodén methodisch durchgeführt findet, und der darauf hinausläuft, die Stetigkeitspunkte als die bestimmenden Elemente punktweise unstetiger Functionen zu betrachten. Ist nämlich U die Menge der Stetigkeitspunkte einer in P punktweise unstetigen Function $F(p)$, so wollen wir in einem Unstetigkeitspunkt nur alle diejenigen Werte ins Auge fassen, die sich aus den Werten, die die Function in U hat, durch den bezüglichen Grenzprocefs ergeben. Wir übertragen also den oben für stetige Functionen erörterten Erweiterungsprocefs auch auf die punktweise unstetigen Functionen[3]). Wir beantworten damit zugleich die Frage, wie überhaupt eine Function beschaffen ist, wenn sie durch diesen Erweiterungsprocefs aus einer Function entsteht, die für eine in sich dichte Menge U stetig ist, ohne jedoch gleichmäfsig stetig zu sein. Gerade von dieser Aufgabe ist T. Brodén ausgegangen.

---

1) Ein einfaches Beispiel, in dem die Menge V abzählbar ist, ist das folgende. Man definire für ganzzahliges ν

$$f\left(\frac{1}{2^\nu}\right)=\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{1}{3^\nu}\right)=\frac{1}{3},\ \cdots\cdot\ f\left(\frac{1}{p^\nu}\right)=\frac{1}{p},\cdots,$$

wo p eine Primzahl ist, sonst aber $f(x)=0$, so ist die Menge V der Werte von $f(+0)$ durch

$$V=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots\cdot\ \frac{1}{p},\cdots\cdot\right)$$

gegeben, und es ist klar, dafs auch der Wert 0 möglicher Wert von $f(+0)$ ist. Man vgl. auch die weiteren auf S. 137 angeführten Nullfunctionen.

2) Rend. di Palermo 6, S. 173.

3) Um ein Beispiel zu geben, so betrachte man die Abbildung des Continuums $C=X+X_g$ auf die Menge $T=T_e+T_g$ (S. 79). Diese Abbildung ist für jeden Punkt von X_g stetig; ihm entspricht ein Punkt von T_g. Durch die Abbildung von X_g auf T_g ist aber zugleich die Gesamtabbildung bestimmt, resp. damit sind die beiden Werte von T_e resp. von T_l und T_r, die irgend einem Wert von X entsprechen, von selbst gegeben.

Um hier präcise zu verfahren, werde eine Function $\Phi(u) = \Phi(q, U)$ so definirt, dafs sie an den Stetigkeitsstellen mit $F(q)$ übereinstimmt, also für jeden Wert u

$$\Phi(u) = F(u)$$

ist. Ist nun wie oben $q = u_\omega$ ein durch die Folge

$$\{u_\nu\} = u_1,\ u_2,\ \cdots u_\nu,\ \cdots$$

dargestellter Punkt, so wird die Functionsfolge

$$\{F(u_\nu)\} = F(u_1),\ F(u_2),\ \cdots F(u_\nu),\ \cdots$$

für jede Folge, die q darstellt, gegen einen festen Wert convergiren oder nicht; und wir wollen nun im Anschlufs an Brodén der erweiterten Function im Punkt q alle Werte zuordnen, die durch eine Folge $\{F(u_\nu)\}$ dargestellt werden, so dafs $\Phi(q)$ in q auch mehrdeutig und sogar unendlich vieldeutig sein kann. Alsdann folgt zunächst, dafs die erweiterte Function $\Phi(q)$ immer dann in Q stetig ist, falls sie überall eindeutig ist. Ist sie in einem Punkt mehrdeutig, so soll er wiederum Unstetigkeitspunkt von Φ heifsen[1]); und es gilt der Satz:

VI. Entsteht aus der für eine in sich dichte Menge U stetigen Function $\Phi(u)$ durch Erweiterung keine in $Q = U'$ überall stetige Function $\Phi(q)$, so ist diese Function notwendig punktweise unstetig.

Um dies in bindender Form zu erhärten, weisen wir nach, dafs die Punkte von U auch für $\Phi(q)$ Stetigkeitspunkte sind. Sei nämlich u irgend ein Wert der Menge U, und

$$(3) \qquad u_1',\ u_2',\ u_3',\ \cdots u_\nu',\ \cdots$$

irgend eine ihn darstellende Folge von Punkten, die beliebig zu U oder U_g gehören, ferner seien

$$(4) \qquad F(u_1'),\ F(u_2'),\ \cdots F(u_\nu'),\ \cdots$$

irgend welche zu den u_ν' gehörige Functionswerte; alsdann ist zu zeigen, dafs sie eine Folge bilden, und dafs ihr Wert gleich $F(u)$ ist. Dazu denke man sich eine Reihe gegen Null convergirender Gröfsen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots$ beliebig angenommen, so giebt es stets Werte u_ν nahe bei u_ν' so, dafs

$$|F(u_\nu') - F(u_\nu)| < \varepsilon_\nu$$

ist, welchen der verschiedenen möglichen Werte $F(u_\nu')$ auch haben möge. Man kann daher Punkte

---

1) Die Differenz zwischen dem gröfsten und kleinsten Functionswert von $F(p)$ an der Stelle p kann als Unstetigkeitsintervall $\varkappa$ an der Stelle p bezeichnet werden. Brodén sagt dafür latitude. (Acta Univ. Lund. 8, S. 14.)

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots u_\nu,\ \cdots$$

so wählen, dafs sie u als Grenzpunkt haben und zugleich die Reihe

$$F(u_1),\ F(u_2),\ \cdots F(u_\nu),\ \cdots$$

eine Folge bildet und der Folge (4) gleich ist. Diese Folge stellt aber der Voraussetzung nach den Wert $F(u)$ dar, also auch die obige.

Der vorstehende Satz ist zwar von Brodén nicht direct ausgesprochen worden; doch habe ich die Beweismethode von ihm entlehnt; er benutzt sie für eine die Ableitungen stetiger Functionen betreffende Frage[1]).

5. Die vorstehende Darstellung punktweise unstetiger Functionen besitzt zunächst den praktischen Vorteil, dafs eine abzählbare Menge von Vorschriften genügt, um die Function für eine perfecte Menge, resp. ein Continuum festzulegen. Brodén hat eine Reihe von Beispielen punktweise unstetiger Functionen auf diese Weise construirt[2]). Freilich kann nicht jede für eine Menge Q punktweise unstetige Function durch Erweiterung einer für eine Menge U stetigen Function hergestellt werden, wie sich sofort ergeben wird. Wichtiger jedoch als der praktische Vorteil, den die obige Auffassung hat, ist der theoretische. Wir entnehmen ihr zunächst eine meines Erachtens naturgemäfse Analyse und Einteilung der punktweise unstetigen Functionen, und zwar auf Grund folgender Überlegungen.

Sei jetzt $F(q)$ irgend eine in Q punktweise unstetige Function und $\Phi(q)$ die Function, die durch Erweiterung aus $\Phi(u)$ entsteht, wo jetzt U die Menge aller Stetigkeitspunkte von $F(q)$ sein darf, so stimmen $F(q)$ und $\Phi(q)$ in allen Stetigkeitspunkten dem Werte nach überein. Ist q ein Unstetigkeitspunkt $\omega = k$ von $F(q)$, so ist in jeder um q gelegten Kugel H die Schwankung von $\Phi(q)$ niemals gröfser als diejenige von $F(q)$. Da nämlich jeder Wert von Φ eine Folge solcher Werte ist, die $\Phi(q)$ an den Stetigkeitsstellen u hat, so ist die obere und untere Grenze aller Werte von Φ in H identisch mit der unteren und oberen Grenze aller Werte, die Φ an den Stetigkeitsstellen innerhalb H besitzt. Diese Werte bilden aber nur einen Teil der Werte von $F(q)$ in H. Es ist daher, falls q für $\Phi(q)$ ein Punkt $\omega = k_\varphi$ ist, stets $k_\varphi \leq k$. Ist insbesondere $k_\varphi = 0$, so dafs q Stetigkeitspunkt von $\Phi(q)$ ist, so wird man zweckmäfsig die Unstetigkeit als unwesentlich oder äufserlich bezeichnen. Ist dagegen $k_\varphi > 0$, so ist die Unstetigkeit von $F(q)$ als eine wesentliche oder notwendige zu betrachten, sie soll aber wieder teilweise äufserlich heifsen, falls $k_\varphi < k$ ist[3]).

1) Journ. f. Math. 118, S. 6.

2) Acta Univ. Lund. 8, S. 17 ff.

3) Study nennt die Gröfse $k - k_\varphi$ den äufseren Sprung an der Stelle q, wenn q eine eigentliche Sprungstelle einer Function einer Variablen ist. Math. Ann. 47, S. 301.

Wir definiren nun eine Function $\Psi(q)$ so, dafs an jeder Stelle q

$$\Psi(q) = \pm (k - k_\varphi)$$

sein soll; es ist dann $\Psi(q)$ erstens an allen Stetigkeitsstellen von $F(q)$ Null, sowie an denjenigen Unstetigkeitsstellen, in denen $k = k_\varphi$ ist, und alle diese Stellen sind Stetigkeitsstellen von $\Psi(q)$. Ist dagegen $k_\varphi < k$, ist also die Unstetigkeit in q ganz oder teilweise äufserlich, so ist $\Psi(q)$ von Null verschieden, und es ist q eine Unstetigkeitsstelle vom Grade $k_\psi = k - k_\varphi$ für $\Psi(q)$; man kann überdies das Vorzeichen so wählen, dafs die Function

$$F_1(q) = F(q) - \Psi(q)$$

keinerlei äufserliche Unstetigkeiten mehr enthält, also jeder Unstetigkeitspunkt von $F_1(q)$ wesentlich ist, und sein Grad mit demjenigen von $\Phi(q)$ übereinstimmt. Eine Function $\Psi(q)$ dieser Art ist gelegentlich von Neumann als eine im allgemeinen verschwindende bezeichnet worden; ich möchte sie aber als punktweise unstetige Nullfunction oder kurz als Nullfunction bezeichnen, da wir es hier immer mit punktweise unstetigen Functionen zu thun haben. Alsdann folgt:

VII. Eine beliebige punktweise unstetige Function $F(q)$ kann durch Subtraction einer geeigneten Nullfunction in eine solche Function übergeführt werden, deren Unstetigkeitsgrad an jeder Stelle mit demjenigen der zugehörigen Function $\Phi(q)$ übereinstimmt.

Es empfiehlt sich nun vielfach, die Function $F_1(q)$ geradezu mit $\Phi(q)$ zu identificiren, indem man der Function $\Phi(q)$ an den Unstetigkeitsstellen denjenigen Wert beilegt, den $F_1(q)$ besitzt, und der immer demjenigen Unstetigkeitsintervall angehört, das die zulässigen Werte von $\Phi(q)$ enthält[1]. Dasselbe erreicht man aber auch umgekehrt dadurch, dafs man die bisher festgehaltene Eindeutigkeit von $F(q)$ resp. $F_1(q)$ fallen läfst und auch $F_1(q)$ an einer Unstetigkeitsstelle irgend einen Wert beilegt, den $\Phi(q)$ annehmen kann. Alsdann hat man in jedem Fall:

$$F(q) = \Phi(q) + \Psi(q),$$

und diese Gleichung bedeutet eine Zerlegung von $F(q)$ in zwei Functionen, von denen die eine als die Function der wesentlichen oder notwendigen Unstetigkeiten bezeichnet werden darf, d. h. derjenigen, die durch die Stetigkeitspunkte bedingt werden, während die andere eine Nullfunction ist und die Function der unwesentlichen oder äufserlichen Unstetigkeiten darstellt. Ich werde die Function $\Phi(q)$ auch als die zu $F(q)$ gehörige Function

1) Vgl. die Anm. 1 auf S. 132.

geringster Unstetigkeit oder als möglichst stetige Function bezeichnen.

6. Die hier zu Grunde gelegte Auffassung, die Reinigung der Function $F(q)$ von der ihr etwa anhaftenden Nullfunction und die Einführung der teilweise mehrwertigen oder unendlich vielwertigen Function $\Phi(q)$ ist sowohl theoretisch, wie auch für die späteren Anwendungen von Vorteil und ist, wenn auch nicht generell, so doch für einzelne Zwecke schon gelegentlich geschehen[1]). Ihr Nutzen wird überall da in die Erscheinung treten, wo der Wert, den $F(q)$ an einer Unstetigkeitsstelle besitzt, mehr oder weniger belanglos ist. Übrigens findet sich der Übergang von $F(q)$ zu $\Phi(q)$ im Keime auch schon bei Pasch[2]), und zwar in der Einführung des Begriffs der Schwingung an Stelle der Schwankung der Function. Die Schwingung abstrahirt nämlich von dem Functionswert in dem Punkt, auf den sie sich bezieht, was, wenn es für die Gesamtfunction ausgeführt wird, der Einführung von $\Phi(q)$ im wesentlichen äquivalent ist.

Da die Structur der Functionen $\Psi(q)$ eine einfache und durchsichtige ist[3]), so ist durch das vorstehende die weitere Analyse der punktweise unstetigen Functionen auf diejenige der Functionen $\Phi(q)$ zurückgeführt. Diese Analyse hat naturgemäfs daran anzuknüpfen, welches die Menge der Werte von $\Phi(q)$ an einer Unstetigkeitsstelle ist, und welcher Art die einzelnen Mengen K_ν resp. die Gesamtmenge $\{K_\nu\}$ sind. Was insbesondere die Menge der Werte von $\Phi(q)$ an einer Unstetigkeitsstelle q betrifft, so wird man wiederum unterscheiden müssen, ob sie endlich oder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ ist. Für Functionen einer Variablen giebt es sowohl links als rechts entweder nur je einen Wert, oder ihre Menge hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und erfüllt ein ganzes Intervall, wie man leicht zeigen kann. Im Gegensatz zu dem Satz V bietet also eine Function $\Phi(x)$ durchaus einfache Eigenschaften dar; dieser Satz haftet nur an der ihr etwa beigemengten Nullfunction. Für Functionen $\Phi(q)$ mehrerer Variablen trifft dies jedoch nicht mehr zu; bei ihnen dürften alle in diesem Satz vorgesehenen Möglichkeiten wirklich auftreten können.

Da die zu einer Nullfunction $\Psi(q)$ gehörige möglichst stetige Function überall Null ist, so folgt schliefslich, dafs nur solche Functionen auf dem von Brodén eingeschlagenen Wege erhältlich sind, die von Nullfunctionen frei sind. Andererseits ist aber auch jede solche Function so erzeugbar, wie unmittelbar klar ist. Beispiele

1) So z. B. in den neueren Arbeiten über die Bogenlänge; vgl. Scheeffer, Acta Math. 5, S. 57 ff., sowie Study, Math. Ann. 47, S. 314. Vgl. auch den Teil dieses Berichts, der vom Integralbegriff handelt.

2) Math. Ann. 30, S. 139. Vgl. auch S. 139 dieses Berichts.

3) Vgl. über sie S. 137 ff. dieses Berichts.

aller dieser Kategorien sind a. a. O. zu finden[1]). Dabei ist nicht zu vergessen, dafs hier von dem Functionswert an der Unstetigkeitsstelle abgesehen wird. Dafs er ebenfalls ein Recht hat, in Rücksicht genommen zu werden, ist klar; hierauf kommen wir weiter unten (10) zurück.

7. Bei den Functionen einer Variablen x sind am häufigsten solche Fälle bekannt geworden, bei denen jede Menge K_ν endlich ist, während $\{K_\nu\}$ überall dicht ist; an jeder Unstetigkeitsstelle ist $\Phi(q)$ zweiwertig, resp. es existirt ein rechter und linker Grenzwert. Ein klassisches Beispiel hierzu bietet die von Riemann construirte Function

$$F(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots,$$

die an allen irrationalen Punkten stetig, an den rationalen dagegen unstetig ist und an jeder Unstetigkeitsstelle einen eigentlichen Sprung besitzt[2]).

In diese Kategorie gehören auch die meisten anderen punktweise unstetigen Functionen, die man durch analytische Ausdrücke zu bilden vermocht hat, insbesondere diejenigen, die durch das Princip der Verdichtung der Singularitäten definirbar sind. Solche Functionen sind von den verschiedensten Seiten in mannigfacher Weise construirt resp. aufgefunden worden[3]). Zu ihnen gehören auch diejenigen punktweise unstetigen Functionen, denen man in neuerer Zeit nach dem Vorgang von Scheeffer und Jordan eine Bogenlänge beilegt[4]).

Man kann es sogar erreichen, dafs die Function monoton ist. Ein einfaches und zugleich typisches Beispiel dieser Art bildet die von Harnack angegebene Abbildung des Continuums auf eine nirgends dichte Menge, die durch Beziehung der Mengen $R = \{r\}$ und $D = \{\delta\}$ bewirkt werden kann[5]) (S. 64 u. 78). Ebenso führt die von Cantor angegebene Abbildung der Menge der rationalen Zahlen $R = \{r\}$ auf sich selbst, bei der die Ordnung erhalten bleibt, im allgemeinen auf punktweise unstetige Functionen dieser Art[6]).

---

1) Brodén hat sich auch mit dem Fall beschäftigt, dafs die für eine in sich dichte Menge U definirte Function in U selbst punktweise unstetig ist, und hat auch auf sie den Erweiterungsprocefs ausgedehnt; doch führt dies nicht zu neuen Auffassungen oder Resultaten, die zu erwähnen wären.

2) Gesammelte math. Werke, S. 242.

3) Für die Literatur vgl. z. B. Encykl. d. math. Wiss. II, 1, S. 41.

4) Vgl. hierüber den vierten Abschnitt.

5) Um die eindeutige Abbildung Harnack's zu erhalten, hat man von jedem δ nur einen Endpunkt beizubehalten. Peano hat eine Function dieser Art durch die Vorschrift bestimmt, dafs $x = 0, a_1 a_2 \cdots$ und $y = 0, 0a_1 0a_2 \cdots$ entsprechende Werte seien. Riv. di mat. 2, S. 42.

6) Man denke sich die Menge R einerseits der Gröfse nach geordnet, andererseits aber auf irgend zwei Arten in eine abzählbare Menge verwandelt, also

$$R = (r_1, r_2, r_3, \cdots) \quad \text{und} \quad M = (m_1, m_2, m_3, \cdots).$$

Ein hierhergehöriges Beispiel bietet auch die Peano'sche resp. die Hilbert'sche Abbildung, wenn man die Abscissen x der Punkte der Einheitsstrecke als Functionen der Quadratpunkte p auffafst. Für jeden Punkt von P_g ist die abbildende Function eindeutig und stetig; zu jedem Punkt von P gehören dagegen mehrere Werte von x. Denkt man sich in jedem Quadratpunkt p den zugehörigen Wert von x auf dem Lot über der Quadratebene abgetragen, so hat man ein flächenhaftes Bild der Abbildungsfunction. Zieht man nun innerhalb des Quadrats eine beliebige Curve, insbesondere eine Gerade, so wird dadurch ein cylindrischer resp. ein ebener Schnitt definirt, der in jedem Punkt von P einen eigentlichen Sprung besitzt und eine Function $\Phi(q)$ derselben Gattung darstellt wie die oben betrachteten[1]).

Functionen, für die jedes K_ν eine unendliche Menge darstellt, sind in neuerer Zeit ebenfalls mehrfach angegeben worden. Setzt man noch

$$K_{\nu+1} = K_\nu + G_\nu,$$

so kann man sogar erreichen, dafs jedes G_ν unendlich ist[2]), ja sogar, dafs jedes G_ν die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Beispiele der letzten Art hat insbesondere Brodén durch Aufstellung geeigneter Vorschriften construirt, und zwar mittelst der oben S. 106 erwähnten Mengen K_ν, die überdies die Eigenschaft haben, dafs die Gesamtmenge $\{K_\nu\}$, resp. $\{G_\nu\}$ die Einheitsstrecke überall dicht erfüllt. Die von Brodén mit diesen Mengen construirten Functionen sind übrigens sämtlich Nullfunctionen[3]). Ähnliche Functionen hat auch der Verfasser construirt, und dies sogar so, dafs die Gesamtheit aller Mengen G ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Zu jedem Wert $0 < \xi \leqq 1$ giebt es nämlich eine Menge G_ξ der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, so dafs in ihr $\omega = \xi$ ist, und dies kann sowohl so bewirkt werden, dafs die Gesamtmenge $\{G_\xi\}$

Alsdann ordne man dem r_1 das Element m_1 zu, ferner dem r_2 das erste Element m_i, das zu m_1 dieselbe Rangbeziehung hat wie r_2 zu r_1, ferner dem r_3 das erste Element $m_\varkappa$, das zu m_i und m_1 die gleiche Rangbeziehung hat wie r_3 zu r_2 und r_1 u. s. w. Man beweist dann noch leicht, dafs auch jedes Element m bei der Abbildung verwandt wird (Math. Ann. 46, S. 504). Man kann übrigens durch diese Abbildung auch zu stetigen Functionen gelangen. Diese Functionen sind also für alle rationalen Werte selbst rational. Vgl. für diesen Punkt auch S. 121 dieses Berichts.

1) Es steht dies nicht damit in Widerspruch, dafs manchen Punkten von P vier Werte x zugehören. In diesen Punkten von P stofsen für jede fortgesetzte Quadratteilung je vier Teilquadrate zusammen, und die bezügliche Gerade passirt immer nur zwei dieser Quadrate. Zwei der vier Functionswerte stellen also eine in dem oben genannten Sinn (S. 133) teilweise äufserliche Unstetigkeit dar. Nur wenn die Gerade eine der Teilungslinien selbst ist, tritt davon eine Ausnahme ein; dann entsprechen jedem ihrer Punkte zwei oder vier Werte x, und der bezügliche Schnitt besteht aus zwei verschiedenen Curven.

2) Vgl. z. B. Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 78.

3) Vgl. auch Cap. 7 dieses Abschnitts.

überall dicht, wie auch nirgends dicht ist[1]). Auch diese Functionen sind Nullfunctionen.

Functionen dieser Art, die keine Nullfunctionen sind, scheinen bisher nicht aufgestellt worden zu sein; es ist aber leicht ersichtlich, dafs es auch Functionen geben kann, für die die Menge K unendlich, oder gar $\mathfrak{k} = \mathfrak{c}$ ist, und für die $\Phi(q)$ nicht Null oder überhaupt eine stetige Function ist. Offenbar ist dies auch so möglich, dafs jedes $\mathfrak{k}_\nu = \mathfrak{c}$ ist, und die Gesamtmenge $\{K_\nu\}$ überall dicht liegt; um eine solche Function zu erhalten, hat man nur zu einer der eben genannten Nullfunctionen eine solche Function zu addiren, deren zugehörige Function $\Phi(q)$ an allen Unstetigkeitsstellen zweiwertig ist, und für die $\{K_\nu\}$ überall dicht ist. Um hier zu weitergehenden Einteilungen zu gelangen, dürfte es sich daher empfehlen, auch für die Functionen $\Phi(q)$ eine weitere Reduction zu versuchen, indem man von einer beliebigen Function dieser Art erst eine solche Function $\Phi(q)$ abzuspalten sucht, die an allen Unstetigkeitsstellen zweiwertig ist. Die Restfunction würde dann eine Function sein, der an allen Unstetigkeitsstellen eine continuirliche Wertmenge entspricht. Auch diese Functionen sind jedenfalls noch so möglich, dafs die Menge $\{K_\nu\}$ überall dicht liegt, jedes G_ν die Mächtigkeit $\mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{c}$ besitzt, und die K_ν eine abzählbare Menge bilden[2]).

8. Für Functionen $F(x)$ einer reellen Variablen giebt es eine Reihe von Sätzen, die gestatten, aus dem Verhalten der Function an den einzelnen Punkten auf gewisse Eigenschaften der Mengen K zu schliefsen. Zuvor erinnere ich an einige besondere Begriffe, die man für Functionen einer reellen Variablen eingeführt hat; in der Bezeichnung schliefse ich mich an Pasch an[3]). Wird bei Ermittelung der einem Intervall $a \cdots b$ entsprechenden Schwankung

1) Nachr. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1899, S. 171.

2) Ein einfaches Beispiel dieser Art ist das folgende. Man gehe von einer Menge $D = \{\delta\}$ aus, die eine perfecte Menge T bestimmt. Für jedes Intervall δ construire man eine Function $k \sin \frac{\delta}{(x - \xi_l)}$, so dafs ihr Unstetigkeitspunkt dem Intervallendpunkt ξ_l von δ entspricht, und der Function in den Punkten von T ein beliebiger Wert u beigelegt wird, so dafs $|u| < k$ ist. Die so bestimmte Function sei $f(x)$. Nun setze man in jedes dieser Intervalle δ wieder je eine Intervallmenge $D' = \{\delta'\}$ und in jedes Intervall δ' eine Function $k' \sin \frac{\delta'}{x - \xi'_l}$, so dafs ihre Werte u' in T' sämtlich die Bedingung $|u'| < k'$ erfüllen, und nenne die so bestimmte Function $f_1(x)$. So kann man fortfahren. Wird alsdann $\Sigma k^{(\nu)}$ als absolut convergent angenommen, so stellt $F(x) = \Sigma f_\nu(x)$ eine Reihe dar, die für jeden allen $f_\nu(x)$ gemeinsamen Stetigkeitspunkt selbst stetig ist, und die im übrigen die verlangte Eigenschaft besitzt.

3) Math. Ann. 30, S. 139.

von dem Wert der Function im Punkte x abgesehen, so geht die Schwankung in die dem Intervall entsprechende Schwingung[1]) über; endlich ergiebt sich die innere Schwankung oder Schwingung, falls man dem Intervall $a \cdots b$ die Endpunkte nicht zurechnet. Alle diese Gröfsen können überdies auch nur einseitig in Betracht gezogen werden[2]). Von ihnen gilt der Satz:

VIII. Sind im Intervall $a \cdots b$ alle einseitigen Schwingungen $< k$, so ist die Menge K der Punkte $\omega \geqq k$ endlich; man kann daher das Intervall in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegen, in deren jedem die innere Schwankung $< k$ ist[3]).

Die Endlichkeit der Menge K ergiebt sich unmittelbar daraus, dafs ohne dies ein Unstetigkeitspunkt zweiter Art $\omega \geqq k$ vorhanden wäre, und es könnten in ihm nicht beide einseitigen Schwingungen $< k$ sein. Es zerfällt also $a \cdots b$ bereits in eine endliche Anzahl von Intervallen, die keinen Punkt $\omega \geqq k$ im Innern enthalten. Hieraus kann der Satz nach dem Heine-Borel'schen Theorem direct geschlossen werden.

Ich erwähne ferner die folgenden beiden Sätze, die auf Dini zurückgehen:

IX. Eine Function ist punktweise unstetig, falls sie an einer überall dichten Menge einen einseitigen Grenzwert zuläfst[4]).

X. Wenn im Intervall $a \cdots b$ alle hinteren oder vorderen Schwingungen $< k$ sind, so ist die Menge K unausgedehnt[5]).

Der erste Satz folgt unmittelbar aus der Bemerkung, dafs unter der für ihn gemachten Voraussetzung keine Menge K überall dicht sein kann. Für den zweiten Satz gehen wir auf die Formel

$$K = R + S = R + K^{\Omega}$$

zurück. Wäre nun S von Null verschieden, so würde, da S perfect ist, in jedem Punkt von K_g sowohl die linke wie die rechte Schwingung $\geqq k$ sein. Daher ist $S = 0$ und K abzählbar, also auch unausgedehnt.

9. Über Functionen von zwei und mehr Variablen liegen bisher nur wenige Einzeluntersuchungen vor[6]). Man weifs seit längerer Zeit

1) Vgl. auch oben S. 135.

2) Hierüber haben besonders die italienischen Mathematiker gearbeitet, wie Ascoli, Peano und andere.

3) Vgl. Pasch, Math. Ann. 30, S. 140.

4) Vgl. Dini, Grundlagen § 151.

5) In dieser Form stammt der Satz von Pasch, a. a. O., S. 141; vgl. auch Dini, Grundlagen, § 187, 4.

6) Die meisten dieser Untersuchungen beziehen sich überdies auf das Verhalten an einem einzelnen Punkt. Ich nenne insbesondere Ascoli,

durch Beispiele, dafs die ausnahmslose Stetigkeit einer Function $F(x, y)$ nach x resp. nach y einzeln die ausnahmslose Stetigkeit für x und y nicht nach sich zieht. Erst R. Baire hat es jedoch in einer ganz kürzlich erschienenen Arbeit unternommen, die allgemeine Gesetzmäfsigkeit zu prüfen, gemäfs der die Stetigkeit für beide Variablen von der Stetigkeit für jede einzelne Variable abhängt. Man kann sich leicht Beispiele bilden, die zeigen, dafs die Function in x und y total unstetig sein kann, trotzdem sie in einer überall dichten Punktmenge für x resp. y einzeln stetig ist[1]); ja sie kann es auch dann noch sein, falls die Stetigkeit nach x resp. nach y für je eine überall dichte Curvenschar vorhanden ist. Dagegen geht aus den Untersuchungen Baire's hervor, dafs die Function in einem Gebiet H nicht mehr total unstetig sein kann, wenn sie in jedem Punkt von H stetig in x und y allein ist. Sein Satz verlangt sogar nur, dafs in allen Punkten Stetigkeit nach der einen Variablen, und in den Punkten einer überall dichten Curvenschar nach der andern vorhanden sei. Für den Beweis hat sich Baire auf den einfacheren Fall beschränkt, dafs die Function in allen Punkten stetig nach y ist, und in einer überall dichten Schar von Parallelen zur x-Axe stetig nach x, doch ist dies keine wesentliche Specialisirung.

Um zu zeigen, wie Baire diese Untersuchung durchgeführt hat, erwähne ich zunächst eine von ihm herrührende Erweiterung der Stetigkeitsbegriffe. Ist $F(x, y, \cdots)$ eine Function beliebig vieler Variablen, die für eine Menge $P = \{p\}$ definirt ist, und H_ν die um p mit dem Radius ϱ_ν gelegte Kugel, so operirt er nicht unmittelbar mit der Schwankung σ_ν für die Kugel H_ν, sondern mit der oberen und unteren Grenze aller Functionswerte, die $F(p)$ für die Kugel H_ν resp. für die in ihr enthaltenen Punkte von P besitzt. Ist F_o die obere Grenze aller dieser Werte von $F(p)$, und F_u die untere Grenze, so convergiren F_o und F_u mit abnehmendem ϱ_ν gegen zwei Gröfsen $\varphi(p)$ und $\psi(p)$, die man als obere resp. untere Wertgrenze der Function im Punkt p bezeichnen kann. Ist ω wieder der Unstetigkeitsgrad in p, so ist

$$\omega = \varphi(p) - \psi(p),$$

während zugleich

Ann. di mat. (2) Bd. 19 und 20, sowie Arzelà, Rend. dell' Acc. di Bologna 1883, S. 3. Vgl. auch Thomae, Elementare Theorie, S. 39.

1) Man ziehe z. B. durch alle rationalen Punkte Parallelen zu den Axen und bestimme auf jeder von ihnen die Function so, dafs sie für $x = p/q$ und für $y = p_1/q_1$ den Wert $f(x, y) = 1/q q_1$ hat, in den übrigen Punkten dieser Parallelen den Wert Null, und in allen übrigen Punkten den Wert 1. Das obige Resultat entspricht dem Umstand, dafs jede Menge K^x und jede Menge K^y abgeschlossen sein kann, ohne dafs die ebene Menge K abgeschlossen ist. Vgl. S. 97. Auch die dort gegebenen Beispiele sind hier verwendbar.

$$\varphi(p) \geqq F(p) \geqq \psi(p)$$

ist. Ist nun $\varphi(p) = F(p)$, so nennt Baire die Function $F(p)$ an der Stelle p oberhalb stetig; ist $F(p) = \psi(p)$, so heifst sie unterhalb stetig[1]). Auch diese Begriffe sind davon unabhängig, ob der Kugel H_ν die Punkte der Oberfläche hinzugerechnet werden oder nicht. Eine oberhalb resp. unterhalb stetige Function nennt Baire allgemein halbstetig[2]). Es besteht nun der folgende Satz:

Ist $f(p)$ eine im Bereich H oberhalb stetige Function, für die in jedem Punkte die untere Wertgrenze Null ist, so nimmt die Function in einer in H überall dichten Punktmenge den Wert Null an[3]) und ist also eine Nullfunction.

Der Beweis läfst sich folgendermafsen führen: Sei $\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ eine Reihe gegen Null convergirender Zahlen. Ist H_0 ein beliebiger Teilbereich von H, so giebt es in ihm sicher Punkte p, so dafs $f(p) < \varepsilon$ ist, und wegen der oberen Stetigkeit folgt, dafs es eine gewisse Umgebung H_1 für p giebt, so dafs dort überall

$$f < f(p) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

ist. Analog findet man innerhalb H_1 einen Bereich H_2, in dem überall $f < 2\varepsilon_1$ ist, und man gelangt so zu einer Folge einander einschliefsender Bereiche

$$H_0, \; H_1, \; H_2, \; \cdots \; H_\nu, \; \cdots,$$

die mindestens einen Punkt p_ω bestimmen, so dafs $f(p_\omega) < \varepsilon_\nu$ ist für jedes ν, womit der Satz bewiesen ist. Aus diesem Satz schliefst man nun durch Umkehrung den folgenden:

Ist eine oberhalb stetige Function $f(p)$ in einem Gebiet H überall gröfser als Null, so bilden die Punkte, in denen $f(p)$ die untere Wertgrenze Null hat, notwendig eine nirgends dichte Menge. Die Function ist also keine Nullfunction.

Nunmehr geht der Beweis des bezüglichen Satzes folgendermafsen vor sich. Da die Function $F(x, y)$ überall nach y stetig sein soll, so wird sie, falls man zunächst dem x einen constanten Wert beilegt, in eine für alle Werte y stetige Function $\Phi(y)$ übergehen. Wird alsdann σ beliebig angenommen, so gehört dazu für jedes y ein bestimmtes gröfstes Intervall $2\delta = \delta_\sigma$, innerhalb dessen

1) Die einfachste oberhalb stetige Function ist die zu einer Function $F(p)$ gehörige Function $\omega(p)$ selbst. Diese Function hat bereits Volterra als Function der Sprünge eingeführt (Giorn. di mat. 19, S. 82), wenigstens für Functionen einer Variablen. Die obigen Begriffe decken sich zum grofsen Teil, wenn auch nicht ganz, mit der Reduction von $F(p)$ auf $\Phi(p)$.

2) Ann. di. mat. (3) 3, S. 4 ff.

3) Baire giebt a. a. O. (S. 12) Beispiele, die zeigen, dafs der Satz nicht gilt, wenn nur eine der beiden Bedingungen erfüllt ist.

die Schwankung von $\Phi(y)$ höchstens gleich σ ist. Fafst man diese Gröfse δ_σ als Function des Punktes $p = (x, y)$ auf, so zeigt Baire zunächst durch einfache Überlegungen, dafs sie eine oberhalb stetige Function ist; andererseits aber ist δ_σ in jedem Punkt p gröfser als Null, und daraus folgt auf Grund des letzten Satzes, dafs die Punkte, in denen die untere Wertgrenze von δ_σ Null ist, eine nirgends dichte Menge bilden. Diese Menge ist überdies, wie leicht ersichtlich ist, abgeschlossen; wir bezeichnen sie durch G_σ resp. durch G. Man beweist nun weiter[1]), dafs es um jeden nicht zu G gehörigen Punkt m einen endlichen Bereich giebt, in dem die Schwankung der Function $F(x, y)$ selbst kleiner als 2σ ist. Sind dann wieder $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \cdots > \sigma_\nu > \cdots$ beliebige gegen Null convergirende Gröfsen, so haben die zugehörigen Mengen

$$G_1, \; G_2, \; G_3, \; \cdots \; G_\nu, \; \cdots$$

wieder die Eigenschaft, dafs jede die vorhergehenden als Teilmengen enthält. Ist jetzt δ_1 ein zu G_1 gehörender punktfreier Bereich, so folgert man, wie S. 81, dafs die Bereiche $\delta_1, \delta_2, \cdots$ gegen einen Bereich δ_ω oder gegen einen Punkt convergiren, und jeder dieser Punkte ist ein Stetigkeitspunkt von $F(x, y)$. Also folgt:

XI. Ist eine Function $F(x, y)$ überall stetig nach der einen Variablen, und längs einer überall dichten Geradenschar nach der andern, so ist sie in beiden Variablen höchstens punktweise unstetig.

10. Baire hat auch die allgemeine Analyse der punktweise unstetigen Functionen einen Schritt weiter geführt[2]). Oben wurde wesentlich die allgemeine Natur der Unstetigkeitspunkte und ihre Verteilung in Betracht gezogen; aufserdem kann aber auch noch der besondere Wert, den die Function an der Unstetigkeitsstelle hat, Gegenstand der Erörterung werden. Von diesem Wert hängt es nämlich ab, ob sich die Function als Folge stetiger Functionen darstellen läfst oder nicht (Cap. 7). Dies ist der Gesichtspunkt, von dem aus Baire auf die Frage geführt wurde. Der Erfolg seiner Untersuchung beruht durchaus auf der Ausdehnung des Stetigkeitsbegriffes auf beliebige nirgends dichte Mengen.

Es sei $f(x, y, \cdots) = f(p)$ eine in einem Bereich H definirte punktweise unstetige Function und K die Menge der Unstetigkeitspunkte $\omega \geq k$. Diese Menge ist dann notwendig nirgends dicht in H. Es kann nun vorkommen, dafs die Menge K einen perfecten Bestandteil K^Ω enthält. Ist dies der Fall, so betrachten wir jetzt die Function $F(p)$ nur bezüglich der perfecten Menge K^Ω. Alsdann sind an sich wieder drei Fälle möglich; es kann $F(p)$ bezüglich K^Ω

1) a. a. O., S. 25.
2) a. a. O., S. 46 ff.

stetig, total unstetig oder punktweise unstetig sein. Ist $F(p)$ bezüglich K^Ω nicht stetig, so sei K_1 die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ bezüglich K^Ω. Falls nun K_1 überall dicht bezüglich K^Ω ist, so ist K_1 mit K^Ω identisch; alsdann ist $F(p)$ in K total unstetig, und die Betrachtung hat ein Ende. Ist dagegen die Menge K_1 nicht überall dicht bezüglich K^Ω, so zerfällt H resp. K^Ω in eine endliche oder abzählbare Menge von Teilgebieten, so dafs in jedem von ihnen K_1 entweder überall dicht oder nirgends dicht ist. Es genügt demgemäfs, für das folgende anzunehmen, K_1 sei nirgends dicht bezüglich K^Ω. Enthält nun K_1 wieder einen perfecten Bestandteil K_1^Ω, so betrachte man $F(p)$ als Function in K_1^Ω; ist K_2 die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ bezüglich K_1^Ω, so sind wieder nur die zwei Fälle zu berücksichtigen, dafs K_2 in K_1^Ω überall dicht, also mit K_1^Ω identisch ist, oder dafs K_2 nirgends dicht bezüglich K_1^Ω ist. Im letzten Fall kann K_2 wieder einen perfecten Bestandteil K_2^Ω enthalten, und man hat die Function bezüglich K_2^Ω ins Auge zu fassen. So kann man weitergehen, solange $F(p)$ Unstetigkeitspunkte bezüglich der nach und nach construirten perfecten Mengen $K^\Omega, K_1^\Omega, K_2^\Omega, \cdots$ besitzt und in Bezug auf keine von ihnen total unstetig ist. Nun ist aber die Menge K_1^Ω Teilmenge von K^Ω, ebenso ist K_2^Ω Teilmenge von K_1^Ω u. s. w., und daraus folgt, dafs sich unser Verfahren so weit fortsetzen läfst, als die Construction von Teilmengen dieser Art ausgeführt werden kann. Diese Frage ist aber oben bereits erledigt. Wir sahen[1]), dafs diese Teilung zwar bis zu transfiniten Zahlen ausdehnbar ist, dafs aber die Teilmengen nur in abzählbarer Menge auftreten können. Es giebt also eine Reihe von Mengen

$$K^\Omega,\ K_1^\Omega,\ K_2^\Omega,\ \cdots\ K_\omega^\Omega,\ \cdots\ K_\alpha^\Omega,\ \cdots\ K_\beta^\Omega,$$

die mit einer bestimmten transfiniten Zahl β notwendig ein Ende erreicht, und zwar in dem Sinne, dafs die Function in K_β^Ω entweder stetig oder total unstetig ist, oder aber so punktweise unstetig, dafs die Punkte $\omega \geqq k$ eine endliche oder abzählbare Menge bilden. Was übrigens die Mengen

$$K,\ K_1,\ K_2,\ \cdots\ K_\omega,\ \cdots\ K_\alpha,\ \cdots\ K_\beta$$

selbst anbetrifft, so kann jede von ihnen eine abgeschlossene Menge allgemeinster Art sein, und im allgemeinen enthält also K_α aufser K_α^Ω noch eine abzählbare Menge, wie wir dies früher allgemein erörtert haben (S. 78).

Verbinden wir dieses Resultat mit der oben angeführten Bemerkung, dafs H resp. K^Ω in eine endliche oder abzählbare Menge von Gebieten zerfallen, so dafs in jedem von ihnen K_1 überall dicht

1) Vgl. S. 80 dieses Berichts.

oder nirgends dicht bezüglich K^{Ω} ist, und beachten, dafs dies analog für jede Menge K_{α} der Fall sein kann, so erhalten wir schliefslich folgendes Resultat:

XII. Ist $F(p)$ eine in H punktweise unstetige Function, und ist K die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$, so zerfällt H in eine endliche oder abzählbare Menge von Teilgebieten, so dafs in jedem eine perfecte Menge existirt, die Teilmenge von K ist, und bezüglich deren die Function $F(p)$ stetig oder total unstetig ist oder nur eine endliche resp. abzählbare Menge von Unstetigkeitspunkten $\omega \geqq k$ enthält.

Drittes Capitel.

Die Ableitungen der monotonen Functionen.

Die Frage nach den Ableitungen einer reellen Function soll hier nur insoweit zur Erörterung gelangen, als sie durch die Theorie der Punktmengen gefördert worden ist[1]). Ich mufs daher naturgemäfs darauf verzichten, über den reichen Inhalt des Dini'schen Werkes über reelle Functionen einer Variablen ausführlicher berichten zu wollen. Die Analyse der inneren Eigenschaften einer Function, die erforderlich sind, damit in gewissen Punkten eine bestimmte beiderseitige oder einseitige Ableitung existirt oder fehlen kann, insbesondere die Frage, welcher Art alsdann die Ableitungswerte in den Nachbarpunkten sind, findet sich dort der Sache nach eingehend

1) Historisch bemerke ich ganz kurz das folgende: Bekanntlich gab Riemann das erste Beispiel einer stetigen Function, die nicht überall Ableitungen besitzt; während Hankel mittelst der Verdichtung der Singularitäten die erste allgemeine Methode zur Herstellung solcher Functionen erdachte. (Vgl. auch Cap. 7.) Darboux gab alsbald eine geometrische Analyse dieser Methode. Auch die Ableitung der Sätze über Reihenconvergenz, die der Hankel'schen Methode als Grundlage dienen, hat Darboux in exacter Form zuerst geliefert; er ist wohl auch derjenige, der zuerst darauf hinwies, dafs die Integrale der punktweise unstetigen Functionen ebenfalls stetige Functionen liefern, die nicht überall eine Ableitung besitzen. (Vgl. Cap. 6.) Das erste Beispiel einer nirgends differenzirbaren Function stammt bekanntlich von Weierstrafs. Auch Darboux hat bald darauf ein Beispiel dieser Art construirt; er gab auch schon früh ein Beispiel einer stetigen Function, deren Ableitung eine punktweise unstetige Function ist, und zwar eine solche, die an allen rationalen Stellen einen Sprung hat, Ann. de l'Ec. norm. (2) Bd. 4, S. 109. Eine allgemeine Methode zur Darstellung nirgends differenzirbarer Functionen gab alsbald Dini, Ann. di Mat. (2) 8, 121. Eine in jedem Intervall nicht differenzirbare Function hat frühzeitig auch H. A. Schwarz gegeben. Vgl. Ges. Abh. II, S. 269, sowie auch J. Thomae, Einleitung, S. 26. An Weierstrafs anschliefsende Beispiele gab insbesondere M. Lerch, z. B. Journ. f. Math. 103, S. 126. Vgl. endlich auch Cellérier, Bull. des Sc. math. 14, S. 152.

erörtert, wenn auch in der formalen Aussage der einzelnen Sätze die Mengenbegriffe nicht zur Anwendung kommen.

Überhaupt sind wir über das Werk Dini's kaum erheblich hinausgekommen. Die Untersuchung der Gesetze, denen die Ableitungen in den einzelnen Punkten unterworfen sind, ist deshalb subtiler und schwieriger, weil man es hier nicht mit abgeschlossenen Mengen zu thun hat; darauf beruht es auch, dafs die meisten Resultate, von denen hier zu berichten ist, von abschliefsender Tragweite nicht sind. Sätze allgemeinerer Art sind nur zwei zu erwähnen; der eine geht auf König zurück, der andere auf Brodén; beide beziehen sich auf Functionen, deren Ableitungen an einer überall dichten Menge unendlich sind. Im übrigen beziehen sich die zu erwähnenden neuerlich gefundenen Resultate auf specielle Functionen oder Functionsklassen.

Betrachtungen über gesetzmäfsige Verteilung von Besonderheiten, die die zweiten und höheren Ableitungen betreffen, liegen bislang nur wenige vor. Im wesentlichen hat sich nur Harnack näher mit ihnen beschäftigt[1]). Was von seinen Resultaten hier anzuführen wäre, ist höchstens der evidente Satz, dafs die Stellen, an denen ein zweiter oder höherer Differentialquotient bestimmten oder unbestimmten Zeichens existirt, nicht isolirt sein können und daher immer eine in sich dichte Menge bilden.

Unter den stetigen Functionen einer reellen Variablen pflegt man drei Hauptklassen zu unterscheiden: die Function kann im Intervalle $a \cdots b$ monoton[2]) und nirgends constant sein, sie kann in ihm unendlich oft oscilliren, also unendlich viele Maxima und Minima besitzen, sie kann schliefslich unendlich viele Invariabilitätszüge oder Constanzintervalle aufweisen. Es ist weiter klar, dafs wenn eine Function $f(x)$ keiner dieser Hauptklassen angehört, das Intervall $a \cdots b$ so in eine höchstens abzählbare Menge von Teilintervallen zerfällt, dafs die Function in jedem Teilintervall einer der drei genannten Kategorien entspricht. Freilich ist diese Einteilung nur eine formale; sie ruht nicht auf inneren charakteristischen Unterschieden. Man verdankt Dini die Einsicht, dafs eine monotone nirgends constante Function durch Subtraction einer Linearfunction $\mu x + \nu$ in eine unendlich oft oscillirende Function übergehen kann, und das gleiche gilt von jeder Function mit unendlich vielen Constanzintervallen. Demzufolge ist es schliefslich nur die zweite

1) Math. Ann. 23, S. 264. Bezüglich der Arbeiten Harnack's in Math. Ann. 19 u. 23 ist zu bemerken, dafs sie nicht in allen Teilen correct sind, und dafs Harnack in Math. Ann. 24 einen Teil von ihnen selbst richtiggestellt hat. In diesen Arbeiten finden sich übrigens auch analoge Betrachtungen über den mittleren Differentialquotienten.

2) Monoton bedeutet, wie üblich, niemals wachsend oder niemals abnehmend. Vgl. auch S. 121 dieses Berichts.

unserer Functionsklassen, die für das durchaus unregelmäfsige Verhalten der Ableitungen eine ursächliche Bedeutung hat.

Praktisch ist es natürlich zweckmäfsig, die drei Functionsklassen gesondert zu behandeln, zumal für ihre Structur durchaus verschiedene Bildungsgesetze und Formeln mafsgebend sind. Ich beschränke mich zunächst auf die erste Klasse, die ich kurz als monoton bezeichnen will. Die allgemeine Aufgabe, die man sich hier gestellt hat, geht dahin, die innere Structur der Function so zu beeinflussen, dafs an Mengen bestimmter Art, sei es abzählbaren, sei es nicht abzählbaren, ein vorgegebenes Verhalten der Function bezüglich ihrer Ableitungen eintritt. Dabei wird die Function immer zunächst nur für eine überall dichte Menge U definirt, und dann in der oben angegebenen Weise auf die Gesamtmenge erweitert. Mit Aufgaben dieser Art hat sich insbesondere T. Brodén eingehend beschäftigt. Der Erfolg seiner Methode besteht besonders darin, dafs die Punkte von U_g eine beinahe erstaunliche Fülle von Klassen der merkwürdigsten Typen liefern, und dafs sich unter ihnen Punktklassen beliebig unregelmäfsigen Verhaltens im allgemeinen immer finden lassen.

1. Ich setze zunächst die auf du Bois-Reymond zurückgehende Definition des allgemeineren Ableitungsbegriffes hierher, die auf beliebige Functionen Bezug nimmt, im folgenden jedoch nur für stetige Functionen in Betracht gezogen wird. Ist $y = f(x)$ eine im Intervall $a \cdots b$ stetige Function, x ein beliebiger, aber fester Punkt dieses Intervalls und δ ein in x beginnendes Teilintervall, so hat der Differenzenquotient

$$q(x_1, x) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

für alle Werte x_1 des Intervalls δ eine obere Grenze g resp. eine untere Grenze k. Sind jetzt

$$\delta_r,\ \delta_r',\ \delta_r'',\ \cdots;\ \delta_l,\ \delta_l',\ \delta_l'',\ \cdots$$

Intervalle, die von rechts resp. links gegen x convergiren, und sind

$$g_r,\ g_r',\ g_r'',\ \cdots,\ \text{resp. } g_l,\ g_l',\ g_l'',\ \cdots$$

die zugehörigen Werte von g, so convergiren diese Werte gegen je einen (unteren) Grenzwert γ_r und γ_l, und ebenso convergiren die zugehörigen Werte von k, nämlich

$$k_r,\ k_r',\ k_r'',\ \cdots,\ \text{resp. } k_l,\ k_l',\ k_l'',\ \cdots$$

gegen je einen (oberen) Grenzwert $\varkappa_r$ und $\varkappa_l$. Diese vier Gröfsen, die für jede Function $f(x)$ existiren, sind von du Bois[1]) unter dem

1) Antrittsprogramm Freiburg, S. 3. Der Begriff der Unbestimmtheitsgrenzen ist freilich allgemeiner.

Namen der Unbestimmtheitsgrenzen eingeführt worden. Später haben sie von Scheeffer[1]) den zweckmäfsigeren Namen der vier Ableitungen erhalten, und zwar heifsen γ_l und $\varkappa_l$ hintere obere resp. untere Ableitung, dagegen γ_r und $\varkappa_r$ vordere obere resp. untere Ableitung. Im Anschlufs an Scheeffer bezeichne ich die beiden vorderen Ableitungen durch $D^+f(x)$ resp. $D_+f(x)$, ebenso die beiden hinteren Ableitungen durch $D^-f(x)$ resp. $D_-f(x)$. Ist $\gamma_l = \varkappa_l$, so existirt eine linke Ableitung $f'_-(x)$; ist $\gamma_r = \varkappa_r$, eine rechte Ableitung $f'_+(x)$; sind endlich $\gamma_l = \varkappa_l = \gamma_r = \varkappa_r$, so hat $f(x)$ im Punkte x eine einzige bestimmte Ableitung $f'(x)$. Ich werde im folgenden eine in $a \cdots b$ überall dichte Menge wie früher durch $X = \{x_N\}$ bezeichnen (S. 79) und $C = X + X_g$ setzen, so dafs X_g die Complementärmenge von X bezüglich $a \cdots b$ ist.

Die vorstehenden Definitionen setzen nicht voraus, dafs der Bereich der Variablen x ein continuirlicher ist. Aus den oben S. 116 angegebenen Gründen lassen auch sie sich auf jede unendliche Menge P ausdehnen, insbesondere aber wieder auf perfecte und nirgends dichte Mengen T. Für eine Function $f(x)$, die für eine solche Menge T definirt ist, giebt es dann in jedem Punkt von T_l resp. T_r nur hintere resp. vordere Ableitungen; in jedem Punkt von T_g hingegen sind alle vier Ableitungen begrifflich vorhanden Mit dem Begriff der Ableitung lassen sich auch die im folgenden abzuleitenden Sätze, bei deren Erörterung ich mich im Interesse der Darstellung wieder auf Functionen einer stetigen Variablen beschränke, auf Functionen übertragen, die für nirgends dichte Mengen definirt sind. Für einige dieser Sätze hat dies kürzlich R. Baire sehr eingehend ausgeführt[2]).

2. Man kann die Functionen $f(x)$ zunächst danach scheiden, ob ihre rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen eine stetige, punktweise unstetige oder total unstetige Function bilden. Wird von der allgemeinen Stetigkeit abgesehen, so ist der einfachste Fall der, dafs die bezügliche Ableitung von $f(x)$ eine punktweise unstetige Function darstellt. Solche Functionen werden einerseits durch die Integrale von punktweise unstetigen Functionen geliefert, wie zuerst Darboux bemerkt zu haben scheint. Man hat aber auch eine Reihe von Beispielen solcher Functionen direct construirt, insbesondere solche, bei denen die Ableitung eine überall einwertige oder zweiwertige Function in dem oben genannten Sinn darstellt[3]).

Von Resultaten allgemeinerer Art, die hierher gehören, erwähne ich folgende Sätze von Dini resp. Baire:

1) Acta math. 5, S. 52.
2) Ann. di mat. (3) 3, S. 113 ff.
3) Hierher gehört eine Reihe von Functionen, die durch Verdichtung der Singularitäten entstehen; vgl. z. B. Dini, Grundlagen, S. 157 ff. Vgl. ferner die Anm. auf S. 144 dieses Berichts.

I. Für eine stetige monotone Function, die sich nicht durch Subtraction einer Linearfunction $\mu x + \nu$ in eine unendlich oft oscillirende Function verwandeln läfst, existirt sowohl die linke, wie die rechte Ableitung und bildet eine stetige oder eine solche punktweise unstetige Function, die überall höchstens zweiwertig ist[1]).

II. Wenn die Function $f(x)$ im Intervall $a \cdots b$ überall eine bestimmte Ableitung $f'(x)$ besitzt, so ist $f'(x)$ eine höchstens punktweise unstetige Function[2]).

Es sind ferner zwei Sätze zu erwähnen, die sich auf Functionen mit total unstetigen Ableitungen beziehen und folgendermafsen lauten:

III. Wenn für die stetige Function $f(x)$ im Intervall $a \cdots b$ an einer überall dichten Menge eine unendliche Ableitung unbestimmten Zeichens existirt, so giebt es eine überall dichte Menge dieses Intervalls, so dafs die Ableitung in den Punkten, in denen sie bestimmt ist, den beliebigen Wert c hat, und in den Punkten, wo die Derivirten verschieden sind, c zwischen ihnen enthalten ist.

IV. Wenn für die stetige Function $f(x)$ an einer überall dichten Menge M eine der Derivirten positiv oder negativ unendlich grofs ist, so giebt es stets eine Menge zweiter Kategorie der gleichen Eigenschaft.

Jede Function, die den Bedingungen dieser Sätze entspricht, ist eine überall oscillirende Function. Ich verschiebe daher den Beweis des ersten Satzes, der von König stammt[3]), auf das nächste Capitel.

Um den zweiten, von Brodén gegebenen, Satz[4]) zu beweisen, denken wir uns die Function $f(x)$ wieder durch ihre Werte an einer überall dichten Menge $X = \{x_N\}$ bestimmt und nehmen insbesondere an, dafs die Punkte der Menge $X = \{x_N\}$ zugleich der Menge M angehören. Ist in x_N insbesondere die vordere Ableitung unendlich, so läfst sich ein gröfstes Intervall $x_N \cdots x' = s'$ finden, so dafs, falls g beliebig angenommen wird,

$$| f(x_N) - f(x') | = g s'$$

ist. Nimmt man also eine Reihe ins unendliche wachsender Gröfsen $g_1 < g_2 < \cdots < g_\nu < \cdots$ beliebig an, so giebt es auch ein gröfstes Intervall $x_N \cdots x'' = s''$, so dafs

$$| f(x'') - f(x_N) | = g_1 s''$$

1) Grundlagen etc., S. 291. Den Beweis findet man ebenda.

2) Ann. di mat. (3) 3, S. 108. Für den Beweis vgl. Cap. 6.

3) Monatsh. f. Math. u. Phys. 1, S. 7.

4) Acta Univ. Lund. 8, S. 31. Für ein specielles Beispiel hat Brodén diesen Satz auch in Öfvers. af Vet. Akad. Förhandl. Stockholm 1896, Nr. 8 bewiesen. Er beweist übrigens nur, dafs $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ ist.

ist, u. s. w. Zu der behaupteten Menge M zweiter Kategorie gelangen wir nun folgendermafsen: Da zu jedem Punkt x_N für gegebenes g ein bestimmtes Intervall s gehört, so bestimmt die Gesamtheit dieser Intervalle eine Borel'sche Menge[1]) G solcher Punkte, die nicht innere Punkte eines Intervalles s sind (S. 110), während jeder Punkt der Complementärmenge von G innerer Punkt mindestens eines solchen Intervalles ist. Gehören nun zu $g_1, g_2, \cdots g_\nu, \cdots$ die Mengen

$$G_1, G_2, \cdots G_\nu, \cdots,$$

so bilden sie eine Menge erster Kategorie $\{G_\nu\}$, deren Complementärmenge die Menge M ist. Jeder Punkt dieser Menge M ist nämlich innerer Punkt mindestens eines Intervalles

$$s', s'', \cdots\cdot s^{(\nu)}, \cdots\cdot,$$

und daraus folgt leicht, dafs in ihm nicht beide vorderen und beide hinteren Ableitungen endlich sein können.

3. Da jede im Intervall $a \cdots b$ stetige Function durch ihre Werte an der Menge $X = \{x^N\}$ bestimmt ist, so könnte man jeden möglichen Typus stetiger Functionen dadurch erhalten, dafs bei festgehaltener Menge X die zu den Punkten x_N zugehörigen Functionswerte auf alle zulässigen Arten vorgeschrieben werden. Natürlich wird eine so gewählte Menge X für das Studium jeder einzelnen Function oder Functionsklasse nicht in gleicher Weise geeignet sein; für die hier vorliegenden Betrachtungen ist aber die allgemeine Wahl von $X = \{x_N\}$ durchaus zweckmäfsig. Man denke sich überdies jede der beiden Variablen x und y auf einer beliebigen Geraden dargestellt, und es möge dem Intervall $a \cdots b = s$, in dem sich x bewegt, das Intervall $c \cdots d = t$ als Ort von y entsprechen, und der Menge $X = \{x_N\}$ entspreche die Menge $Y = \{y_N\}$. Diese Mengen bestimmen wir jetzt näher durch folgende Formeln. Gemäfs den früheren Bezeichnungen (S. 79) zerfalle $s = a \cdots b$ durch den Punkt x in die Intervalle $s_0 = a \cdots x$ und $s_1 = x \cdots b$ und werde gesetzt

$$s_0 = \frac{s}{2}(1 + e), \ s_1 = \frac{s}{2}(1 - e).$$

Ferner ist x_0 ein Punkt innerhalb s_0 und x_1 ein Punkt innerhalb s_1, so dafs s_0 in s_{00} und s_{01}, ebenso s_1 in s_{10} und s_{11} zerfällt, und wir setzen

$$s_{00} = \frac{s_0}{2}(1 + e_0), \ s_{01} = \frac{s_0}{2}(1 - e_0)$$

$$s_{10} = \frac{s_1}{2}(1 + e_1), \ s_{11} = \frac{s_1}{2}(1 - e_1).$$

---

1) Dieser Menge braucht zunächst kein Punkt anzugehören; mit wachsendem g müssen aber Mengen dieser Art auftreten.

Ist allgemein s_N eines der 2^ν Intervalle mit ν Indices, so ist x_N ein Punkt im Innern dieses Intervalls, der s_N in $s_{N,0}$ und $s_{N,1}$ zerlegt, und es sei

$$(1)\qquad s_{N,0} = \tfrac{1}{2} s_N(1 + e_N), \qquad s_{N,1} = \tfrac{1}{2} s_N(1 - e_N).$$

Alsdann ergiebt sich allgemein für s_N der Wert

$$(2)\qquad s_N = \frac{s}{2^\nu}(1 \pm e)(1 \pm e_i) \cdots (1 \pm e_{N-1}) = \frac{s}{2^\nu} E_N,$$

wo $N - 1$ eine Gruppe von $\nu - 1$ Indices bedeutet, die Indices $i, k, l, \cdots$ der rechten Seite mit denen übereinstimmen, die in N enthalten sind, und die Vorzeichen von den Indices gemäfs Gl. (1) so abhängen, dafs jeder Index 0 ein positives und jeder Index 1 ein negatives Zeichen bewirkt. Dabei sind überdies alle $|e_N| < 1$, die e_N selbst können aber beliebig positiv oder negativ sein.

Analog construiren wir die Menge $Y = \{y_N\}$ und die zugehörigen Intervalle t_N. Für sie mögen folgende Formeln bestehen. Es sei

$$(3)\qquad t_{N,0} = \tfrac{1}{2} t_N(1 + f_N), \qquad t_{N,1} = \tfrac{1}{2} t_N(1 - f_N),$$

wo f_N ebenfalls positiv oder negativ sein kann und $|f_N| < 1$ ist. Ferner wird

$$(4)\qquad t_N = \frac{t}{2^\nu}(1 \pm f)(1 \pm f_i) \cdots (1 \pm f_{N-1}) = \frac{t}{2^\nu} F_N,$$

wo für Indices und Vorzeichen die nämlichen Regeln gelten wie oben. Die für die e_N und f_N angegebene Wertbeschränkung ist nun noch dahin zu erweitern, dafs die Punktmengen $X = \{x_N\}$ und $Y = \{y_N\}$ überall dicht werden, was erfordert, dafs die beiden Producte

$$\frac{1}{2^\nu} E_N \text{ und } \frac{1}{2^\nu} F_N$$

für jede Indicesfolge $i, k, l, \cdots$ mit wachsendem ν gegen Null convergiren. Es können also E_N und F_N selbst mit wachsendem ν eventuell auch unendlich werden.

Falls mit wachsendem ν für jede Indicesfolge $i, k, l, \cdots$ $\lim s_N = 0$ und zugleich $\lim t_N = 0$ ist, so ist y eine für die Menge $X = \{x_N\}$ gleichmäfsig stetige Function und kann daher zu einer auf $a \cdots b$ stetigen Function erweitert werden. Dies geschieht hier besonders so, dafs für jede bestimmte Indicesfolge die Intervalle

$$(5)\qquad s_i,\ s_{ik},\ s_{ikl},\ \cdots\ s_N,\ s_{N,i},\ \cdots$$

einen Punkt x von $a \cdots b$ als den gemeinsamen Grenzpunkt ihrer Endpunkte bestimmen, und analog die entsprechenden Intervalle

$$(6)\qquad t_i,\ t_{ik},\ t_{ikl}, \cdots t_N,\ t_{N,i},\ \cdots,$$

deren Indices mit den obenstehenden übereinstimmen, den zugehörigen Punkt von $c \cdots d$ als den entsprechenden Functionswert y. Sind von einem bestimmten Index an alle folgenden Indices gleich 0 oder 1, so liefert die Folge (1) insbesondere einen Punkt von X selbst, sonst aber einen Punkt von X_g, und das gleiche gilt für die entsprechende Folge (6)[1].

Seien nun x_l und x_r resp. y_l und y_r irgend zwei Paare entsprechender Werte, so lassen sich die Intervalle $s' = x_l \cdots x_r$ und $t' = y_l \cdots y_r$ wie folgt bestimmen (Fig. 3). Wir denken uns dazu wieder die Menge $X = \{x_N\}$ in die Anordnung

Fig. 3.

$$x, \ (x_i), \ (x_{ik}), \ \cdots \ (x_N), \ \cdots$$

gesetzt, so dafs (x_N) die sämtlichen Punkte mit ν Indices darstellt. Ist dann der erste Punkt der so geordneten Menge, der in das Intervall s' fällt, ein Punkt x_N mit ν Indices, so ist zunächst klar, dafs es nur einen solchen Punkt giebt. Es giebt dann wieder einen ersten Punkt $x_{N'}$ obiger Menge mit ν' Indices, der dem Intervall $x_N \cdots x_r$ angehört, ebenso im Intervall $x_{N'} \cdots x_r$ einen ersten Punkt $x_{N''}$ mit ν'' Indices, so dafs die Punkte

$$x_N, \ x_{N'}, \ x_{N''}, \ \cdots$$

unbeschränkt gegen x_r convergiren, und ebenso erhalten wir im Intervall $x_l \cdots x_N$ eine analog definirte Punktfolge

$$x_{M'}, \ x_{M''}, \ x_{M'''}, \ \cdots,$$

die gegen x_l convergirt. Diese Folgen sind endlich oder unendlich, je nachdem x_l resp. x_r der Menge X angehört oder nicht. Nun ist nach den obigen Bezeichnungen $x_N \cdots x_{N'}$ ein Intervall $s_{N',0}$, ebenso $x_{N'} \cdots x_{N''}$ ein Intervall $s_{N'',0}$, dagegen $x_{M'} \cdots x_N$ ein Intervall $s_{M',1}$ u. s. w. Wir erhalten also, wenn noch das Intervall $x_M \cdots x_N = s_{MN}$ gesetzt wird,

$$s_{MN} = \Sigma s_{N',0} + \Sigma s_{M',1},$$

wo die Summen sich über alle Gruppen $N', N'', \cdots$ resp. $M', M'', \cdots$ erstrecken. Die nämliche Formel gilt aber nun für das entsprechende Intervall t'; es wird

$$t_{MN} = \Sigma t_{N',0} + \Sigma t_{M',1}.$$

Diese Formeln gelten ganz allgemein, aus ihnen folgt noch

$$m_{MN} = \frac{t_{MN}}{s_{MN}} = \frac{\Sigma t_{N',0} + \Sigma t_{M',1}}{\Sigma s_{N',0} + \Sigma s_{M',1}},$$

---

1) Fafst man das von den Punkten (x, y) bestimmte analytische Curvenbild ins Auge, so bestimmen die Punkte (x_N, y_N) für gegebenes ν je einen Polygonzug, der mit wachsendem ν in die Curve übergeht.

und dieser Quotient ist es, dessen Grenzwert oder Grenzwerte für die Bestimmung der Ableitungen in Frage kommen. Bei der grofsen Unbestimmtheit dieses Quotienten dürfte es kaum möglich sein, von ihm aus zu Resultaten allgemeinerer Natur zu gelangen, und demgemäfs hat sich auch Brodén darauf beschränkt, das Verhalten der Functionen bei gewissen einfachen Bildungsgesetzen zu discutiren[1]). Er nimmt an, dafs alle f_N, die die nämliche Zahl von Indices enthalten, einander gleich sind, und ebenso alle e_N, und dafs, falls noch $f_N = f_\nu$ und $e_N = e_\nu$ gesetzt wird, $f_\nu - e_\nu > 0$ ist. Diese letzte Bedingung hat eine einfache geometrische Bedeutung; sie besagt, dafs der Curvenpunkt (x_N, y_N), der dem Wert x_N entspricht, immer je auf derselben Seite der Verbindungslinie derjenigen beiden Curvenpunkte liegt, die den Endpunkten des Intervalls s_N entsprechen. Selbst für den hier beschriebenen einfachsten Fall ist die Zahl der möglichen Functionsbestimmungen noch aufserordentlich mannigfacher Natur.

Zur Abkürzung setzen wir noch

$$\frac{t_N}{s_N} = m_N, \quad \frac{t_{N,0}}{s_{N,0}} = m_{N,0}, \quad \frac{t_{N,1}}{s_{N,1}} = m_{N,1},$$

so wird jetzt, gemäfs den S. 150 abgeleiteten Formeln (1) und (3)

$$m_{N,0} = m_N \frac{1+f_\nu}{1+e_\nu}; \quad m_{N,1} = m_N \frac{1-f_\nu}{1-e_\nu}.$$

Man setze nun noch

$$\frac{1+f_\nu}{1+e_\nu} = 1 + u_\nu, \quad \frac{1-f_\nu}{1-e_\nu} = 1 - v_\nu,$$

so dafs

$$u_\nu = \frac{f_\nu - e_\nu}{1+e_\nu}, \quad v_\nu = \frac{f_\nu - e_\nu}{1-e_\nu}$$

ist, also u_ν und v_ν beide positiv sind. Alsdann hängen die Werte der Quotienten $m_{N,0}$ und $m_{N,1}$ von dem Verhalten der unendlichen Producte

$$U = \Pi(1+u_\nu), \quad V = \Pi(1-v_\nu)$$

ab, und es läfst sich, je nachdem deren Werte endlich und von Null verschieden sind oder gegen Null resp. Unendlich convergiren, ein mannigfaches Verhalten der Ableitungen in den Punkten von X resp. X_g erreichen. Es kann sich hier nur darum handeln, an einem

---

1) Hierfür leistet der Hilfssatz noch gute Dienste, dafs man sich auf solche Punkte als Endpunkte der Intervalle s' beschränken kann, die der Punktmenge $\{x_N\}$ angehören (vgl. Journ. f. Math. 118, S. 6). Man vgl. auch eine Abhandlung Brodén's über Grenzwerte von Summenquotienten, Bih. Svensk. Vet. Akad. Handl. 23, 1, Nr. 2 (1897).

Beispiel die Art der Brodén'schen Überlegungen zu kennzeichnen; ich beschränke mich auf den Fall, dafs U endlich ist, aber $V = 0$. Dies liefert für u_ν und v_ν die folgenden mit einander verträglichen Bedingungen, dafs $\lim u_\nu = 0$, $\lim v_\nu = 0$ ist und überdies Σu_ν convergire, Σv_ν und $\Sigma(u_\nu : v_\nu)$ divergire, doch so, dafs $\lim(u_\nu : v_\nu) = 0$ ist[1]).

Handelt es sich nun zunächst um die Ableitungen in einem Punkt x_N von X, so vereinfacht sich der obige Quotient m_{MN} sehr wesentlich; für die vordere, resp. hintere Ableitung kommen ersichtlicherweise nur die Grenzwerte der beiden leichter zu beurteilenden Quotienten

$$m_N^+ = \frac{\Sigma t_{N',0}}{\Sigma s_{N',0}} \quad \text{resp.} \quad m_N^- = \frac{\Sigma t_{M',1}}{\Sigma s_{M',1}}$$

in Betracht. Nun ist im vorliegenden Fall

$$t_{N,0} = m_N(1 + u_\nu)\, s_{N,0}, \qquad t_{N,1} = m_N(1 - v_\nu)\, s_{N,1},$$

und daraus ergeben sich mit Rücksicht auf die über U und V gemachten Annahmen folgende Resultate. Da U endlich und von Null verschieden ist, so wird auch m_N^+ gegen einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert convergiren; und hieraus läfst sich folgern, dafs für x_N eine vordere Ableitung $f'_+(x_N)$ existirt, die endlich und nicht Null ist. Da andererseits $V = 0$ ist, so convergirt auch m_N^- gegen Null, und es existirt in x_N eine hintere Ableitung $f'_-(x_N)$, die den Wert Null hat.

An den Punkten von X_g hingegen sind sehr mannigfache Ableitungswerte möglich. In diesem Falle knüpfen wir an den Wert von m_N direct an. Ist x ein Punkt von X_g, so wechseln die Werte der in (5) und (6) eingehenden Indices $i, k, l, \cdots$ unaufhörlich ab, und man kann das Gesetz dieser Indiceswerte so bestimmen, dafs für die Ableitungen ein sehr verschiedenes Verhalten eintritt. Hieraut beruht die bereits oben erwähnte Möglichkeit, Punktklassen in der Menge X_g so zu finden, dafs sie vorgegebene Unregelmäfsigkeiten besitzen. Es genügt hier, den zur Indicesfolge $i, k, l, \cdots$ gehörigen Quotienten m_N, resp. seinen Grenzwert ins Auge zu fassen. Man hat

$$(7) \qquad m_N = \frac{t}{s} \cdot \frac{1 \pm f}{1 \pm e} \cdot \frac{1 \pm f_1}{1 \pm e_1} \cdots \frac{1 \pm f_\nu}{1 \pm e_\nu},$$

wo die Vorzeichen davon abhängen, ob die bezüglichen Indices den Wert Null oder Eins haben. Falls also die Zahl dieser Indices unbegrenzt wächst, so werden in dem Wert von m_N Factoren von U

1) Ein Beispiel hierfür bilden folgende Werte (a. a. O., S. 29):

$$u_\nu = \frac{1}{(\nu + 2)^2}, \qquad v_\nu = \frac{\nu + 1}{(\nu + 2)^2}.$$

und Factoren von V ebenfalls in unbegrenzter Folge enthalten sein, und der Grenzwert von m_N hängt offenbar von der Art ab, in der diese Factoren aufeinanderfolgen. Man kann insbesondere diejenigen Factoren, die aus dem Product V stammen, so wählen, dafs sie ein von Null verschiedenes Product darstellen, andererseits aber auch so, dafs sie ein Product vom Wert Null bilden.

Um dies in aller Form darzuthun, verfährt man folgendermafsen: Wird

$$\log(1 - v_\nu) = - l_\nu$$

gesetzt, so ist Σl_ν eine divergente Reihe mit der Eigenschaft $\lim l_\nu = 0$. Ist nun α ein beliebiger positiver echter Bruch, so kann man wegen $\lim l_\nu = 0$ eine unendliche Teilreihe

$$l' = l_{\nu_1},\ l'' = l_{\nu_2},\ \cdots\ l^{(\varrho)} = l_{\nu_\varrho}$$

so bestimmen, dafs

$$l'' < \alpha l',\ l''' < \alpha l'',\ \cdots\ l^{(\nu+1)} < \alpha l^{(\nu)}\ \cdots$$

ist, und es wird $\Sigma l^{(\varrho)}$ eine convergente Reihe sein. Wird jetzt andererseits festgesetzt, dafs in der Reihe (5) nur diejenigen Indices den Wert 1 haben, die den Stellenzahlen

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \cdots\ \nu_\varrho,\ \cdots$$

entsprechen, so wird der Grenzwert von m_N endlich und von Null verschieden sein; dagegen ist er Null, falls die bezügliche in ihn eingehende Teilmenge von Factoren von V einer divergenten Teilreihe von Σl_ν entspricht. Brodén zeigt nun, dafs, falls $\lim m_N = 0$ ist, eine bestimmte Ableitung $f'(x)$ existirt, die den Wert Null hat; ist dagegen $\lim m_N > 0$, so existirt zwar eine bestimmte vordere Ableitung, während eine bestimmte hintere Ableitung nicht vorhanden ist. Die Punkte, die jeder dieser beiden Klassen angehören, haben übrigens die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und liegen überall dicht. Ist nämlich $\Sigma l^{(\varrho)}$ eine convergente Reihe, so ist auch jede unendliche Teilreihe davon eine convergente Reihe, und die Mächtigkeit dieser Teilreihen ist nach S. 9 u. 23 gleich $\mathfrak{c}$; und da die zu einer convergenten Teilreihe von Σl_ν gehörige Restreihe divergent ist, so haben auch die divergenten Teilreihen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Endlich ist auch klar, dafs beide Punktmengen überall dicht liegen, denn man kann die Werte einer beliebig grofsen Reihe von consecutiven Indices $i, k, l, \cdots$ willkürlich vorschreiben.

Eine noch gröfsere Teilung der Punkte x in Klassen verschiedener Structur tritt ein, falls $U = \infty$ und $V = 0$ ist. Man sieht leicht, dafs man in diesem Fall für die Art, wie bei den Indices $i, k, l, \cdots$ die Werte 0 und 1 der Reihe nach abwechseln, solche Gesetze vorschreiben kann, dafs m_N mit wachsendem ν nicht mehr gegen einen festen Grenzwert convergirt, sondern dauernd zwischen beliebig vor-

gegebenen Gröfsen schwankt. Für Punkte dieser Art stellen sich alsdann zwei verschiedene vordere Ableitungen sowie auch zwei verschiedene hintere Ableitungen ein. Noch mannigfaltigere Eigenschaften der Function $f(x)$ ergeben sich, falls die Producte U resp. V oscillirend angenommen werden, u. s. w. u. s. w. Wir schliefsen mit dem Satz:

V. Man kann die Structur einer stetigen monotonen Function mittelst der Formeln (1) und (3) auf die mannigfachste Weise so bestimmen, dafs ihre Ableitungen total unstetige Functionen darstellen.

Viertes Capitel.

Die unendlich oft oscillirenden und die streckenweise constanten resp. linearen Functionen.

Die unendlich oft resp. überall oscillirenden, sowie die streckenweise constanten oder linearen Functionen sind bisher nur beiläufig zur Erörterung gelangt, meist nur zu dem Zweck, um für sie eine Art Ausnahmestellung zu betonen. Sie sind es zumal, an denen die mannigfachen Sätze über das unregelmäfsige Verhalten der Ableitungswerte am greifbarsten und deutlichsten in die Erscheinung treten[1]). Da sie aber hierüber hinaus eine enge Beziehung zu wichtigen Fragen allgemeiner Tragweite besitzen, so scheinen sie mir eine selbständige Behandlung zu verdienen. Ich habe daher versucht, den hier vorliegenden Stoff von seinem zufälligen Charakter zu befreien und von den Einzelresultaten zu einer allgemeineren Untersuchungsrichtung zu gelangen.

Zu den überall oscillirenden Functionen gehört die gröfste Zahl der nirgends differenzirbaren Functionen, die bisher zur Kenntnis gelangt sind. Dies ist auch der Gesichtspunkt, von dem aus man diese Functionen bisher fast ausschliefslich betrachtet hat[2]). In neuester Zeit hat man begonnen, der Untersuchung dadurch eine allgemeinere Wendung zu geben, dafs man die Functionen bestimmten Zwecken gemäfs zu formen gesucht hat. Hiermit hat sich insbesondere Brodén unlängst beschäftigt; er bildet Functionen, die an gewissen Punktklassen Ableitungen besitzen. Formeln, die alle Functionen dieser Art umfassen, lassen sich leicht aufstellen (4); sie liefern zugleich Beispiele für die zuerst von Köpcke aufgefundene und höchst merkwürdige Klasse überall oscillirender Functionen, die in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzen (5). Auch habe ich die allgemeinste Verteilung der Extrema einer unendlich oft

1) Man vgl. besonders Cap. 11 u. 12 der Grundlagen etc. von Dini.
2) Über die allgemeinen Eigenschaften dieser Functionen vgl. auch Dini, Grundlagen etc., S. 168ff.

oder auch überall oscillirenden Function zu bestimmen gesucht und teile sie hier mit (1). Sie liefert zugleich einen einfachen Beweis des König'schen Theorems (3).

Als streckenweise constant resp. linear bezeichne ich stetige Functionen, die in jedem Intervall einer überall dichten Menge $D = \{\delta\}$ constant resp. linear sind, ohne doch selbst constant oder linear zu sein (6). Diese Functionen sind allerdings schon häufiger in dem Buch Dini's und in den anschliefsenden Arbeiten erwähnt worden, aber doch immer nur sehr beiläufig. Was zumal die streckenweise constanten Functionen betrifft, so ist das durch sie gelieferte Functionsbild gar kein anderes, als dasjenige einer monotonen punktweise unstetigen Function, die nur eigentliche Sprünge besitzt, und für die also jede Menge K der Punkte $\omega \geqq k$ endlich ist. Um den Übergang von der einen zur andern Auffassung zu vollziehen, hat man nur die unabhängigen Variablen zu vertauschen. Die Verschiedenheit der Auffassung dürfte aber für manche Fragen zweckmäfsig sein. So schwindet, um nur einen Punkt hervorzuheben, jede Besonderheit daran, dafs man in neuerer Zeit für die bezüglichen punktweise unstetigen Functionen eine Bogenlänge definirt hat; man hat es ja hier mit einem Begriff zu thun, der vom Coordinatensystem unabhängig ist und für die streckenweise constante Function als durchaus naturgemäfs erscheint. Die theoretische Bedeutung dieser Functionen liegt aber in ihrer Beziehung zum sogenannten Fundamentalsatz der Integralrechnung, worauf zuerst Harnack, Scheeffer, Hölder ziemlich gleichzeitig hingewiesen haben. Für diesen Satz spielen die Werte der Ableitungen in den Punkten der perfecten Menge T, die durch die Menge D bestimmt ist, und in zweiter Linie der Inhalt von D die entscheidende Rolle. Ich habe demgemäfs die Frage, wie beide Eigenschaften miteinander verknüpft sind, zu untersuchen begonnen (7) und teile die bezüglichen Resultate hier mit. Allerdings sind sie nicht von abschliefsender Tragweite, wie ja auch für die damit verwandte Frage nach der Geltung des obengenannten Fundamentalsatzes abschliefsende Resultate noch nicht vorliegen. Ich verweise hierfür auf das sechste Capitel.

Die vorstehend charakterisirten Functionsklassen lassen sich auf mehr als eine Variable ausdehnen und zeigen alsdann die analogen Eigenschaften (9).

Die Bedeutung der stetigen streckenweise linearen Functionen liegt in ihrem Zusammenhang mit der Theorie der trigonometrischen Reihen. Hier interessirt insbesondere die Frage, ob es Functionen dieser Art giebt, die in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzen. Diese Frage ist, wie sich zeigen wird, zu bejahen (10). Übrigens kann die Theorie dieser Functionen als identisch mit der Theorie der für eine beliebige abgeschlossene Menge Q stetigen Functionen $f(x, Q)$ betrachtet werden.

1. Ist $x = \xi$ eine Stelle, an der die stetige Function $f(x)$ ein Maximum oder Minimum (Extremum) besitzt, so kann es einen gröfsten, durch die Punkte $\xi_l = \xi - \vartheta_l$ und $\xi_r = \xi + \vartheta_r$ begrenzten Bereich geben, so dafs für alle inneren Punkte x dieses Bereichs

$$f(x) < f(\xi) \quad \text{resp.} \quad f(x) > f(\xi)$$

ist. In diesem Fall soll ξ ein eigentliches Extremum heifsen. Das so bestimmte Intervall, dessen Länge $\vartheta_l + \vartheta_r = \vartheta$ beträgt, heifse der zu ξ gehörige Extrembereich. Falls ξ_l oder ξ_r nicht mit a resp. b zusammenfällt, ist zugleich

$$f(\xi_l) = f(\xi) = f(\xi_r), \tag{1}$$

wie aus der Stetigkeit der Function unmittelbar folgt.

Falls ein Bereich ϑ der genannten Art nicht existirt, so existirt jedenfalls ein analoges Intervall $\xi_l \cdots \xi_r$ von der Art, dafs für jeden inneren Punkt x

$$f(x) \leqq f(\xi) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geqq f(\xi) \tag{2}$$

ist. Alsdann soll ξ ein uneigentliches Maximum oder Minimum (Extremum) heifsen; es giebt dann in jeder Nähe von ξ Punkte x, so dafs $f(x) = f(\xi)$ ist[1]). Auch in diesem Fall mufs, wenn ξ_l nicht mit a und ξ_r nicht mit b zusammenfällt, die Gl. (1) bestehen. Die beiden so definirten Punktklassen folgen einer wesentlich verschiedenen Gesetzmäfsigkeit. Die eigentlichen Extrema bilden, wie wir sofort zeigen werden, eine höchstens abzählbare Menge, während die uneigentlichen auch die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen können.

Sind nämlich ξ' und ξ'' zwei eigentliche Maxima, so ist zunächst klar, dafs nicht jeder innerhalb des dem andern zugehörigen Bereichs liegen kann; sonst müfste ja zugleich $f(\xi'') < f(\xi')$ und $f(\xi') < f(\xi'')$ sein. Nun sei wieder $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_\nu > \cdots$ eine Reihe unbegrenzt gegen Null abnehmender Zahlen, und es sei M_ν die Menge der Maximumspunkte, für die zugleich

$$\vartheta_l \geqq a_\nu \quad \text{und} \quad \vartheta_r \geqq a_\nu$$

ist, so mufs diese Menge endlich sein. Denn sonst hätte sie einen Grenzpunkt ξ, und welches auch der Wert von a_ν sein mag, so würde von je zwei Maximumspunkten ξ' und ξ'', deren Entfernung von ξ kleiner als $\frac{1}{2}a_\nu$ ist, jeder innerhalb des dem andern zugehörigen Maximumsbereiches liegen, was unmöglich ist. Ist nun M_ν endlich, so ist auch $M_\nu' = M_\nu - M_{\nu-1}$ endlich; und es bilden daher auch

$$M_1', \; M_2', \; \cdots M_\nu', \; \cdots$$

1) Hier kann ξ_l oder ξ_r mit ξ zusammenfallen. Es kann übrigens auch für einen eigentlichen Maximumspunkt einen Bereich ϑ geben, in dem die Gl. (2) erfüllt ist.

eine abzählbare Menge. Andererseits mufs jeder Maximumspunkt notwendig einer dieser Mengen angehören. Dasselbe gilt für die Minima.

Der Beweis läfst sich ohne weiteres auf Functionen mehrerer reeller Veränderlichen übertragen. Es handelt sich nur darum, den Extrembereich ϑ für eine Stelle $(x, y \cdots)$ in geeigneter Weise zu definiren. Geschieht dies in der Weise, wie es für die Theorie der Punktmengen auf S. 81 dieses Berichts eingehend ausgeführt ist, so entspricht z. B. jeder Stelle (ξ, η) einer stetigen reellen Function $f(x, y)$, in der ein eigentliches Extremum stattfindet, ein rechteckiger Bereich ϑ, dessen Seiten vom Punkt (x, y) die Entfernungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ besitzen mögen. Auch jetzt gilt, dafs (ξ, η) nicht innerhalb ϑ' und zugleich (ξ', η') innerhalb ϑ liegen kann, und dafs die Menge M_ν endlich ist, wenn M_ν so bestimmt ist, dafs jedes $\vartheta_i \geqq a_\nu$ ist für $i = 1, 2, 3, 4$, woraus der Satz folgt. D. h.

I. Die eigentlichen Maxima oder Minima einer stetigen nirgends constanten[1]) Function beliebig vieler reellen Variablen bilden eine endliche oder abzählbare Menge.

Liegen die Extrema überall dicht im Intervall $a \cdots b$, so werden, je dichter sich das Intervall mit den Punkten der Mengen M_ν bedeckt, die zugehörigen Bereiche ϑ immer kleiner und kleiner. Ist $\Xi = \{\xi\}$ die von ihnen gebildete Punktmenge, so ist ein Punkt ξ_g von Ξ_g kein Maximums- oder Minimumspunkt, obwohl er Häufungsstelle solcher Punkte ist; je näher die Punkte ξ an ihn heranrücken, um so kleiner werden die zugehörigen Bereiche ϑ[2]). Das analoge gilt für Functionen von mehreren Variablen.

2. Die uneigentlichen Extrema stellen nicht etwa den complicirteren, sondern vielmehr den trivialeren Fall dar.

Sei nämlich ξ ein uneigentlicher Maximumspunkt, und wieder ϑ der zugehörige Bereich; ferner sei $f(\xi) = h$. Es giebt dann innerhalb ϑ in jeder Nähe von ξ Punkte ξ', so dafs auch

$$f(\xi') = f(\xi) = h$$

ist, und demnach auch ξ' ein Maximumspunkt ist. Alle Punkte ξ', die innerhalb ϑ liegen und der vorstehenden Gleichung genügen, bilden eine Menge M_ϑ von der Art, dafs jeder isolirte Punkt ein eigentlicher Maximumspunkt ist und jeder Grenzpunkt, der innerhalb ϑ liegt, ein uneigentlicher Maximumspunkt. Denn sind $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu, \cdots$ Maximumspunkte innerhalb ϑ, so dafs ihr Grenzpunkt ξ_ω ebenfalls

1) Eine Function von x und y soll nirgends constant heifsen, wenn es keinen Flächenteil giebt, für dessen sämtliche Punkte sie constant ist.

2) Diese Erscheinung ist ganz analog zu den Eigenschaften der punktweise unstetigen Functionen mit einer abzählbaren und überall dichten Menge von Unstetigkeitsstellen, bei denen ebenfalls der Unstetigkeitsgrad bei Annäherung an einen Stetigkeitspunkt unter jede Grenze sinkt.

innerhalb ϑ liegt, so besteht, da $f(x)$ stetig ist, notwendig die Gleichung

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = \cdots = f(\xi_\nu) = f(\xi_\omega),$$

woraus die Behauptung folgt. Die Endpunkte von ϑ brauchen jedoch keine Maximumspunkte zu sein.

Sei nun ξ_1 ein uneigentlicher Maximumspunkt, der aufserhalb ϑ liegt, so dafs auch $f(\xi_1) = h$ ist, so bedingt er ein Intervall ϑ_1, das von ϑ notwendig getrennt ist, und in ihm eine Menge M_{ϑ_1} von Maximumspunkten $f(\xi) = h$. Die Zahl dieser Intervalle kann unendlich sein, so dafs ihre Endpunkte gegen gewisse Grenzpunkte convergiren. Da aber die Endpunkte der Intervalle nicht notwendig Maxima liefern, so gilt es auch von den Grenzpunkten, und es folgt:

II. Ist h ein Functionswert, der einem uneigentlichen Maximum von $f(x)$ entspricht, so gehört zu ihm eine nirgends dichte Intervallmenge $\Theta = \{\vartheta\}$, und in jedem Intervall eine abgeschlossene Menge M_ϑ, so dafs — eventuell abgesehen von den Endpunkten der Intervalle und deren Grenzpunkten — jeder isolirte Punkt dieser Menge ein eigentlicher und jeder Grenzpunkt ein uneigentlicher Maximumspunkt ist.

Der gleiche Satz gilt für die Minima. Was jede einzelne Menge M_ϑ betrifft, so kann sie sehr wohl perfect sein oder einen perfecten Bestandteil besitzen[1]).

Man kann noch zeigen, dafs die Werte h, die den Maximumspunkten entsprechen, eine höchstens abzählbare Menge bilden. Sei wieder $\Theta = \{\vartheta\}$ die zu h gehörige Intervallmenge und ϑ eines ihrer Intervalle. In ihm können ebenfalls Maxima liegen; eines gehöre zu dem Wert h', wo notwendig $h' < h$ ist. Dieser Wert h' bestimmt auf ϑ Intervalle ϑ', und es folgt aus der Stetigkeit von $f(x)$, dafs die Grenze dieser Intervalle nach links und rechts von den Endpunkten von ϑ verschieden ist. Hieraus schliefst man leicht, dafs auch die Menge der Werte $h, h', \cdots$ endlich oder abzählbar ist. Da nun die Menge der eigentlichen Maxima ebenfalls höchstens abzählbar ist, so folgt:

III. Die Menge aller Werte, die eine unendlich oft oscillirende Function in ihren Extrempunkten annehmen kann, ist endlich oder abzählbar[2]).

---

1) Ein triviales Beispiel, in dem M_ϑ perfect ist, erhält man folgendermafsen. Sei $D = \{\delta\}$ eine Intervallmenge, die eine perfecte Menge T bestimmt, so errichte man über jedem Intervall δ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck und gebe der Function in allen Punkten von T den Wert Null, so ist jeder Punkt von T ein uneigentlicher Minimumspunkt.

2) Dafs diese Menge bei nicht stetigen Functionen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben kann, beweist das S. 137 gegebene Beispiel. Die obigen Sätze gab der Verfasser in den Schriften d. phys. ökon. Ges. zu Königsberg, Bd. 41.

Auch dieser Satz läfst sich auf Functionen mehrerer Variablen übertragen.

3. Um eine Anwendung der soeben eingeführten Begriffe zu geben, beweise ich mit ihrer Hilfe den oben (S. 148) genannten Satz von König. Aus der Voraussetzung des Satzes folgt zunächst, dafs jeder Punkt der Menge G eigentlicher Extrempunkt ist[1]). Hieraus läfst sich folgern, dafs es in jedem Teilintervall $\alpha \cdots \beta$ von $a \cdots b$ mindestens einen Wert η giebt, der an unendlich vielen Stellen des Intervalls von der Function angenommen wird. Ist nämlich ξ irgend ein Maximumspunkt der Function innerhalb $\alpha \cdots \beta$, und ϑ der zugehörige Bereich, so sei ϑ' dasjenige von ξ aus beginnende Teilintervall von ϑ, dem das absolute Minimum der Function innerhalb ϑ angehört, und ϑ_1' der andere Teilbereich. Dann wähle man innerhalb ϑ_1' einen Maximumspunkt ξ_1 beliebig aus, so liegt im Intervall ϑ' jedenfalls ein Punkt ξ_1', so dafs $f(\xi_1) = f(\xi_1')$ ist. Nun sei ϑ_1 der Maximumsbereich von ξ_1, der nach S. 157 notwendig innerhalb ϑ enthalten ist. Mit ihm kann man ebenso verfahren, wie eben mit ξ; es zerfällt dadurch ϑ_1 in die Bereiche ϑ'' und ϑ_1'', und es giebt, falls ξ_2 als Maximumspunkt in ϑ_1'' beliebig gewählt wird, innerhalb der Intervalle ϑ', ϑ'' je einen Punkt ξ_2', ξ_2'', so dafs

$$f(\xi_2) = f(\xi_2') = f(\xi_2'')$$

ist. So kann man weitergehen, woraus jetzt die Behauptung leicht folgt. Sind nämlich ξ_1', ξ_2', ξ_3', $\cdots$ die so definirten Punkte innerhalb ϑ', so sei ξ_ω' ein zu ihnen gehöriger Grenzpunkt, und es folgt nun, dafs für die so innerhalb ϑ', ϑ'', $\cdots$ definirten Grenzpunkte

$$f(\xi_\omega') = f(\xi_\omega'') = f(\xi_\omega''') = \cdots = f(\xi_\omega)$$

ist, wenn ξ_ω Grenzpunkt der Menge $\{\xi_\omega^{(\nu)}\}$ ist; also ist auch

$$\frac{f(\xi_\omega) - f(\xi_\omega')}{\xi_\omega - \xi_\omega'} = \frac{f(\xi_\omega) - f(\xi_\omega'')}{\xi_\omega - \xi_\omega''} = \cdots = 0,$$

woraus der Satz für $c = 0$ folgt. Da nun $f(x) - cx$ ebenfalls den Voraussetzungen des Satzes entspricht, so folgt er damit auch für beliebiges c.

4. Da die uneigentlichen Extrema den trivialen Fall darstellen, so beanspruchen nur diejenigen Functionen besonderes Interesse, die überall oscilliren und deren Extrema alle eigentlich sind. Um die Gesetze ihrer Ableitungen zu erforschen oder ihren Ableitungen bestimmte Eigenschaften aufzuprägen, nimmt man zweckmäfsig als diejenige Punktmenge, für die man die Functionswerte gleichmäfsig stetig vorschreibt, die Menge $\Xi = \{\xi\}$ der Extrema selber, oder doch wenigstens

1) Unter dieser Voraussetzung hat auch Köpcke den Satz bewiesen, Mitt. d. Hamb. Math. Ges. III, Heft 9, S. 376.

eine überall dichte Teilmenge von Ξ. Man läfst dazu das Intervall s in eine ungerade Zahl von Intervallen s_i zerfallen, jedes s_i in eine ungerade Zahl von Intervallen s_{ik} u. s. w.; bestimmt man alsdann die Function so, dafs die den einzelnen Intervallen entsprechenden Functionsdifferenzen abwechselnd positiv und negativ sind und gleichmäfsige Stetigkeit erzielt wird, so ergiebt sich eine stetige Function, die in jedem Punkte von Ξ ein Maximum oder Minimum besitzt. In dieser Weise ist die Frage von Brodén und Steinitz kürzlich behandelt worden. Brodén[1]) benutzt insbesondere einen speciellen Fall fortgesetzter Dreiteilung und bestimmt die Function so, dafs sich für jede Maximumsstelle und jede Minimumsstelle eine bestimmte vordere resp. hintere Ableitung entgegengesetzten Zeichens einstellt, für je eine überall dichte Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ eine bestimmte Ableitung, die Null, gröfser, resp. kleiner als Null ist; endlich giebt es aber auch analoge Mengen, für die zwei vordere resp. hintere Ableitungen existiren. Steinitz[2]) hingegen hat diese Art der Functionsbestimmung nur benutzt, um damit Functionen zu bilden, die in den Punkten von Ξ entweder zwei verschiedene unendliche oder endliche Ableitungswerte besitzen.

Die von Brodén und Steinitz construirten Functionen stellen mehr oder weniger specielle Fälle dieser Functionsklasse dar; es scheint mir daher nützlich, Formeln mitzuteilen, die alle stetigen Functionen dieser Art umfassen.

Dies ist jedenfalls so möglich, dafs man sich auf eine fortgesetzte Dreiteilung beschränkt, so dafs s zunächst in s_0, s_1, s_2 zerfällt, jedes s_i in s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, allgemein jedes s_N[3]) in s_{N0}, s_{N1}, s_{N2}, und dies so, dafs alle entstehenden Teilpunkte der Menge Ξ der Extremwerte angehören. Werden die zugehörigen Functionszuwachse wieder durch t_0, t_1, t_2, resp. t_{N0}, t_{N1}, t_{N2} bezeichnet, so setze man

$$s_{N0} = \tfrac{1}{2} s_N (1 - \varepsilon_{N0}), \quad s_{N2} = \tfrac{1}{2} s_N (1 - \varepsilon_{N2}), \quad s_{N1} = \tfrac{1}{2} s_N (\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}),$$

$$t_{N0} = \tfrac{1}{2} t_N (1 + \varphi_{N0}), \quad t_{N2} = \tfrac{1}{2} t_N (1 + \varphi_{N2}), \quad t_{N1} = -\tfrac{1}{2} t_N (\varphi_{N0} + \varphi_{N2}),$$

und zwar darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dafs t_{N0} und t_{N2} das gleiche Zeichen haben wie t_N, dagegen t_{N1} und t_N entgegengesetztes Zeichen, so dafs mit $\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}$ auch $\varphi_{N0} + \varphi_{N2}$ stets positiv ist. Es entspricht alsdann der erste Teilpunkt von s_N einem Maximum, falls $t_N > 0$ ist, und einem Minimum, falls $t_N < 0$ ist[4]). Setzen wir nun noch zur Abkürzung

1) Journ. f. Math. 118, S. 51.

2) Math. Ann. 52, S. 58 ff. Steinitz benutzt im wesentlichen Teilungen der einzelnen Intervalle in mehr als drei Teile, die sich periodisch gleichartig fortsetzen.

3) Die Bezeichnung ist der früheren (S. 149) analog.

4) Die Stetigkeitsbedingung $\lim s_N = 0$ und $\lim t_N = 0$ erfordert auch hier nur, dafs der Quotient aus den unendlichen Producten der Factoren

$$(3)\quad \frac{1+\varphi_{N0}}{1-\varepsilon_{N0}} = \alpha_{N0}, \quad \frac{1+\varphi_{N2}}{1-\varepsilon_{N2}} = \alpha_{N2}, \quad -\frac{\varphi_{N0}+\varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0}+\varepsilon_{N2}} = \alpha_{N1},$$

so hat man allgemein

$$(4)\qquad m_N = \frac{t_N}{s_N} = \alpha_i\alpha_{ik}\alpha_{ikl}\cdots\alpha_N\frac{t}{s} = A_N\frac{t}{s},$$

wo die Indices i, k, l, $\cdots$ mit denen der Indicesgruppe N übereinstimmen. Diese Quotienten sind es, die für die Werte der Ableitungen in erster Linie in Frage kommen. Aufser ihnen sind noch diejenigen Quotienten zu beachten, die den Entfernungen irgend eines auf s_N liegenden Punktes x von den Endpunkten von s_N entsprechen. Ein jeder solcher Punkt x wird bestimmt durch eine Folge

$$s_N,\ s_{Ni},\ s_{Nik},\ \cdots s_{NN'},\ \cdots$$

mit bestimmten Indices i, k, l, $\cdots$. Wird nun $s_N = \xi_l \cdots \xi_r$ gesetzt, und werden die Intervalle $\xi_l \cdots x$ und $x \cdots \xi_r$ durch s_l resp. s_r bezeichnet, so gilt für die Werte von s_l und s_r das folgende. Liegt x in s_{N1}, so tritt in dem für s_l sich ergebenden Summenausdruck s_{N0} als Summand auf, ebenso s_{N2} in dem Summenausdruck für s_r. Liegt dagegen x in s_{N0}, so treten nur in s_r Summanden auf, und zwar $s_{N1}+s_{N2}$, und liegt x in s_{N2}, so treten nur in s_l Summanden auf, und zwar $s_{N0}+s_{N1}$.

Diese Angaben sind für das Folgende ausreichend. In weitere Einzelheiten einzugehen, ist hier nicht der Ort, es genügt die Bemerkung, dafs die Werte der Quotienten (3) von dem Convergenzcharakter der Producte A_N, sowie von den Gröfsen ε_N und φ_N abhängen, und es können durch geeignete Wahl dieser Gröfsen die verschiedensten Eigenschaften der Ableitungswerte erzielt werden, insbesondere auch diejenigen, die Brodén und Steinitz behandelt haben[1]). Auch hier wird man zweckmäfsig die aus den α_{N0}, resp. den α_{N1} und den α_{N2} gebildeten Teilproducte ins Auge fassen, die den (S. 152) eingeführten Producten U und V analog sind, und kann dadurch zu ähnlichen Resultaten gelangen, wie oben. Von allgemeinerem Interesse scheint mir nur noch der Hinweis auf gewisse Klassen von Punkten von Ξ_y, die sozusagen eine Art singulären Charakters besitzen.

$(1-\varepsilon_N)$, $(1+\varphi_N)$ u. s. w. und 2^ν den Grenzwert Null hat, nicht die Producte selbst. Vgl. oben S. 150. Man kann auch hier die Wertbestimmung so vornehmen, dafs die Extrema allen rationalen Stellen entsprechen und in ihnen die Functionswerte selbst rational sind. Dies ist auch für die differenzirbaren Functionen dieser Art möglich. Diese Functionen selbst sind dann sicher nicht rational. Vgl. S. 121 und die Anmerkung auf S. 137.

1) Vgl. auch noch Sätze von Harnack in Math. Ann. 23, S. 268.

Möge nämlich in der Indicesfolge $i, k, l, \ldots$, die den Punkt x bestimmt, von einer bestimmten Stelle an der Index 1 nicht mehr auftreten, also nur 0 und 2. Ist z. B. der νte Index eine Zwei, so können alle folgenden Indices bis zur ν'ten Stelle eine Null sein, und ebenso können von der $\nu_1$ten bis zur ν_1'ten Stelle alle Indices 0 sein u. s. w. Alsdann hat der oben für m_l gefundene Wert die Form

$$m_l = \frac{t_l}{s_l} = \frac{t_{N0} + t_{N1} + t_{N'0} + t_{N'1} + \cdots}{s_{N0} + s_{N1} + s_{N'0} + s_{N'1} + \cdots};$$

es ist aber für den Punkt x auch der Quotient

$$m_l' = \frac{t_l'}{s_l'} = \frac{t_{N1} + t_{N'0} + t_{N'1} + \cdots}{s_{N1} + s_{N'0} + s_{N'1} + \cdots}$$

ein solcher, der für die linksseitige Ableitung in Frage kommt, und da bei der hier vorausgesetzten Intervallteilung t_{N0} und t_{N1} verschiedenes Vorzeichen besitzen, so bedarf dieser Fall stets einer besonderen Aufmerksamkeit. Während nämlich das Zeichen des ersten Zählers von dem Verhältnis von $t_{N1} : t_{N0}$ abhängt, so ist dies für den zweiten Zähler das Verhältnis von $t_{N1} : t_{N'0}$, und es kann ja die Differenz $\nu' - \nu$ beliebig grofs werden und mit wachsendem ν selbst über jede Grenze wachsen. Die hier angedeutete Möglichkeit ist es, die den besonderen Charakter dieser Punkte bedingt.

5. Die wichtigste Anwendung, die ich von den obigen Formeln machen will, betrifft die von Köpcke entdeckte Thatsache, dafs es überall oscillirende Functionen giebt, die in jedem Punkte eine eigentliche Tangente besitzen. Dini hatte der zunächst höchst paradoxen Vermutung, dafs es solche Functionen geben kann, bereits gelegentlich Ausdruck gegeben[1]). Köpcke hat aber das Verdienst, hierzu ein specielles Beispiel ersonnen zu haben[2]). Er geht von einem über dem Intervall s stehenden Kreisbogen aus, dessen Gleichung $y = h_0(x)$ sei, und teilt dieses Intervall in soviele Teile s_i, dafs in jedem die Schwankung der Tangente unterhalb einer Gröfse k liegt. Nun construirt er über jedem Teilintervall s_i einen Polygonzug, dessen Seiten mit der x-Achse Winkel α_ν so bilden, dafs einerseits $|\operatorname{tg} \alpha_\nu| \leq k$ ist und andererseits für die mittlere Seite des Polygonzuges $\operatorname{tg} \alpha = -k$ ist, und schleift diesen Polygonzug an den Enden durch Kreisbogen ab, die das Intervall s_i in den Endpunkten berühren. Ist dann $y = h_1(x)$ die Gleichung der Gesamtheit aller dieser Polygonzüge, so besitzt die Curve

1) Grundlagen etc., S. 383. Du Bois-Reymond hatte dies für unmöglich gehalten. Journ. f. Math. 79, S. 32.

2) Math. Ann. 34, S. 161 und 35, S. 104. In der zweiten Abhandlung wird ein in der ersten vorhandener Irrtum corrigirt. Vgl. auch Festschr. d. Hamb. Math. Ges. 1890, S. 128, wo eine analytische Darstellung dieser (etwas modificirten) Function gegeben wird.

$$y = \mathfrak{H}_1(x) = h_0(x) + h_1(x)$$

über jedem Intervall s_i bereits mindestens ein Maximum und ein Minimum. Teilt man jetzt jedes Intervall s_i wieder so in Teile, dafs in jedem Teilintervall die Schwankung der Tangente der Curve $y = \mathfrak{H}_1(x)$ unterhalb k_1 liegt, fügt überdies alle Punkte von $\mathfrak{H}_1(x)$, in denen $\mathfrak{H}_1'(x) = 0$ ist, den Teilpunkten hinzu und construirt zu jedem so gebildeten Teilintervall s_{ik} einen analogen Polygonzug wie oben und fährt so fort, so genügt die so gebildete Function

$$\mathfrak{H}(x) = \lim \mathfrak{H}_\nu(x) = \sum_0^\infty h_\nu(x)$$

den Forderungen. Der Beweis beruht darauf, dafs für die speciellen von Köpcke benutzten Zahlenwerte $k, k_1, \cdots$ diese Reihe alle Eigenschaften besitzt, unter denen sie eine differenzirbare Function darstellt. Es ist andererseits klar, dafs die so definirte Function in jedem Teilpunkt, der bei fortgesetzter Teilung erhalten bleibt, ein Extremum und in ihm eine horizontale Tangente besitzt. Das hiermit construirte Beispiel ist kürzlich von Pereno[1]) vereinfacht worden.

Um die Bedingungen zu finden, unter denen die Formeln (3) zu Functionen dieser Art führen, und damit zugleich eine ganze Klasse solcher Functionen zu gewinnen, kann man so verfahren[2]). Da $\alpha_{N1} < 0$ ist, so folgt aus Gl. (4), dafs für jede Indicesfolge, die den Index 1 unendlich oft enthält, $\lim A_N = 0$ sein mufs, und dies kann dadurch bewirkt werden, dafs jedes aus unendlich vielen Factoren α_{N1} bestehende Product Null ist. Es würde genügen, $\lim \alpha_{N1} < 1$ zu nehmen; spätere Bedingungen führen sogar auf $\lim \alpha_{N1} = 0$. Soll zweitens in jedem Endpunkt eines unserer Intervalle s_N eine horizontale Tangente vorhanden sein, so mufs für ihn vordere und hintere Ableitung Null sein, und dies verlangt, dafs für jedes Intervall s_N die beiden seinen Endpunkten zugehörigen Producte

$$A_N^0 = \alpha_{N0} \cdot \alpha_{N00} \cdot \alpha_{N000} \cdots \quad \text{und} \quad A_N^2 = \alpha_{N2} \cdot \alpha_{N22} \cdot \alpha_{N222} \cdots$$

Null sind. Es müssen daher in jedem dieser Producte unendlich viele Factoren $\alpha_N < 1$ enthalten sein, die die Convergenz gegen Null bedingen. Setzt man z. B.

$$(5) \quad \alpha_{N0} = \frac{1 + \varphi_{N0}}{1 - \varepsilon_{N0}} = 1 + a_N, \quad \alpha_{N2} = \frac{1 + \varphi_{N2}}{1 - \varepsilon_{N2}} = 1 - b_N,$$

so dafs $\Pi(1 - b_\nu) = 0$ ist, wählt überdies, was das einfachere ist, $\varepsilon_{N0} > 0$, $\varepsilon_{N2} > 0$, also $\varphi_{N2} < 0$, $\varphi_{N0} > 0$, so dafs $a_N > 0$ ist, und setzt noch

1) Giorn. di mat. 35, S. 132.

2) Für die ausführliche Darstellung vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers in Math. Ann. Bd. 53. Auch Brodén hat kürzlich Functionen dieser Art construirt, Öfr. af. Vet. Ak. Förh. Stockholm 1900, S. 743.

$$a_N - b_N = \varepsilon_{N2} + \varepsilon'_{N2}, \quad 1 - c_N = \gamma_N,$$

so wird die Eigenschaft der horizontalen Tangente in allen Punkten von Ξ durch die Bedingungen gewährleistet, dafs

$$\varepsilon_{N2}(b_N - \gamma_N) + \varepsilon'_{N2} - \varepsilon_{N0}(1 + a_N + \gamma_N) = 0,$$
$$\varepsilon_{N2} b_N + \varepsilon'_{N2} - \varepsilon_{N0}(1 + a_N) > 0$$

ist, und ihnen ist durch geeignete Wahl der a, b, γ, ε und φ so zu genügen, dafs die verlangten Convergenzeigenschaften bestehen[1]). Dies läfst sich für jedes zu Grunde gelegte Product $\Pi(1 - b_\nu)$ wirklich erreichen, mit anderen Worten, es lassen sich den Intervallen s_N die Gröfsen b_μ so zuweisen, wie es die Gleichungen $A^0_N = 0$, $A^2_N = 0$ und die Bedingung, dafs $\lim A_N$ immer endlich und bestimmt ist, erfordern. Dies kann z. B. so geschehen, dafs

$$\lim \frac{b_N \varepsilon_{N2}}{\varepsilon'_{N2}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim \frac{b_N \varepsilon_{N2}}{\varepsilon_{N0}} = 0$$

gesetzt wird. Damit ist jedoch die Bedingung, dafs für einen Punkt x von Ξ_g zugleich

$$\lim \frac{t_l}{s_l} = \lim \frac{t_r}{s_r} = \lim \frac{t_N}{s_N} = \lim A_N$$

ist, noch nicht von selbst erfüllt. Wenn nämlich der Punkt x ein solcher Punkt von Ξ_g ist, wie wir ihn oben betrachteten, in dessen Indicesfolge also längere Folgen von Nullen oder Zweien auftreten, so mufs noch bewirkt werden, dafs auch

$$\lim \frac{t'_l}{s'_l} = \lim A_N, \quad \text{resp.} \quad \lim \frac{t'_r}{s'_r} = \lim A_N$$

ist. Ist nun $\lim A_N \gtrless 0$, so ist hierfür noch zu verlangen, dafs, welches auch ν und ν' sein mögen, doch immer

$$\lim \frac{s_{N1}}{s_{N'0}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim \frac{t_{N1}}{t_{N'0}} = 0$$

ist. Dies ist nun wirklich trotz der grofsen Beliebigkeit von ν und ν' möglich, und zwar deshalb, weil doch wieder die Werte ν, ν' dadurch beschränkt sind, dafs die Teilproducte der $\nu' - \nu$, $\nu'_1 - \nu_1, \cdots$ Factoren

$$A' = \alpha_{N0} \cdot \alpha_{N00} \cdot \alpha_{N000} \cdots, \quad A'_1 = \alpha_{N_1 0} \cdot \alpha_{N_1 00} \cdot \alpha_{N_1 000} \cdots$$

ein von Null verschiedenes Gesamtproduct $A' A'_1 \cdots$ geben. Dieser

1) Man hat natürlich auch den Fall ins Auge zu fassen, dass $\alpha_{N2} > 1$, $\alpha_{N0} < 1$ sein kann, was ganz analog zu erledigen ist.

Umstand ermöglicht es, die gestellte Bedingung zu erfüllen[1]). Wir schliefsen mit dem Satz:

IV. Es giebt stetige, überall oscillirende Functionen, die in jedem Punkte eine eigentliche Tangente besitzen.

6. Ist eine stetige Function $T(x)$ auf zwei Intervallen δ' und δ'' constant, die einen Endpunkt gemein haben, so ist sie auch auf dem Gesamtintervall $\delta' + \delta''$ constant. Dieser Schlufs gilt aber nicht allein beim Übergang von ν zu $\nu + 1$, sondern auch beim Übergang von $\{\nu\}$ zu ω. Sind nämlich x', x'', x''' irgend welche Punkte auf den bezüglichen Intervallen δ', δ'', δ''', $\cdots$, so folgt durch Schlufs von ν auf $\nu + 1$, dafs

$$(6) \qquad T(x') = T(x'') = \cdots = T(x^{(\nu)}) = T(x^{(\nu+1)})$$

ist. Wenn nun x_ω der Grenzpunkt der Intervalle $\delta^{(\nu)}$ ist, so wird gemäfs der Stetigkeit der Wert von $T(x_\omega)$ durch die Folge (6) für $\lim \nu = \infty$ dargestellt, woraus die Behauptung folgt. Also:

V. Ist eine stetige Function auf allen Intervallen einer Menge $D = \{\delta\}$ constant, so ist sie immer dann eine Constante, falls D eine abzählbare Punktmenge Q bestimmt.

Um streckenweise constante stetige Functionen $T(\xi)$ zu erhalten, müssen wir daher von vorn herein annehmen, dafs die Intervalle der Menge $D = \{\delta\}$ eine perfecte Menge T bestimmen. Alsdann giebt es aber auch Functionen dieser Art, wie das Folgende zeigt.

Um dies zu begründen und zugleich von der Mächtigkeit der Functionsklasse $T(\xi)$ eine Vorstellung zu geben, beweise ich folgenden Satz:

VI. Die Menge aller Functionen $T(\xi)$, die derselben im Intervall $a \ldots b$ liegenden Intervallmenge $D = \{\delta\}$ zugehören, läfst sich eineindeutig der Menge aller im Intervall $a \ldots b$ stetigen Functionen zuordnen.

Dieser Satz ist eine einfache Folge davon, dafs eine stetige Function $F(x)$ durch ihre Werte an einer überall dichten Menge bestimmt ist. Wir wählen als überall dichte Punktmenge die mehrfach benutzte Menge $X = \{x_N\}$ und beziehen (S. 79) eine Menge $D = \{\delta_N\}$ eineindeutig auf die Menge $X = \{x_N\}$, indem wir jedem Punkt x_N das Intervall δ_N zuweisen. Um die Beziehung zwischen

1) Für den Fall, dafs $\Pi(1 - b_\nu) = \Pi(1 - 1/_\nu)$ ist, habe ich die Untersuchung a. a. O. ausführlich durchgeführt. Ein einfaches Beispiel bilden in diesem Fall folgende Werte:

$$b_N = \frac{1}{\mu}, \quad a_N = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2^\nu}, \quad \varepsilon_{N2} = \frac{1}{2^{2^\nu}}, \quad \varepsilon_{N0} = \frac{1}{2^{3^\nu}},$$

wo für die zu jeder Indexgruppe N gehörigen Werte μ ein Gesetz besteht, so dafs $\nu < \mu < (1 + e)^\nu$ ist, für $0 < e$.

$T(\xi)$ und der stetigen Function $F(x)$ herzustellen, interpretiren wir jetzt diese Abbildung so, dafs wir dem Punkt x_N alle Punkte von δ_N zuweisen. Sind dann x und ξ irgend zwei entsprechende Punkte, und definiren wir die Function $T(\xi)$ durch die Gleichung

$$F(x) = T(\xi),$$

so ist damit $T(\xi)$ als stetige streckenweise constante Function im Intervall $a \cdots b$ definirt. Halten wir nun die Mengen D und X fest, so entspricht jeder stetigen Function $F(x)$, die nicht selbst streckenweise constant ist, eine und nur eine Function $T(\xi)$. Diese Entstehung von $T(\xi)$ aus $F(x)$ läfst sich kürzer so definiren, dafs man an jeder Stelle von x den bezüglichen Wert der Function $F(x)$ tilgt und statt seiner ein beliebiges Constanzintervall δ einschaltet[1]), so dafs der bezügliche Functionswert durch das ganze Intervall beibehalten wird.

Die Construction einer Function $T(\xi)$ mittelst einer Menge T findet sich zuerst bei Cantor[2]); im übrigen ist das durch sie definirte Functionsverhältnis unter anderem Gesichtspunkt in der Analysis längst bekannt, wie es überhaupt mannigfacher Auffassung fähig ist. Die Function $T(\xi)$ stellt zunächst einen speciellen Typus einer in T stetigen Function $f(x, T)$ dar. Ist sie insbesondere monoton, so stellt sie bei Vertauschung der unabhängigen Variablen eine punktweise unstetige Function dar, die nur Sprünge besitzt. Auch die Functionen, die bei der Peano'schen Abbildung sowie bei jeder Abbildung des Continuums auf eine nirgends dichte Menge auftreten, sind solche Functionen. Die noch eben benutzte Abbildung des Continuums mittelst der Mengen $X = \{x_N\}$ und $D = \{\delta_N\}$ führt zu einer Function $T(\xi)$, wenn man jedem Intervall δ_N den Wert x_N als Functionswert zuweist, wie auch umgekehrt ξ als Function von x eine Function ist, die an jeder Stelle x_N einen Sprung von der Gröfse δ_N hat[3]).

---

1) Vgl. auch S. 175 dieses Berichts. Man kann übrigens die Einschaltung auch so vornehmen, dafs man von einer überall oscillirenden Function $F(x)$ ausgeht und an jedem Extremum ein Intervall δ einfügt.

Auf den Begriff der streckenweise constanten Functionen ist übrigens kürzlich auch R. Baire geführt worden, gelegentlich des Problems, die Differentialgleichung

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

für den Fall zu integriren, dafs man sich auf das Reelle beschränkt und von den in ihr auftretenden Differentialquotienten nur die Existenz in jedem Punkt voraussetzt. (Ann. di mat. (3) 3, S. 101.) Der Satz V nimmt bei ihm die Form an, dafs eine Function constant ist, wenn sie punktweise variabel ist für jede perfecte Menge.

2) Acta math. 4, S 387. Vgl. auch Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 338, Harnack, Math. Ann. 24, S. 225, sowie Scheeffer, Acta math. 5, S. 287.

3) Auch die Peano'schen Ziffergesetze (S. 64) sind Functionen dieser Art. Ein derartiges Beispiel gab kürzlich auch Gravé, C. R. 127, S. 1005.

7. Die Ableitungen einer Function $T(\xi)$ werden einerseits von den Ableitungen der Function $F(x)$, andererseits von der Wahl der Menge $D = \{\delta\}$, insbesondere aber auch von ihrem Inhalt abhängen. Man hat in der That, falls ξ', ξ'' und x', x'' irgend zwei entsprechende Wertepaare sind,

$$\frac{T(\xi'') - T(\xi')}{\xi'' - \xi'} = \frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'} \cdot \frac{x'' - x'}{\xi'' - \xi'}.$$

Falls man also die Ableitungswerte von $F(x)$ als gegeben betrachtet, so handelt es sich nur um die Betrachtung des Differenzenquotienten

$$q(\xi'', \xi') = \frac{x'' - x'}{\xi'' - \xi'}.$$

Nun stellt aber x selbst eine monotone niemals abnehmende Function $T(\xi)$ dar, so dafs es genügt, die monotonen Functionen dieser Art ins Auge zu fassen, insbesondere diejenigen, die niemals abnehmen. Die im folgenden abzuleitenden Sätze gelten deshalb auch für die punktweise unstetigen Functionen, die höchstens zweiwertig sind.

Über die Ableitungen der Functionen $T(\xi)$ liegen nur gelegentliche Bemerkungen von Harnack[1]) und Scheeffer[2]) vor. Diejenige Harnack's geht dahin, dafs in dem von ihm construirten einfachen Beispiel die bezüglichen Ableitungen in allen Punkten von T unendlich grofs seien. Dies ist jedoch, wie sich zeigen wird, nicht der Fall.

Wir benutzen die S. 149 eingeführten Bezeichnungen, bezeichnen also das Intervall $a \cdots b$ durch s und $\alpha \cdots \beta$ durch τ, lassen den Intervallen s_N die Intervalle τ_N entsprechen, und bedienen uns der oben (S. 150) für s_N abgeleiteten Formeln. Wir bedürfen noch einer geeigneten Darstellung der Strecken τ_N. Wir haben hier zunächst (S. 76)

$$\tau_0 + \tau_1 = \tau - \delta = \tau(1 - \lambda)$$

und setzen demgemäfs

$$\tau_0 = \tfrac{1}{2}\tau(1 - \lambda)(1 + \varphi), \quad \tau_1 = \tfrac{1}{2}\tau(1 - \lambda)(1 - \varphi);$$

ebenso ist allgemein

$$\tau_{N,0} + \tau_{N,1} = \tau_N - \delta_N = \tau_N(1 - \lambda_N),$$

und wir setzen

$$\tau_{N,0} = \tfrac{1}{2}\tau_N(1 - \lambda_N)(1 + \varphi_N), \quad \tau_{N,1} = \tfrac{1}{2}\tau_N(1 - \lambda_N)(1 - \varphi_N),$$

alsdann wird

$$\tau_N = \frac{1}{2^\nu}\tau \cdot \Lambda_N \cdot \Phi_N,$$

1) Math. Ann. 24, S. 227 und 230. Vgl. auch S. 171 Anm.
2) Acta math. 5, S. 291.

für

$$A_N = (1 - \lambda)(1 - \lambda_i) \cdots (1 - \lambda_{N-1}),$$
$$\Phi_N = (1 \pm \varphi)(1 \pm \varphi_i) \cdots (1 \pm \varphi_{N-1}),$$

und zwar hängen die Vorzeichen so von den Indices $i, k, l, \ldots$ ab, dafs dem Index 0 ein positives und dem Index 1 ein negatives Vorzeichen entspricht. Diese Formeln gestatten ein Urteil über die Werte der Ableitungen. Auch hier sind es wieder die oben (S. 152) eingeführten Quotienten m_N, $m_{N,0}$ und $m_{N,1}$, deren Grenzwerte für diese Werte in erster Linie in Frage kommen. Wir erhalten

$$m_N = \frac{s_N}{\tau_N} = \frac{s}{\tau} \cdot \frac{E_N}{\Phi_N : A_N},$$
$$m_{N,i} = \frac{s_{N,i}}{\tau_{N,i}} = \frac{s}{\tau} \cdot \frac{E_N}{\Phi_N \cdot A_N} \cdot \frac{1 \pm e_N}{(1 \pm \varphi_N)(1 - \lambda_N)};$$

dabei unterliegen die Producte E_N und Φ_N den S. 150 für F_N und E_N angegebenen Bedingungen, während der Wert von A_N vom Inhalt der Menge T abhängt. Man ersieht hieraus einerseits, dafs die Discussion dieser Formeln sich in Analogie setzen läfst mit der Discussion derjenigen, die wir a. a. O. für nirgends constante monotone Functionen aufgestellt haben; es mag daher genügen, hier auf diese Analogie hingewiesen zu haben. Wie dort, kann man auch hier durch specielle Annahmen die Structur der Function $T(\xi)$ in der mannigfachsten Weise beeinflussen. Andererseits zeigt das Auftreten von A_N, dafs auch der Inhalt von T von wesentlichem Einflufs auf die Werte der Ableitungen sein wird, was wir sofort des näheren bestätigen werden. Nur auf einen Umstand besonderer Art soll noch hingewiesen werden. Falls wir nämlich das Intervall τ' bestimmen, das einem beliebig gewählten Intervall s' entspricht, so entspricht auch jetzt jedem Intervall $s_{N',0}$ und $s_{M',1}$ ein Intervall $\tau_{N',0}$ resp. $\tau_{M',1}$; es entspricht aber aufserdem dem auf s' liegenden Punkt x_N noch das ganze Intervall δ_N, ebenso jedem Punkt $x_{N'}$ ein Intervall $\delta_{N'}$ und jedem $x_{M'}$ ein Intervall $\delta_{M'}$, so dafs sich für τ' der Wert

$$\tau' = \delta_N + \Sigma(\tau_{N',0} + \delta_{N'}) + \Sigma(\tau_{M',1} + \delta_{M'})$$

ergiebt. In dem hier auftretenden Intervall δ_N liegen die Besonderheiten begründet, denen wir bei den Functionen $T(\xi)$ begegnen werden. Es besteht nämlich der Satz:

VII. Für jede monotone Function $T(\xi)$ giebt es je eine in Bezug auf T überall dichte Teilmenge von T_g von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, in deren Punkten eine vordere oder eine hintere Ableitung oder auch eine vordere und hintere Ableitung den Wert Null hat[1]).

1) Es giebt also bei jeder punktweise unstetigen Function mit Sprüngen solche Punkte, in denen eine Ableitung unendlich ist.

Diese Menge könnte als Menge zweiter Kategorie construirt werden. Ich gebe hier einmal eine etwas abweichende Bestimmung, um dabei zugleich die grofse Beliebigkeit und Mannigfaltigkeit der möglichen Ableitungswerte hervortreten zu lassen.

Es möge zunächst ein Punkt ξ_g von T_g im Intervall τ_N so bestimmt werden, dafs für ihn eine vordere Ableitung $D_+T(\xi_g) = 0$ ist. Den entsprechenden Punkt x_g denken wir uns wie oben (S. 151) als Grenzpunkt der Punktfolge $x_N, x_{N'}, x_{N''}, \cdots$, so dafs sich für das Intervall $x_N \cdots x_g$ der Wert ergiebt

$$s' = s_{N',0} + s_{N'',0} + s_{N''',0} + \cdots = \Sigma s_{N',0}.$$

Es ist dann sicher

$$\tau' = \delta_N + \Sigma(\tau_{N',0} + \delta_{N'})$$

ein entsprechendes Intervall[1]). Da nun s_N mit wachsendem ν gegen Null convergirt, so kann man Zahlen $\nu', \nu'', \nu''', \cdots$ so bestimmen, dafs

$$s_{N'} < k'\delta_N, \quad s_{N''} < k''\delta_{N'}, \quad s_{N'''} < k'''\delta_{N''}, \cdots$$

ist, wo $k' < k'' < k''' \cdots$ ist und $\lim k^{(\nu)} = 0$ ist; alsdann entspricht dem so bestimmten Punkt x_g ein Punkt ξ_g, der die verlangte Eigenschaft besitzt. Es ist nämlich $s' < s_{N'}$ und daher

$$\frac{s'}{\tau'} < \frac{s_{N'}}{\delta_N} < k';$$

werden also die Strecken $x_g \cdots x_{N''}$, $x_g \cdots x_{N'''}, \cdots$ durch $s'', s''', \cdots$ bezeichnet, und die entsprechenden Strecken $\tau'', \tau''', \cdots$ analog angenommen, so convergiren die Quotienten

$$\frac{s'}{\tau'}, \frac{s''}{\tau''}, \frac{s'''}{\tau'''}, \cdots$$

gegen Null, woraus die Behauptung folgt. Analog folgt die Behauptung für eine hintere Ableitung, und man sieht leicht, dafs man die Construction des Punktes ξ_g auch so ausführen kann, dafs eine vordere und eine hintere Ableitung Null ist. Wird nämlich ξ_g als gemeinsamer Grenzpunkt der Intervalle

$$\tau_N, \tau_{N,i}, \tau_{N,ik}, \cdots$$

betrachtet, so bestimme man die Indices $i, k, l, \cdots$ so, dafs zunächst für ν' dieser Intervalle der letzte Index 1 ist, dann sei er für μ' Intervalle 0, dann wieder 1 für ν'' Intervalle $\cdots$, wo $\nu', \mu', \nu'', \cdots$ wie oben bestimmt sind. Alsdann ist ξ_g ein Punkt, für den sowohl $D_+T(\xi_g) < k^{(\lambda)}$, als auch $D^-T(\xi_g) < k^{(\lambda)}$ ist. Dieses Verfahren zeigt zugleich, dafs die Mächtigkeit der so bestimmten Punkte ξ_g gleich $\mathfrak{c}$

1) Auch jedes Intervall $\tau' = k\delta_N + \Sigma\tau_{N',0} + \Sigma\delta_{N'}$, wo $0 \leq k \leq 1$, stellt ein entsprechendes Intervall dar.

ist. Anstatt nämlich die Bestimmung der Zahlen ν und μ abwechselnd vorzunehmen, kann man dies auch in jeder andern Reihenfolge bewirken; jedem unendlichen dyadischen Bruch entspricht ein Punkt ξ_g, indem man die Reihenfolge der μ und ν derjenigen der Ziffern 0 und 1 entsprechen läfst. (Vgl. S. 154.)

Im allgemeinen werden übrigens in den so bestimmten Punkten ξ_g beide vorderen und beide hinteren Ableitungen verschieden sein.

Ist in jedem Intervall τ_N die obere Grenze aller Ableitungen der Function $T(\xi)$ gleich g, so wird es überdies möglich sein, indem man die Gröfsen k', k'', k''', $\cdots$ so wählt, dafs $\lim k^{(\nu)} = g' < g$ ist, Punktmengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ zu construiren, in denen eine vordere oder hintere oder beide Ableitungen den Wert g' haben. Hiermit wird das obige König'sche Theorem auf Functionen $f(x, T)$ ausgedehnt, die für die perfecte Menge T monoton und stetig sind.

Diese Resultate zeigen, dafs für gewisse Punkte durchaus unerwartete Ausnahmen eintreten können; sie sind zugleich geeignet, die Vorstellung von der Natur des Continuums und von der Mächtigkeit der in ihm enthaltenen ebenfalls nicht abzählbaren Punktklassen zu klären und zu vervollkommnen. Hierauf hat man bisher kaum genügende Rücksicht genommen. Ich erwähnte schon, dafs Harnack sich dahin ausgesprochen hat, dafs die von ihm construirte Function $T(\xi)$ in allen Punkten von T eine bestimmte unendliche Ableitung besitze, während es leicht ist, Punkte anzugeben, die dem vorstehenden Satz entsprechen[1]).

8. Der Einflufs, den der Inhalt $J(T)$ von T auf die Werte der Ableitungen hat, spricht sich in folgenden Sätzen aus:

VIII. Ist die Menge T der monotonen Function $T(\xi)$ unausgedehnt, so giebt es eine in Bezug auf T überall dichte Teilmenge T_1 zweiter Kategorie, an der eine vordere resp. hintere Ableitung unendlich wird.

Ist nämlich $\tau_N = \xi' \cdots \xi''$ ein beliebiges Intervall, das seinerseits wieder in die Intervalle

$$\tau_{N,i}, \ \tau_{N,ik}, \ \cdots \ \tau_{N'}$$

zerfällt, wo N' eine Gruppe von ν' Indices bedeutet, und sind $\xi'_{N'}$ und $\xi''_{N'}$ die Endpunkte von $\tau_{N'}$, so kann nicht für jedes dieser Intervalle $\tau_{N'}$

1) Vgl. für diese Function die Angaben auf S. 102. Dazu ist noch zu fügen, dafs $s_N = \frac{1}{2^\nu}$ ist. Man setze ferner $\mu = 10$, $\mu' = 20$, $\nu_1 = 20$, $\nu_1' = 60$, $\mu'' = 60$, $\mu_1'' = 120$ u. s. w., so erhält man ein Beispiel. Dini bezeichnet die Frage nach den Ableitungen in den Punkten von T_g resp. diejenige, die mit ihr äquivalent ist, ausdrücklich als eine offene. Vgl. Grundlagen etc., S. 203, wo die hierhergehörige Riemann'sche Function betrachtet wird.

$$q(\xi''_{N'}, \xi'_{N'}) = \frac{T(\xi''_{N'}) - T(\xi'_{N'})}{\xi''_{N'} - \xi'_{N'}} \leqq G$$

bleiben, wie auch G gewählt sein möge. Denn sonst folgte durch Summation über alle diese Intervalle $\tau_{N'}$

$$T(\xi'') - T(\xi') \leqq G\,\Sigma\tau_{N'}.$$

Ist aber $J(T) = 0$, so kann man ν' so grofs wählen, dafs $\Sigma\tau_{N'}$ beliebig klein wird, womit die letzte Ungleichung im Widerspruch steht. Es giebt also mindestens ein Intervall $\tau_{N'} = \tau'$, so dafs in ihm

$$q(\xi''_{N'}, \xi'_{N'}) > G$$

ist. In diesem Intervall τ' giebt es wieder mindestens ein analoges Intervall τ'' u. s. w. Die so gefundenen Intervalle $\tau', \tau'', \tau''', \cdots$ convergiren nun entweder gegen einen Punkt von T_l resp. T_r oder gegen einen Punkt von T_g. Ist es ein Punkt ξ_l von T_r, so ist in ihm eine vordere Ableitung unendlich grofs, ist es ein Punkt ξ_r von T_l, so eine hintere. Convergiren aber die Intervalle gegen einen Punkt ξ_g von T_g, so besteht von den beiden Relationen

$$T(\xi_g) - T(\xi'_N) > G(\xi_g - \xi'_N), \qquad T(\xi''_N) - T(\xi_g) > G(\xi''_N - \xi_g)$$

notwendig mindestens eine; es wird daher auch mindestens eine vordere oder eine hintere Ableitung in ξ_g unendlich grofs.

Die so gefundene Menge liegt jedenfalls überall dicht in T. Sie ist daher eine Menge der zweiten Kategorie. Dies folgt nunmehr aus dem Satz von Brodén, der auf Functionen übertragen werden kann, die für eine Menge T definirt sind. Übrigens kann, auch wenn $J(T) = 0$ ist, doch eine überall dichte Teilmenge von T_r resp. T_l existiren, an der eine bestimmte vordere oder hintere Ableitung den Wert Null hat oder endlich ist[1]). Die allgemeine Möglichkeit hiervon erhellt daraus, dafs, wie aus dem obigen folgt, welches auch der Wert von Δ_N sei, durch geeignete Wahl von E_N und Φ_N die Structur der Function so beeinflufst werden kann, dafs sie jedenfalls an einer abzählbaren Menge von Stellen ein willkürlich vorgeschriebenes Verhalten aufweist.

Der Satz VIII stellt jedoch keine ausschliefsliche Eigenschaft der Functionen $T(\xi)$ dar, für die $J(T) = 0$ ist.

Ist für die Menge T im Intervall $\alpha \cdots \beta$ überall $J(T) > 0$, so kann es immer noch Punkte von T geben, in denen eine Ableitung

1) Ein Beispiel dieser Art liefern die Werte

$$\delta_N = \tfrac{1}{2}\tau_N, \quad \tau_{N0} = \frac{\mu_\nu}{2}\tau_N, \quad \tau_{N1} = \frac{1-\mu_\nu}{2}\tau_N,$$

$$\varphi_N = 2\mu_\nu - 1 = \varphi_\nu, \quad f_N = -f_\nu = \tfrac{1}{2}(1+\varphi_\nu)\varrho_\nu - 1,$$

so dafs $\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_\nu$ gegen Null convergirt.

unendlich wird, und diese können sogar auch überall dicht in Bezug auf T liegen[1]). Die Werte der Ableitungen können aber auch in allen Punkten von T endlich bleiben[2]). Auf ein Beispiel dieser Art ist bereits von Scheeffer[3]) hingewiesen worden. Man sieht leicht, dafs die Gröfsen λ_N^0 und λ_N' (S. 95) mit wachsendem ν gegen Null convergiren müssen, doch ist diese Bedingung allein noch nicht hinreichend. Man kann die Menge T insbesondere so wählen, dafs die vorderen Ableitungen in den Punkten von T_r und die hinteren Ableitungen in den Punkten von T_l den Wert 1 erhalten, was zu einer interessanten Folgerung führt. Fafst man nämlich jetzt eine beliebige Function $T(\xi)$ ins Auge, die aus irgend einer stetigen Function $F(x)$ mittelst der Menge D durch Einschaltung der bezüglichen Intervalle abgeleitet ist (S. 167), so stimmen die Ableitungen von $F(x)$ in den Punkten von X mit denen von $T(\xi)$ in den Punkten von T_l resp. T_r überein, und dies ist augenscheinlich ganz unabhängig von den absoluten Längen der Intervalle δ. Die hierzu notwendige Bedingung lautet vielmehr, dafs für jedes Teilintervall $\tau - d = \sigma$ ist, wo $d = \Sigma\delta$ ist, und diese ist bei der bezüglichen Einschaltungsart immer erfüllt. Doch mag es mit diesen Andeutungen hier genügen.

Nur eine Frage allgemeiner Art soll hier noch gestreift werden. Man kann fragen, wie die Umkehrung des Satzes VIII lautet, unter welchen Bedingungen man also schliefsen kann, dafs T unausgedehnt ist. Wir sahen soeben, dafs auch, wenn $J(T) > 0$ ist, die Ableitungen an einer bezüglich T überall dichten Teilmenge T_1 unendlich sein können. Hieraus folgt nun aber nach dem Satz von Brodén, dafs $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{c}$ ist; diese Eigenschaft ist also nicht hinreichend, damit T unausgedehnt ist. Soweit meine Untersuchungen reichen, wird man diesen Schlufs machen können, wenn es Teilmengen T_1 der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ giebt, in deren Punkten sowohl eine vordere wie eine hintere Ableitung unendlich ist; ich bin aber nicht im stande zu beweisen, dafs dies für jede Function $T(x)$ zutrifft, für die $J(T) = 0$ ist, obwohl dieser Satz sehr wahrscheinlich ist.

9. Der Begriff der streckenweise constanten Function läfst sich auf mehrere Variable übertragen, da auch für sie die Beziehungen zwischen der überall dichten Bereichmenge $D = \{\delta\}$ und der zu-

1) Ein einfaches Beispiel dieser Art liefern die Werte

$$\lambda_N = \frac{1}{\nu}, \quad e_N = \frac{1}{2}, \quad \varphi_N = \frac{1}{2};$$

sie bewirken, dafs in allen Punkten von T_r eine vordere Ableitung unendlich grofs ist.

2) Dies tritt z. B. für $\lambda_N = \frac{1}{\nu^2}$, $f_N = \varphi_N = 0$ ein.

3) Vgl. Acta math. 5, S. 291.

gehörigen perfecten Menge in ähnlicher Weise vorhanden sind wie im linearen Gebiet. Auch hier gilt, dafs eine Function, die auf δ' und δ'' constant ist, immer auch auf $\delta' + \delta''$ constant ist, falls die Grenzen von δ' und δ'' irgend einen gemeinsamen Punkt besitzen, und dafs daher für eine bereichweise constante stetige Function $T(\xi, \eta)$ nur solche Mengen $D = \{\delta\}$ in Frage kommen, die wieder eine perfecte Menge T bestimmen[1]). Es hat keinerlei Schwierigkeit, die Construction einer solchen Function $T(\xi, \eta)$ an der Hand der oben (S. 81) gegebenen Analyse der ebenen perfecten Mengen wirklich vorzunehmen.

10. Sei Q eine abgeschlossene Menge, die zu der Intervallmenge $D = \{\delta\}$ gehört, und $F(x, Q)$ eine für Q definirte Function von x, die in Q stetig ist. Definirt man nun die Function $F_1(x)$ so, dafs sie in jedem Punkt von Q mit $F(x, Q)$ übereinstimmt und längs jedes Intervalles δ linear verläuft, so ist $F_1(x)$ eine streckenweise lineare und stetige Function der continuirlichen Variablen x. Umgekehrt ist auch klar, dafs jede streckenweise lineare Function, deren Intervallmenge $D = \{\delta\}$ eine Menge Q bestimmt, eine in Q stetige Function darstellt; so liefert z. B. auch jede Function $T(\xi)$ eine in T stetige Function $F(x, T)$. Die in Q stetigen Functionen sind also mit den streckenweise linearen Functionen identisch, und die Resultate, die für die eine Gattung gelten, finden auf die andere sinngemäfse Anwendung. Die Menge Q braucht hier übrigens nicht perfect zu sein, sie kann sogar auch endlich sein.

Wir fragen nun insbesondere, ob es streckenweise lineare Functionen $L(\xi)$ geben kann, die in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzen. Ist dann zunächst Q abzählbar, so zeigt man leicht, dafs $L(\xi)$ selbst linear ist. Wenn nämlich $L(\xi)$ für $\delta' = \xi_1 \cdots \xi_2$ und $\delta'' = \xi_2 \cdots \xi_3$ linear ist, und in ξ_2 vordere und hintere Ableitung einander gleich sind, so ist $L(\xi)$ auf $\delta' + \delta''$ linear, und dieser Schlufs gilt auch von ν auf $\nu + 1$. Er gilt aber auch von $\{\nu\}$ auf ω. Haben nämlich die consecutiven Intervalle $\delta', \delta'', \delta''', \cdots$ resp. ihre Endpunkte $\xi_2, \xi_3, \cdots \xi_\nu, \cdots$ den Grenzpunkt ξ_ω, und ist $L_1(\xi)$ diejenige lineare Function, die auf δ mit $L(\xi)$ übereinstimmt, so hat man

$$L(\xi_1) = L_1(\xi_1),\ L(\xi_2) = L_1(\xi_2), \cdots L(\xi_\nu) = L_1(\xi_\nu), \cdots,$$

und daraus folgt wegen der Stetigkeit von $L(\xi)$, dafs auch

$$L(\xi_\omega) = L_1(\xi_\omega)$$

sein mufs. Wenn sich nun an ξ_ω das Intervall $\delta_\omega = \xi_\omega \cdots \xi_{\omega+1}$ anschliefst, so ist die Function einerseits auf $\xi_1 \cdots \xi_\omega$, andererseits auf $\xi_\omega \cdots \xi_{\omega+1}$ linear, und die Existenz einer bestimmten Ableitung in ξ_ω bewirkt wieder, dafs $L(\xi)$ auch auf $\xi_1 \cdots \xi_{\omega+1}$ linear ist u. s. w.

---

1) Übrigens brauchen nicht je zwei Bereiche getrennt zu sein (S. 85).

Die vorstehende Thatsache wurde in ihrem ersten Teil von Heine[1]) geltend gemacht, in ihrem zweiten von Cantor[2]), und wurde von ihnen für die Zwecke der trigonometrischen Reihen abgeleitet[3]). Es folgt also:

IX. Ist eine stetige Function auf jedem Intervall einer Menge $D=\{\delta\}$ linear, so ist sie eine lineare Function, falls sie in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzt, und die Menge D eine abzählbare Menge Q bestimmt.

Streckenweise lineare Functionen, die in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzen, können also nur so existiren, dafs Q eine perfecte Menge T ist. Es fragt sich, ob dies auch wirklich der Fall sein kann. Diese Frage ist zu bejahen, wie unmittelbar daraus hervorgeht, dafs das Integral einer jeden streckenweise constanten stetigen Function $T(\xi)$ eine solche Function liefern mufs[4]). Man kann aber die Existenz solcher Functionen auch unabhängig vom Integralbegriff und seinen Eigenschaften nachweisen, und es scheint mir nützlich, dies für einen einfachen typischen Fall hier auszuführen.

Dazu gehe man von einer im Intervall $a \cdots b$ monotonen differenzirbaren Function $f(x)$ aus, und es sei auch ihre Ableitung $f'(x)$ monoton und stetig, und nirgends constant. Nun werde auf $a \cdots b$ eine überall dichte Punktmenge $\{x\}$ angenommen, so kann man sich vorstellen, dafs für jeden einzelnen dieser Werte x der Zusammenhang der Curve gelöst und ein geradliniges Stück eingefügt wird, das die Richtung der Curventangente hat; dann wird die Aufgabe gelöst sein. Dieser Idee läfst sich in folgender Weise eine präcise Darstellung geben. Sei T eine im Intervall $\alpha \cdots \alpha_1$ gelegene überall ausgedehnte perfecte Menge und $D=\{\delta_N\}$ ihre Intervallmenge. Ein beliebiges Intervall $\delta_N = \xi_N \cdots \xi_N'$ zerlegt T in zwei Teilmengen, von denen die eine in dem Intervall $\alpha \cdots \xi_N$ enthalten ist. Diese bezeichnen wir durch T_N. Es ist dann der Voraussetzung nach auch T_N eine ausgedehnte Menge; und es möge $\Sigma_N(\delta)$ die Summe derjenigen Intervalle δ bedeuten, die zur Menge T_N gehören, so dafs

$$J(T_N) = \xi_N - \alpha - \Sigma_N(\delta)$$

ist. Nun ordne man wieder jedem Intervall δ_N einen Punkt x_N innerhalb $a \cdots a_1$ so zu, dafs

$$x_N - a = J(T_N) = \xi_N - \alpha - \Sigma_N(\delta)$$

gesetzt wird; dann ist die Menge $X=\{x_N\}$, wie man leicht sieht,

1) Journ. f. Math. 71, S. 359.
2) Math. Ann. 5, S. 131. Vgl. auch Hölder, Math. Ann. 24, S. 194.
3) Vgl. auch noch Cap. 7.
4) So verfährt z. B. Gravé, vgl. Anm. 3 auf S. 167.

überall dicht, und es ist dadurch wiederum jedem Punkt von T_g ein Punkt von X_g zugeordnet.

Um nun noch die Wertbestimmung von $\eta = L(\xi)$ auszuführen, denken wir uns auf der η-Axe im Intervall $\beta \cdots \beta_1$ eine perfecte Menge S, die zu einer Intervallmenge $E = \{\varepsilon_N\}$ gehört, und zwar so, dafs

$$\varepsilon_N = \delta_N f'(x_N) = \delta_N \operatorname{tg} \alpha_N$$

ist, und es sei S_N diejenige Teilmenge, die T_N entspricht. Alsdann mögen die Werte von $\eta = L(\xi)$ durch die Gleichungen

$$\eta_N - \beta = y_N + \Sigma_N(\varepsilon),$$
$$\eta'_N - \beta = y_N + \Sigma_N(\varepsilon) + \varepsilon_N$$

gegeben sein, während $L(\xi)$ von η_N bis η'_N linear zunimmt, so ist damit $L(\xi)$ eine Function der verlangten Beschaffenheit. Sie ist, wie unmittelbar ersichtlich ist, eine stetige Function und hat auch überall eine eigentliche Ableitung. Es mag genügen, dies für einen Punkt ξ_g von T_g nachzuweisen. Man hat dann

$$\frac{\eta' - \eta_g}{\xi' - \xi_g} = \frac{y' - y_g + \Sigma'(\varepsilon)}{x' - x_g + \Sigma'(\delta)},$$

wo $\Sigma'(\varepsilon)$ und $\Sigma'(\delta)$ die Intervallsummen bedeuten, die zwischen ξ_g und ξ', resp. zwischen η_g und η' liegen. Wenn nun ξ' gegen ξ_g convergirt, so convergirt auch x' gegen x_g, und auf Grund der obigen Gleichungen convergiren daher

$$\frac{y' - y_g}{x' - x_g} \quad \text{und} \quad \frac{\Sigma'(\varepsilon)}{\Sigma'(\delta)}$$

gemeinsam gegen $f'(x_g)$. Damit ist die Behauptung erwiesen. Ebenso folgt sie für die Werte ξ_N und ξ'_N. Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

X. Hat die Function $f(x)$ eine stetige Ableitung $f'(x)$, so kann man streckenweise lineare Functionen so bilden, dafs sie überall eine Ableitung besitzen und die Werte ihrer Ableitungen in den Punkten von T mit denjenigen von $f'(x)$ übereinstimmen.

Die für den Beweis gemachte Annahme, dafs $f'(x)$ monoton sein sollte, ist nämlich für den Satz nicht wesentlich. Wird $f'(x)$ zunächst als überall endlich angenommen, so kann man sie durch Addition einer geeigneten Linearfunction in eine monotone Function verwandeln, dazu $L(\xi)$ bestimmen, und dann die bezügliche Linearfunction wieder subtrahiren. Ist $f'(x)$ nicht überall endlich, so zerfällt doch das Intervall $a \cdots b$ in Teilintervalle, für die die Betrachtung gilt, und man gelangt ebenfalls zum Ziel; die Zahl der Intervalle könnte sogar unendlich sein. Dagegen haftet der vor-

stehenden Methode eine Beschränkung anderer Art an; sie setzt T resp. jede Teilmenge T_N als ausgedehnt voraus, während der Integralbegriff aus jeder beliebigen Function $T(\xi)$ eine Function $L(\xi)$ hervorgehen läfst. Inwieweit hier ein tieferer Unterschied zwischen beiden Functionsarten zu Grunde liegen mag, vermag ich nicht zu beurteilen[1]).

Da der Begriff der Ableitung auch für Functionen definirbar ist, die nur für nirgends dichte abgeschlossene oder perfecte Mengen existiren, so führen die vorstehenden Resultate unmittelbar zu Sätzen und Eigenschaften für Functionen $F(x, Q)$ resp. $F(x, T)$ und ihre Ableitungen.

Fünftes Capitel.

Das bestimmte Integral.

Auf die Sätze der Integralrechnung ist die Theorie der Punktmengen von wesentlichem Einflufs gewesen; haben doch die Bemühungen, den Begriff des bestimmten Integrals festzulegen und entscheidende Kriterien für die Integrirbarkeit einer Function zu finden, ganz besonders zur Ausgestaltung der Theorie der Punktmengen beigetragen. Auch hier ist bekanntlich Riemann als derjenige zu nennen, an den die moderne Entwicklung angeknüpft hat. In directem Anschlufs an ihn hat Hankel als erster den Versuch unternommen, diesen Dingen methodisch gerecht zu werden, doch erscheint erst bei Harnack und Volterra die Abhängigkeit der Integrirbarkeit von den Unstetigkeitspunkten in der Gestalt, die an den Inhalt der Punktmengen anknüpft (1). Dafs der Wert einer Function $f(x)$ in einzelnen und sogar unendlich vielen Punkten abgeändert werden kann, ohne dafs das Integral sich ändert, hat eingehender wohl zuerst Dini in Betracht gezogen; die Erkenntnis, wie dies in allgemeinster Weise möglich ist, geht aber wieder erst auf Harnack zurück. Am deutlichsten wird übrigens die Darstellung dieser Verhältnisse, falls man von der Function $f(x)$ zu der zugehörigen möglichst stetigen Function $\varphi(x)$ übergeht. Nur die Stetigkeitspunkte von $f(x)$ sind es, die den Wert des Integrals beeinflussen, während man an den Unstetigkeitspunkten von $\varphi(x)$ der Function irgend einen Wert des zugehörigen Unstetigkeitsintervalls beilegen darf. Die Auffassung, von vorn herein $\varphi(x)$ an den Unstetigkeitspunkten als nicht einwertig anzunehmen, erscheint gerade für die Zwecke der Integralrechnung als besonders vorteilhaft.

Falls die Function $f(x)$ im Intervall $a \ldots b$ nicht mehr innerhalb endlicher Schranken bleibt, sei es, dafs sie in einem Punkte ξ

---

1) Man kann auch die Formeln von S. 168 zur Bildung der Functionen $L(\xi)$ benutzen.

bestimmt unendlich ist, oder auch nur bei Annäherung an ihn unbegrenzt wächst, so versagt unsere Definition des bestimmten Integrals. Es kann aber bekanntlich möglich sein, auch in diesem Fall einen endlichen Grenzwert als Wert des Integrals zu definiren, und zwar kann das Integral nach einer von P. du Bois-Reymond herrührenden Unterscheidung unbedingt oder bedingt convergent sein. Ob ein derartiger endlicher Grenzwert existirt oder nicht, hängt in erster Linie davon ab, von welcher Ordnung die Function $f(x)$ in einem Punkte ξ unendlich wird. Dies zu erörtern, liegt aufserhalb des Rahmens dieses Berichts; hier soll vielmehr nur die principiellere Frage behandelt werden, wie die Menge $K_\infty = \{\xi\}$ der Unendlichkeitspunkte beschaffen sein darf, damit sich ein Integral überhaupt definiren läfst. Den Fall, dafs die Menge $\{\xi\}$ endlich ist, hat bereits Cauchy erledigt. Du Bois und bald nach ihm Dini sind wohl die ersten gewesen, die unendliche Mengen K_∞ ins Auge fafsten; beide beschränkten sich aber noch auf Mengen erster Gattung (3). Die allgemeinste Ausdehnung dieses uneigentlichen Integralbegriffs ist erst in neuester Zeit von A. Harnack und später von de la Vallée Poussin gegeben worden (4). Beide treffen von vorn herein die Festsetzung, dafs die Menge K_∞ unausgedehnt sein soll; doch ist zu bemerken, dafs sich diese Voraussetzung aus der Definition de la Vallée Poussin's als Folgerung ableiten läfst, so dafs diese Definition als die logisch beste aufzufassen ist (5). Für bedingt convergente Integrale hat sich übrigens de la Vallée Poussin auf abzählbare Mengen K_∞ beschränkt, während eine solche Unterscheidung bei Harnack nicht auftritt und auch nicht durch die Sache geboten ist (6). Freilich hat man in neuerer Zeit angefangen, den bedingt convergenten Integralen die Existenzberechtigung ganz und gar abzusprechen. Von den allgemeinen Integraleigenschaften bleiben nämlich für sie noch weniger in Kraft, als für die unbedingt convergenten, insbesondere schwindet aber für sie eine Eigenschaft, die man als grundlegend betrachten mufs (12).

Die vorstehenden Thatsachen haben ihr Analogon in der Theorie des Doppelintegrals und der mehrfachen Integrale (8), ohne hier neue Betrachtungen principieller Art zu bedingen; ruhen sie doch sämtlich auf Begriffen und Methoden, die für das ebene und räumliche Gebiet ebenso in Geltung sind, wie für das lineare. Gerade die Theorie des Doppelintegrals ist in den letzten Jahrzehnten von den verschiedensten Seiten eingehend behandelt worden; sie hat sich allmählich dem Einflufs der Theorie der Punktmengen unterziehen müssen, ohne sich doch bisher ganz auf den Boden dieser Theorie zu stellen. Der Grund kann nur der sein, dafs eine Analyse der ebenen abgeschlossenen Mengen bisher gefehlt hat, und ich hoffe durch diesen Bericht zu zeigen, dafs diese Analyse in der That die naturgemäfse Grundlage für die Theorie des Doppelintegrals darstellt.

Auch die im ebenen Gebiet neu auftretende Frage nach der Ersetzbarkeit des Doppelintegrals durch ein zweimaliges und umgekehrt erhält durch die allgemeinen Sätze über Punktmengen eine einfache Antwort (9), zumal wenn man überdies durchgehends von der Function $f(x, y)$ zu der zugehörigen möglichst stetigen Function $\varphi(x, y)$ übergeht. Einen besonderen Vorteil hat mir die Einführung von $\varphi(x, y)$ in der Theorie der uneigentlichen Doppelintegrale geliefert, wo sie den Satz von der Ersetzbarkeit des Doppelintegrals durch zweimalige Integrale auf fast elementarem Wege liefert. Auch hier ist es wieder die Definition de la Vallée Poussin's, die sich für die einschlägige Theorie als die am meisten naturgemäſse erweist.

Eine eingehende Behandlung hat das Doppelintegral noch ganz kürzlich in dem Lehrbuch von Stolz gefunden. Gegen den von Stolz gewählten Entwickelungsgang habe ich jedoch Bedenken, die ich nicht zurückhalten möchte. Seine Betrachtungen machen das Dreieck und Viereck oder gar das Vieleck zur Grundlage der Inhaltsbehandlung[1]). Aber wohin würden wir geraten, wenn wir diesen Weg auch im Raum und in höheren Mannigfaltigkeiten einschlagen würden? Die natürliche Basis des Inhaltsbegriffes ist meines Erachtens in der Ebene das Parallelogramm, im Raum das Parallelepipedon, sei es nun schiefwinklig oder rechtwinklig, und ich halte es für eine natürliche Aufgabe, jeden Inhalt so auf Summen solcher Elementarbestandteile zurückzuführen, daſs diese Summen nicht nur formale Bedeutung haben, sondern zur Grundlage der Entwickelungen gemacht werden können. Dies habe ich bei der Analyse der ebenen und räumlichen Mengen angestrebt, und diesem Umstand wäre es zu danken, wenn es mir dadurch gelungen wäre, den einfachen geometrischen Vorstellungen wieder zu ihrem natürlichen Recht zu verhelfen.

1. Die neueren Formulirungen des Integralbegriffs gehen bekanntlich davon aus, zunächst die beiden verschieden definirten und immer vorhandenen Grenzwerte ins Auge zu fassen, die das Analogon des äuſseren und inneren Inhalts bei Punktmengen bilden. Ist $f(x)$ eine im Intervall $a \dots b$ endliche[2]) Function, und wird das Intervall $a \dots b = \tau$ in die Teilintervalle

$$\tau_0 = x_1 - a, \quad \tau_1 = x_2 - x_1, \dots, \quad \tau_\nu = b - x_\nu$$

zerlegt, so convergiren die Summen

$$G = (x_1 - a) g_0 + (x_2 - x_1) g_1 + \dots + (b - x_\nu) g_\nu$$

1) „Die wahren Elemente einer Fläche sind die Dreiecke." Grundzüge III, S. 40.

2) Dies bedeutet, daſs $|f(x)|$ unterhalb einer angebbaren Zahl bleibt. Die Franzosen nennen nach C. Jordan die Function fonction bornée. Es scheint mir das natürlichste, dem Wort „endlich" ebenfalls diese Bedeutung zu geben, was sachlich und sprachlich zulässig ist.

und

$$L = (x_1 - a)\,l_0 + (x_2 - x_1)\,l_1 + \cdots + (b - x_\nu)\,l_\nu,$$

wo g_i die obere und l_i die untere Grenze von $f(x)$ auf τ_i ist, für $\lim \nu = \infty$ und $\lim \tau_i = 0$ gegen zwei feste Grenzwerte, die als oberes und unteres Integral bezeichnet werden[1]). Sind sie einander gleich, so ist ihr gemeinsamer Wert J das bestimmte Integral von $f(x)$, und es heifst $f(x)$ integrirbar auf $a \dots b$. Hieraus folgt sofort die Integrirbarkeitsbedingung von $f(x)$ in der Form, die auf Riemann zurückgeht; nach ihr ist die Function $f(x)$ im Intervall $a \dots b$ immer und nur dann integrirbar, falls bei Teilung des Intervalls in eine endliche Zahl von Teilen τ_i die Summe derjenigen Teile, in denen die Schwankung $\varDelta_i = g_i - l_i$ oberhalb einer gegebenen Grenze σ liegt, beliebig klein gemacht werden kann. Es folgt hieraus zunächst, dafs jede auf $a \dots b$ stetige Function integrirbar ist, und dafs andererseits eine auf $a \dots b$ total unstetige Function nicht integrirbar sein kann. Es bedürfen daher nur die punktweise unstetigen Functionen einer näheren Untersuchung. Aber auch für sie führt die Riemann'sche Bedingung einfach zu dem bezüglichen Resultat, nämlich zu dem folgenden:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrirbarkeit der endlichen Function $f(x)$ im Intervall $a \dots b$ besteht darin, dafs für jedes k die Stellen, deren Unstetigkeitsgrad $\omega \geqq k$ ist, eine unausgedehnte Menge K bilden.

Der Beweis dieses Satzes beruht im wesentlichen auf der Thatsache, dafs ein Intervall τ, das einschliefslich der Endpunkte von Punkten $\omega \geqq k$ frei ist, in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegt werden kann, in denen die Schwankung $\varDelta$ der Function unterhalb k liegt[2]). Ist nun K eine unausgedehnte Menge, und ist $D = \{\delta_\nu\}$ die Menge der der Gröfse nach geordneten punktfreien Intervalle, so ersetze man zunächst jedes Intervall δ_i durch ein ganz in seinem Innern liegendes Intervall δ_i', das δ_i beliebig nahe kommt. Alsdann kann man eine endliche Anzahl $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_\nu$ dieser Intervalle so bestimmen, dafs

$$\tau - \sum_1^\nu \delta_i' < \varepsilon$$

---

1) Diese Formulirung erscheint zuerst bei Darboux (Ann. de l'Ec. Norm. (2) Bd. 4, S. 79), vgl. auch St. Smith, Proc. of the Lond. math. Soc. 6, S. 152 (1875), sowie Ascoli, Mem. dell' Acad. dei Lincei (2) II, S. 863 (1875).

2) Dieser für die vorliegenden Anwendungen wichtige Satz kann als unmittelbare Folge des Heine-Borel'schen Theorems von S. 51 betrachtet werden, da ja jedem Punkt auf $a \dots b$ ein endliches Intervall entspricht, in dem $\varDelta < k$ ist.

ist, wo ε beliebig gegeben ist. Diese Intervalle lassen sich nun wieder dem obigen Satz gemäſs in eine endliche Zahl von Intervallen teilen, in denen $\Delta < k$ ist. Durch Tilgung der Intervalle δ_i' bleibt alsdann auf τ eine endliche Anzahl von Intervallen δ_i'' übrig, in denen $\Delta \geqq k$ ausfallen kann, und deren Summe ist kleiner als ε. Damit ist bewiesen, daſs die Bedingung hinreichend ist. Daſs sie notwendig ist, ist ohne weiteres klar[1]).

Der vorstehende Satz ist seinem wesentlichen Inhalt nach schon lange bekannt und in den einschlägigen Darstellungen verschiedentlich zu finden[2]). In der vorstehenden Form, die den Inhaltsbegriff benutzt, findet er sich zuerst bei Harnack[3]) und Volterra[4]). Wie oben erwähnt, hatte ihn auch Hankel[5]) zu erreichen gesucht, jedoch vergeblich; er glaubte beweisen zu können, daſs jede punktweise unstetige Function integrirbar sei[6]).

2. Aus dem vorstehenden Satz flieſst eine Reihe wichtiger Folgerungen.

1) Sei zunächst $\psi(x)$ eine auf $a \ldots b$ integrirbare Function, die an allen Stetigkeitspunkten den Wert Null hat, so folgt zunächst, daſs ihr unteres Integral gleich Null ist, und damit auch das Integral selbst.

2) Ist $f(x)$ eine beliebige punktweise unstetige und integrirbare Function, so setzen wir wieder

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

wo $\varphi(x)$ die zu $f(x)$ gehörige möglichst stetige Function ist (S. 134). Alsdann ist, wie a. a. O. bewiesen, $k_\varphi \leqq k$ und $k_\psi \leqq k$, und es sind daher $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ebenfalls integrirbar. Nun ist, wie eben erwähnt, das Integral von $\psi(x)$ gleich Null, also folgt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx; \quad \text{d. h.}$$

II. Das Integral einer integrirbaren Function $f(x)$ ist

1) Man sieht, daſs hier nur derjenige Inhaltsbegriff in Frage kommt, der mit einer endlichen Anzahl von Teilintervallen operirt und die Grenzpunkte einer Menge ihr hinzurechnet. Vgl. die Ausführungen auf S. 88.

2) Für die bezügliche Litteratur verweise ich auf Dini, Grundlagen, S. 330, Anm.

3) Die Elemente etc., S. 262; vgl. auch Math. Ann. 19, S. 242.

4) Giorn. di mat. 19, S. 333.

5) Math. Ann. 20, S. 87.

6) Die meisten bislang bekannten Beispiele unstetiger integrirbarer Functionen sind solche, bei denen jede Menge K der Punkte $\omega \geqq k$ endlich ist. Man vgl. z. B. Dini, Grundlagen etc., S. 344, Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 333, Darboux, Ann. de l'Ec. norm. (2) Bd. 4, S. 92 ff. Dini bemerkt auch, daſs die Unstetigkeiten belanglos sind, wenn sie eine Menge erster Gattung bilden (a. a O. S. 332 u. 338).

gleich dem Integral der zu ihr gehörigen möglichst stetigen Function $\varphi(x)$.

Die in diesem Satz ausgesprochene evidente Thatsache ist jedoch nicht der eigentliche Zielpunkt des Satzes. Es steht nun aber nichts im Wege, die Function $\varphi(x)$ wieder so aufzufassen (S. 134), dafs sie an einer Unstetigkeitsstelle x' mehrwertig oder unendlich vieldeutig ist, indem man ihr dort irgend einen Wert der Unstetigkeitsstrecke $\varkappa'$ beilegt, und es scheint mir nützlich, von vornherein diese Auffassung einzuführen. Einerseits ist es ja für den Integralwert gleichgiltig, welchen dieser möglichen Werte wir der Function $\varphi(x)$ beilegen, andererseits besitzt aber diese Festsetzung für verschiedene Betrachtungen einen gewissen formalen Vorzug. Der Sache nach ist sie auch bereits bei anderen Autoren da zu finden, wo sie sich als eine naturnotwendige Festsetzung von selbst eingestellt hat; ich verweise hierfür z. B. auf du Bois[1]), Hölder[2]) und Arzelà[3]).

3) Die erste der obigen Folgerungen läfst sich umkehren. Wenn nämlich für jedes x im Intervall $a \ldots b$

$$\int_a^x f(x)\,dx = 0$$

ist, so ist, wenn x_1 und x_2 beliebige Punkte des Intervalls sind, auch

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 0.$$

Hieraus folgt nun, dafs $\varphi(x) = 0$ ist für jedes x, wo wieder $\varphi(x)$ die zu $f(x)$ gehörige möglichst stetige Function ist. Denn wäre in einem Stetigkeitspunkt x' etwa $\varphi(x') > 0$, so gäbe es auch ein x' umgebendes Intervall $x_1 \ldots x_2$, so dafs in ihm $\varphi(x) > 0$ wäre, was der obigen Gleichung widerspricht. Es ist also $f(x)$ eine Nullfunction. Nennen wir noch eine Function $f(x)$, wie die eben betrachtete, eine Function vom Integral Null oder eine integrirbare Nullfunction, und beachten, dafs die Function $f(x)$ diese Eigenschaft behält, wenn man ihre Werte an den Unstetigkeitspunkten durch die entgegengesetzten ersetzt, so folgt:

III. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Function $f(x)$ auf $a \ldots b$ ein überall verschwindendes Integral besitzt, besteht darin, dafs die Punkte,

---

1) z. B. Journ. f. Math. 94, S. 278/279.
2) Math. Ann. 24, S. 186.
3) Mem. dell' Acc. di Bologna (5) Bd. 2, S. 133.

an denen $|f(x)| \geqq k$ ist, für jedes k eine Menge vom Inhalt Null bilden[1]).

Auf die Bedeutung dieser Functionen für das bestimmte Integral hat zuerst Dini und nach ihm Harnack hingewiesen[2]). Bei ihnen findet sich auch bereits die weitere Folgerung, dafs zwei Functionen, die auf $a \ldots b$ dasselbe Integral liefern, sich nur um eine integrirbare Nullfunction unterscheiden können, und umgekehrt[3]). Dies gilt übrigens auch für das obere und untere Integral, da es eine allgemeine Eigenschaft eines aus Summanden bestehenden Grenzwerts ist, unabhängig davon, was dieser Grenzwert bedeutet[4]).

4) Aus dem Satz I fliefsen auch einige speciellere Sätze, die ich anführen will[5]), und zwar die folgenden:

IV. Eine Function $f(x)$, die in einem Intervall $a \ldots b$ nur gewöhnliche Unstetigkeiten oder Unstetigkeiten zweiter Art nur links oder rechts besitzt, ist integrirbar.

V. Wenn im Intervall $a \ldots b$ die Stellen, an denen die vordere (oder hintere) Schwingung von $f(x)$ oberhalb k liegt, eine unausgedehnte Menge bilden, so ist die Function integrirbar.

Der erste Satz stammt von Dini[6]) und ist eine Folge der Formel

$$K = R + S,$$

wo S perfect ist. Eine perfecte Menge enthält nämlich sowohl linke als rechte Grenzpunkte, es mufs daher im vorliegenden Fall $S = 0$ sein, woraus folgt, dafs die Menge K für jedes k abzählbar ist und daher den Inhalt Null hat. Ein specieller Fall von ihm besagt, dafs $f(x)$ integrirbar ist, falls überall ein vorderer (oder hinterer) Grenzwert existirt. Der zweite Satz findet sich bei Pasch[7]); er ist

1) Vgl. Ascoli, Ann. di mat. (2) 7, S. 261, und Pasch, Math. Ann. 30, S. 151. Ein Satz von du Bois besagt, dafs wenn $f(x)$ eine Function vom Integral Null ist, auch $g(x)f(x)$ es ist, wenn $g(x)$ überall endlich und das Product integrirbar ist. In der That bilden die Stetigkeitspunkte von $f(x)g(x)$ eine Teilmenge derjenigen von $f(x)$, und da in ihnen $f(x) = 0$ ist, so ist es auch das Product. Vgl. Math. Ann. 15, S. 302.

2) Beispiele solcher Functionen finden sich auch früher schon; vgl. z. B. Thomae, Einleitung, S. 14 ff.

3) Die oben (S. 141 Anm.) erwähnte, von Volterra eingeführte Function der Sprünge ist von ihm ursprünglich für die Zwecke der Integralrechnung construirt worden. Mit ihrer Hilfe nimmt der obige Satz den Ausdruck an, dafs $f(x)$ und ihre Function der Sprünge auf $a \ldots b$ zugleich integrirbar oder nicht integrirbar sind. Vgl. Giorn. di mat. 19, S. 82.

4) Vgl. hierzu auch Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 333 ff. (1881).

5) Ich erwähne, dafs auch Summe und Product integrirbarer Functionen integrirbar sind. Einen allgemeineren Satz dieser Art gab du Bois, Math. Ann. 16, S. 112 u. 20, S. 122.

6) Grundlagen etc. § 187, 4.

7) Vgl. Math. Ann. 30, S. 148 (1887).

eine unmittelbare Folge des obigen Hauptsatzes. Ist nämlich für einen Punkt x die vordere oder hintere Schwingung gröfser als k, so ist für ihn sicher auch $\omega > k$; die Menge dieser Punkte x ist daher nur eine Teilmenge von K.

3. Wenn die Function $f(x)$ in einem Punkt ξ bestimmt unendlich ist oder doch bei Annäherung an ihn über alle Grenzen wächst, so soll er als ein Unendlichkeitspunkt oder als Unstetigkeitspunkt $\omega = \infty$ bezeichnet werden. Da jeder Grenzpunkt von Punkten $\omega = \infty$ selbst ein solcher Punkt ist, so haben wir zunächst den Satz:

VI. Die Unstetigkeitspunkte $\omega = \infty$ einer Function $f(x)$ bilden in jedem Intervall eine abgeschlossene Menge.

Der Inhalt der von Cauchy stammenden Formulirung, die den Integralbegriff auf Functionen $f(x)$ mit Punkten $\omega = \infty$ auszudehnen gestattet, ist der folgende. Es sei $f(x)$ innerhalb des Intervalls $a \ldots b = \delta$ überall endlich und integrirbar, während die Punkte a oder b oder auch beide Unendlichkeitspunkte sind, und man setze zur Abkürzung

$$\int_{x'}^{x_1'} f(x)\,dx = J(x', x_1') = J(\delta'), \tag{1}$$

wo δ' das Intervall $x' \ldots x_1'$ bedeutet; ferner sei

$$\delta', \delta'', \ldots \delta^{(\lambda)}, \ldots \tag{2}$$

eine Fundamentalreihe von Intervallen, die von innen gegen δ convergiren. Falls dann die Integrale

$$J(\delta'), J(\delta''), \ldots J(\delta^{(\lambda)}), \ldots \tag{3}$$

für jede Reihe (2) eine und dieselbe Fundamentalreihe bilden, so definirt man den durch sie dargestellten Grenzwert $J(\delta)$ als uneigentliches Integral und setzt

$$J(\delta) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Ferner bezeichnet man nach du Bois das Integral als absolut convergent, falls auch die Function $|f(x)|$ ein uneigentliches Integral besitzt, hingegen als bedingt convergent, falls dies nicht der Fall ist[1]).

Wir nehmen nun an, dafs auch innerhalb des Intervalles $a \ldots b$

1) Journ. f. Math. 69, S. 73, Anm. Die singulären Integrale Cauchy's bleiben hier aufser Betracht. Auch beschränke ich mich im folgenden durchweg auf endliche Intervalle $a \ldots b$. Über die Ausdehnung auf unendliche Intervalle vgl. besonders de la Vallée Poussin, Journ. de math. (4) Bd. 8, S. 401.

Punkte $\omega = \infty$ enthalten sind, und fragen, welcher Art die von ihnen gebildete Menge K_∞ sein darf, damit von einem bestimmten Integral noch die Rede sein kann. Dies soll nach zwei verschiedenen Methoden untersucht werden; ich erwähne sie beide, da die ihnen entsprechenden Integralbegriffe nicht durchweg die gleichen Eigenschaften besitzen (S. 213).

Man kann zunächst so vorgehen, dafs man die obige Definition allmählich auf Mengen höherer Art ausdehnt; zunächst so, dafs innerhalb $a \ldots b$ noch ein weiterer Punkt $\omega = \infty$ liegt. Teilt er das Intervall δ in δ_1 und δ_2, und existiren die Integrale $J(\delta_1)$ und $J(\delta_2)$, so existirt auch ihre Summe, und wir definiren

$$J(\delta) = J(\delta_1) + J(\delta_2).$$

Dieser Definition gemäfs ist der Wert $J(\delta)$ davon unabhängig, in welcher Weise die Intervalle $\delta_1^{(\lambda)}$ gegen δ_1 resp. die Intervalle $\delta_2^{(\lambda)}$ gegen δ_2 convergiren. Sie gestattet überdies die Anwendung des Schlusses von ν auf $\nu + 1$. Sie gestattet aber auch die Anwendung des Schlusses von $\{\nu\}$ auf ω, resp. von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω. Falls nämlich zunächst die Menge K_∞ nur einen einzigen Grenzpunkt γ besitzt, so umgeben wir ihn mit einem kleinen Intervall ε_i, und es sei δ_i das Restintervall von $a \ldots b = \delta$. Dieses Intervall enthält alsdann nur eine endliche Zahl von Punkten der Menge K_∞, und es läfst sich darauf die obige Definition anwenden. Sind nun wieder

$$(5) \qquad \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots \varepsilon_\nu,\ \ldots$$

Intervalle, die gegen γ convergiren, und convergiren die Integrale[1])

$$J(\delta_1),\ J(\delta_2),\ J(\delta_3),\ \ldots J(\delta_\nu),\ \ldots$$

für alle möglichen Folgen (5) gegen einen festen Grenzwert $J_\omega(\delta)$, so definiren wir ihn als das bezügliche bestimmte Integral, so dafs

$$J_\omega(\delta) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ist. So kann man weitergehen und die Integraldefinition auf jede Menge K_∞ ausdehnen, die abzählbar ist; man erhält immer die Möglichkeit eines schliefslichen Integralwertes $J_\alpha(\delta)$. Andererseits reicht aber auch dieses Verfahren über abzählbare Mengen K_∞ nicht hinaus.

Die Möglichkeit von Integralen, bei denen die Menge K_∞ nicht endlich ist, sondern bereits Grenzpunkte erster, zweiter oder ν-ter Ordnung besitzt, dürfte zuerst du Bois[2]) in Betracht gezogen haben;

1) Natürlich ist vorauszusetzen, dafs jedes Integral $J(\delta_i)$ existirt.

2) Vgl. Journ. f. Math. 79, S. 36 u. 45 (1875).

eine präcise Darstellung, die mit dem Vorstehenden in der Sache übereinstimmt, findet sich jedoch erst im Lehrbuch Dini's. Allerdings ist auch Dini, wie er dies auch sonst vielfach thut, über Mengen erster Gattung (S. 60) nicht hinausgegangen. Übrigens gelten die getroffenen Festsetzungen sowohl für absolut convergente, wie für bedingt convergente Integrale[1]). Integraldefinitionen für den Fall, dafs K_∞ nicht abzählbar ist, haben erst Harnack und später de la Vallée Poussin gegeben. Auch C. Jordan hat ihnen in seinem Cours einen breiteren Spielraum eingeräumt.

4. Die Definition Harnack's lautet[2]):

Ist die Menge K_∞ unausgedehnt, ist $D = \{\delta_\nu\}$ die zu ihr gehörige Intervallmenge, ist $\delta_\nu' = x_\nu' \cdots x_\nu''$ ein innerhalb δ_ν gelegenes Teilintervall, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines uneigentlichen Doppelintegrals darin, dafs die Summe

$$\int_{x_1'}^{x_1''} f(x)dx + \int_{x_2'}^{x_2''} f(x)dx + \cdots + \int_{x_\nu'}^{x_\nu''} f(x)dx,$$

während unabhängig von einander jedes δ_ν' gegen δ_ν und ν gegen ∞ convergirt, einen festen endlichen Grenzwert besitzt.

Aus dieser Definition folgt, dafs auch für jedes einzelne Intervall δ_ν ein uneigentliches Integral existirt; und daraus ersieht man leicht, dafs sie die vorher gegebene, die sich auf abzählbare Mengen K_∞ bezieht, als speciellen Fall enthält. Die Definition ist überdies identisch mit der Festsetzung, dafs auch die Summe derjenigen Integrale gegen den Grenzwert convergiren soll, die nach Ausschlufs der Punkte von K_∞ durch beliebige Teilintervalle vom Gesamtintervall übrig bleiben[3]). In dieser Form findet sich die Definition bei C. Jordan, nur fehlt bei ihm die Bedingung, dafs K_∞ unausgedehnt ist, was auf einer zufälligen Unterlassung beruhen dürfte[4]).

1) Beispiele bedingt convergenter Integrale erwähnt Ascoli, Mem. dell' Acc. dei Lincei (3) 2, S. 610 ff. und Ann. di mat. (2) 6, S. 41. Vgl. auch S. 205 dieses Berichts, Anm. 1.

2) Math. Ann. 24, S. 220.

3) Man kann dies auch so ausdrücken, dafs die Beiträge, die den Umgebungen der Punkte von K_∞ entsprechen, gegen Null convergiren; vgl. Dini, Grundlagen etc. S. 413. Die Gleichwertigkeit aller dieser Bestimmungen ist eine unmittelbare Folge der Grundeigenschaften der Fundamentalreihe. Ein ausführlicher Nachweis dieses Thatbestandes ist von Stolz gegeben worden; Ber. d. Wien. Akad. Bd. 107, S. 207 (1898).

4) Vgl. cours. etc. S. 50. Dagegen ist die bezügliche Bedingung bei der Definition des uneigentlichen Doppelintegrals vorhanden und steckt in der Forderung, dafs das Integrationsgebiet E mefsbar sein soll (a. a. O. S. 76). Die Jordan'sche Definition hat auch Stolz übernommen. Die

Auf wesentlich anderer Grundlage ruht der Grenzprocefs, vermöge dessen de la Vallée Poussin[1]) das uneigentliche Integral definirt. Er setzt zunächst ebenfalls fest, dafs $J(K_\varkappa) = 0$ ist, und definirt alsdann folgendermafsen:

Bildet man aus $f(x)$ eine Function $f_1(x)$, indem man überall, wo $f(x) < -M_1$ ist, $f(x)$ durch $-M_1$ ersetzt, ebenso überall, wo $f(x) > N_1$ ist, $f(x)$ durch N_1, und hat dann die für $\lim M_\nu = \infty$ und $\lim N_\nu = \infty$ gebildete Reihe

$$(6) \qquad f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots f_\nu(x),\ \ldots$$

die Eigenschaft, dafs, wie auch M_ν und N_ν gegen ∞ convergiren, jedes $f_\nu(x)$ integrirbar ist, und die zugehörigen Integrale eine Folge bilden, so heifst $f(x)$ integrirbar.

Während also die Definition Harnack's den Grenzübergang so vornimmt, dafs die Function unverändert bleibt, während die Intervalle convergiren, so wird hier das Intervall festgehalten, während man die Function durch eine gegen sie selbst convergirende Folge ersetzt. Übrigens gelangt man auf diese Weise nur zu den unbedingt convergenten Integralen. Da nämlich M_ν und N_ν unabhängig voneinander unendlich werden dürfen, so hat auch $|f(x)|$ ein Integral.

5. Aus der Definition de la Vallée Poussin's kann die Eigenschaft von K_∞, unausgedehnt zu sein, gefolgert werden. Hierin erblicke ich einen wesentlichen Vorzug dieser Definition; man mufs auch verlangen können, dafs eine so notwendige Eigenschaft des Integralbegriffs in der Definition von selbst enthalten ist, und nicht erst einer besonderen Festsetzung bedarf. De la Vallée Poussin hat dies allerdings selbst nicht bemerkt, da auch er K_∞ von vornherein als unausgedehnt vorschreibt; bei der methodischen Wichtigkeit des Sachverhalts glaubte ich jedoch darauf hinweisen zu sollen und lasse einen kurzen Beweis hier folgen.

Die Definition besagt, dafs jedes $f_\nu(x)$ integrirbar ist, und dafs die Integrale eine Folge bilden. Wird noch

$$F_\nu(x) = f_{\nu+1}(x) - f_\nu(x)$$

gesetzt, so ist hierzu hinreichend und notwendig, dafs

$$\lim_{\nu=\infty} \int F_\nu(x)\,dx = 0$$

ist, und hieraus folgt, dafs auch das obere Integral von $F_\nu(x)$ gegen Null convergirt. Ist nun die Menge T ausgedehnt, so kann zwar

Bedingung $J(K_x) = 0$ fehlt übrigens auch in dem bezüglichen Artikel der Encykl. d. math. Wiss. II, 1, S. 138, der die Jordan'sche Definition übernommen hat.

1) Journ. de math. (4) 8, S. 427 u. 453.

jedes $f_\nu(x)$ integrirbar sein, aber das obere Integral von $F_\nu(x)$ convergirt nicht gegen Null. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, dafs $f_\nu(x)$, also auch $F_\nu(x)$ überall positiv ist, und wird das Intervall $a \ldots b = \tau$ irgendwie in Teilintervalle $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\varrho$ zerlegt, so hat die Schwankung von $F_\nu(x)$ in jedem Intervall τ_i, in dem ein Punkt ξ von K_x liegt, stets den Wert $N_{\nu+1} - N_\nu$. Sind nun $\tau_1', \tau_2', \ldots \tau_\mu'$ diejenigen Intervalle, die keinen Punkt von T enthalten, und $\tau_1'', \tau_2'', \ldots \tau_\lambda''$ die übrigen, so ergiebt sich für das obere Integral von $F_\nu(x)$ die Relation[1])

$$\overline{\int} F_\nu(x)\,dx = (\tau_1'' + \tau_2'' + \cdots + \tau_\lambda'')(N_{\nu+1} - N_\nu).$$

Falls nun T ausgedehnt ist und den Inhalt σ hat, so ist immer $\sigma < (\tau_1'' + \cdots + \tau_\lambda'')$ und damit

$$\overline{\int} F_\nu(x)\,dx > \sigma(N_{\nu+1} - N_\nu),$$

woraus die Behauptung folgt. Ganz ebenso wird der Beweis geführt, falls $f(x)$ auch negativ unendlich werden kann, da ja M_ν und N_ν unabhängig von einander wachsen dürfen.

Die Harnack'sche Definition gestattet diese Folgerung nicht[2]). Umgekehrt sieht man leicht, dafs die in ihr geforderte Grenzeigenschaft bei den hier erörterten absolut convergenten Integralen eine Folge der Definition de la Vallée Poussin's ist.

Je nachdem die Menge K_x abzählbar ist oder nicht, soll das uneigentliche Integral als solches erster Art oder zweiter Art bezeichnet werden. Beide Integralarten weisen wesentliche Differenzpunkte auf (S. 214).

6. Da de la Vallée Poussin's allgemeine Definition nur zu den unbedingt convergenten Integralen führt, so mufs er sich für die bedingt convergenten auf die erste Art der Definition beschränken, die nur zu abzählbaren Mengen K_x führt; dabei wird $f(x)$ auf jedem Intervall δ_ν integrirbar oder auch absolut convergent vorausgesetzt.

Wir werden sehr bald zu erörtern haben, ob es überhaupt angängig ist, die bedingt convergenten Integrale beizubehalten. Thut man dies aber, so wird eine derartige principielle Unterscheidung zwischen den absolut und bedingt convergenten Integralen durch die Natur der Sache meines Erachtens nicht verlangt. Besitzt nämlich die Function $f(x)$ auf $a \ldots b$ ein bedingt convergentes

1) Die Bezeichnung $\overline{\int}$ entnehme ich Peano.

2) Ist T ausgedehnt, und wird $f(x)$ so bestimmt, dafs $f(x) = \infty$ in T und $f(x) = 0$ in jedem andern Punkt, so hat der bezügliche Harnack'sche Grenzwert immer noch den Wert Null.

Integral, so kann man sich den Zusammenhang der Intervalle δ_ν an allen Stellen von K_∞ zerschnitten denken und die Intervalle in anderer Weise zusammensetzen, so dafs sie eine ebenfalls abzählbare Menge K'_∞ bestimmen. Wenn man dabei die Functionswerte in jedem inneren Punkt jedes Intervalles δ_ν ungeändert läfst, so hat die Function $f(x)$ ihre Form geändert, aber ihr Integral ist unverändert geblieben. Nichts hindert aber, die Intervalle δ_ν sogar so anzuordnen, dafs sie eine im Intervall $a \dots b$ liegende unausgedehnte perfecte Menge T_∞ bestimmen. Um dies ganz einwandsfrei zu bewirken, kann man von einer Menge T_x ausgehen, deren Inhalt Null ist, und die zu ihr gehörigen Intervalle dann so aneinanderfügen, dafs ihre Endpunkte in einem Intervall $a' \dots b'$ eine abzählbare Menge K_∞ bestimmen, wo dann $a \dots b = a' \dots b'$ ist. Falls nun eine Function $f(x)$ auf $a' \dots b'$ ein bedingt convergentes Integral besitzt, so liegt kein Grund vor, derjenigen Function $f_1(x)$, die sich aus $f(x)$ durch Umlagerung der Intervalle ergiebt, die Existenz eines Integrals auf alle Fälle vorenthalten zu wollen. Es scheint dies um so weniger geboten, als die Definition von de la Vallée Poussin sich so abändern liefse, dafs sie den vorliegenden Fall mitumfafste und ebenfalls die Eigenschaft $J(K_\infty) = 0$ aus ihr gefolgert werden könnte; sie müfste allerdings so erweitert werden, dafs man die Existenz des Integrals auf jedem δ_ν voraussetzt, da dies hier nicht mehr als Folge aus der Definition abgeleitet werden kann. Allein da wir die Existenz des bedingt convergenten Integrals später ganz und gar in Zweifel ziehen müssen, so nehme ich davon Abstand, dies noch weiter auszuführen.

7. Die einzelnen Eigenschaften des bestimmten Integrals lassen sich nur teilweise auf die uneigentlichen Integrale übertragen. Jedenfalls gilt dies aber von der Ersetzbarkeit der Function $f(x)$ durch die zugehörige Function $\varphi(x)$. Setzt man wieder

$$f_\nu(x) = \varphi_\nu(x) + \psi_\nu(x), \quad f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

so ist nämlich

$$\lim \varphi_\nu(x) = \varphi(x),$$

wie unmittelbar daraus folgt, dafs es für jeden Stetigkeitspunkt von $f(x)$, resp. $\varphi(x)$ ein bestimmtes ν giebt, so dafs er zugleich Stetigkeitspunkt von $f_\nu(x)$ resp. $\varphi_\nu(x)$ ist und es für alle folgenden Functionen der Folge (6) auch bleibt. Demgemäfs folgt, dafs nicht allein

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

ist, sondern dafs auch die Integrale

$$(7) \qquad \int_a^b \varphi_1(x)dx, \quad \int_a^b \varphi_2(x)dx, \quad \ldots \int_a^b \varphi_\nu(x)dx, \ldots$$

gegen das Integral von $f(x)$ convergiren. Auch hier ist es wieder nützlich, für $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi(x)$ die Bedingung der ausnahmslosen Einwertigkeit aufzuheben und an den Unstetigkeitsstellen jeden Wert der zugehörigen Unstetigkeitsstrecke als Wert dieser Functionen zuzulassen. Es folgt nun weiter, dafs auch

$$\lim \psi_\nu(x) = \psi(x)$$

ist, und es ist daher auch $\psi(x)$ eine Nullfunction, deren Integral gleich Null ist. Ferner bestehen auch hier zwischen k, k_φ und k_ψ die S. 133 angegebenen Beziehungen.

Was die besonderen Integralsätze betrifft, so sind die meisten von ihnen bereits im Werk von Dini eingehend dargestellt worden[1]. Sie sind überdies zumeist eine ziemlich unmittelbare Folge der Integraldefinition und bieten zu Fragen principieller Natur keine Veranlassung. Der Satz, dafs das Product zweier integrirbaren Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ selbst integrirbar ist, bleibt für die absolut convergenten Integrale immer in Kraft, falls beide Functionen keine gemeinsamen Unendlichkeitspunkte besitzen. Für bedingt convergente Integrale existirt jedoch ein solcher Satz allgemeinerer Tragweite überhaupt nicht mehr. Hier braucht er selbst dann nicht mehr erfüllt zu sein, wenn eine der beiden Functionen stets endlich ist[2]. Ähnlich steht es mit dem Mittelwertsatz.

Was den Fall der teilweisen Integration betrifft, so können schon in dem Fall, dafs $f(x)$ und $\varphi(x)$ eigentlich integrirbar sind, Formeln auftreten, die uneigentliche Integrale enthalten. Hiermit haben sich Dini und de la Vallée Poussin eingehend beschäftigt. Ich beschränke mich auf die Hervorhebung der allgemeinen Gesichtspunkte. Ist $Df(x)$ eine Ableitung von $f(x)$, so ist zunächst notwendig, dafs $Df(x)$ eine integrirbare Function ist, aus der durch Integration wieder $f(x)$ hervorgeht, und analog für $\varphi(x)$. Wir werden sehen (S. 210), dafs dies nicht immer der Fall zu sein braucht, und selbst dann nicht, wenn die Ableitung $Df(x)$ eine stets endliche Function ist. Ist aber diese Bedingung für irgend eine Ableitung erfüllt, so gilt sie für jede, und wenn überdies auch $\varphi(x)Df(x)$

1) Vgl. besonders § 225ff. Vgl. auch Ascoli, Mem. dell' Acc. dei Lincei (3) Bd. 2, S. 610ff., sowie Hölder, Math. Ann. 24, S. 203.

2) Ist $\int f(x)$ ein bedingt convergentes Integral, so entsteht $|f(x)|$ durch Multiplication von $f(x)$ mit einer Function vom Wert ± 1, die integrirbar ist, während $|f(x)|$ nicht integrirbar ist. Vgl. z. B. das S. 205 erwähnte Beispiel.

oder aber $f(x) D\varphi(x)$ integrirbare Functionen sind, so läfst sich die Formel der teilweisen Integration anwenden[1]).

Auch die Frage der Substitution neuer Variablen ist von den beiden genannten Autoren a. a. O. ausführlich behandelt worden[2]).

8. Die im zweiten Abschnitt in Kürze dargestellte Theorie der ebenen resp. räumlichen abgeschlossenen Mengen erlaubt es, die vorstehenden Erörterungen ohne weiteres auf Doppelintegrale und vielfache Integrale auszudehnen. Beruht doch der Integralbegriff aufser auf der Zerlegung eines Gebiets in eine endliche unbegrenzt wachsende Zahl einfacher Bereiche nur noch auf den allgemeinen Eigenschaften des einfachen Grenzwerts[3]) und der Structur und den Inhaltseigenschaften der Punktmengen. Es scheint mir sogar gerade eines der wesentlichsten Ergebnisse der Mengenlehre zu sein, dafs sie die in diesen Dingen vorhandene Analogie zwischen dem linearen und dem räumlichen Gebiet methodisch sicherzustellen vermocht hat.

Freilich sollte, da das Integrationsgebiet ein beliebiges Flächenstück oder ein beliebiger Raumteil sein kann, zuvor eine mengentheoretische Analyse der geometrischen Grundbegriffe vorhanden sein. Ich hoffe eine solche bald liefern zu können; man kommt aber auch ohne sie mit einem einfachen Kunstgriff zurecht. Beschränken wir uns für das Folgende auf das Doppelintegral einer Function $f(x, y)$, so denke man sich das Integrationsgebiet $\mathfrak{F}$ in einem Rechteck H liegend, erteile der Function in allen Punkten, die aufserhalb $\mathfrak{F}$ liegen, den Wert Null und wähle nun H selbst für die so modificirte Function $f_1(x, y)$ als zugehöriges Integrationsgebiet. Es ergiebt sich dann auf demselben Wege und mittelst derselben Schlüsse, wie oben (S. 180), dafs die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Doppelintegrals der Function $f_1(x, y)$ darin besteht, dafs für jedes $k > 0$ die Menge K_1 der Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ den Inhalt Null hat. Der Menge K_1 können nun allerdings einige oder alle Punkte des Umfangs von $\mathfrak{F}$ angehören. Wird dieser Umfang als Punktmenge durch L bezeichnet, und ist K die Menge der Punkte $\omega \geqq k$ für $f(x, y)$, so ist jedenfalls (S. 92)

$$J(K) \leq J(K_1) \leqq J(K) + J(L),$$

und wenn $J(L) = 0$ ist, so ist auch $J(K) = J(K_1)$. Unsere Methode ist also immer dann ohne Einflufs, wenn $J(L) = 0$ ist; eine Bedingung, die verlangt, dafs das Gebiet $\mathfrak{F}$ mefsbar ist, und

---

1) Ist es das eine Product, so ist es auch das andere; vgl. Dini, Grundlagen, S. 489.

2) Vgl. auch Harnack, Math. Ann. 24, S. 237.

3) Die Ausdehnung der Riemann'schen Definition auf Doppelintegrale erscheint wohl zuerst bei J. Thomae, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale 1875, S. 33, sowie Zeitschr. f. Math. 21, S. 224, und bei St. Smith, Proc. of the Lond. math. Soc. 6, S. 152 (1875).

die als solche hier ausdrücklich eingeführt werden mufs. Sie haftet aber auch sonst dem Integralbegriff als immanente Bedingung an. Also folgt:

VII. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die überall endliche Function $f(x, y)$ in dem mefsbaren Gebiet $\mathfrak{F}$ ein Doppelintegral besitzt, besteht darin, dafs die Menge K der Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ für jedes k den Inhalt Null besitzt.

Es schliefst dies natürlich nicht aus, dafs der Menge K auch ganze Curven angehören können, ja sogar unendlich viele, und selbst so, dafs ihre Menge die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat. Es leuchtet überdies ein, dafs das vorstehende Resultat auf vielfache Integrale jeder Art ausgedehnt werden kann. Es wurde zuerst von Harnack[1]) und später von O. Stolz[2]) ausgesprochen.

Auch hier kann man wieder zu $f(x, y)$ die möglichst stetige Function $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ einführen durch die Gleichung

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y),$$

so dafs $\varphi(x, y)$ in den Stetigkeitspunkten von $f(x, y)$ mit $f(x, y)$ übereinstimmt und $\psi(x, y)$ eine Nullfunction ist. Alsdann gelten hier die nämlichen Beziehungen, wie für einfache Integrale, da sie ja sämtlich vom Dimensionsbegriff unabhängig sind. Es ist insbesondere (S. 133) $k_\varphi < k$ und $k_\psi \leqq k$, und es ist

$$\int\int f(x, y)\,dH = \int\int \varphi(x, y)\,dH, \quad \int\int \psi(x, y)\,dH = 0.$$

9. Eine Frage, die noch besonderer Erörterung bedarf, ist die nach der Ersetzung eines vielfachen Integrals durch mehrmalige Integrale. In dieser Hinsicht erwähne ich zunächst den folgenden Satz:

VIII. Hat die Function $f(x, y)$ im Rechteck H ein Doppelintegral, so existiren auch die bezüglichen zweimaligen Integrale und sind unter sich und dem Doppelintegral gleich.

Diesen Satz hat in seiner allgemeinsten Tragweite zuerst P. du Bois-Reymond[3]) als richtig erkannt und bewiesen, auf Grund allgemeiner Betrachtungen über doppelte Grenzwerte. Dieser Weg scheint mir jedoch nicht die einfachste Beweismethode darzustellen[4]). Die natürlichste Grundlage der Schlüsse ist die Benutzung des oberen und unteren Integrals; auf dieser Grundlage ist der Satz

1) Die Elemente u. s. w., S. 311.
2) Math. Ann. 26, S. 90.
3) Journ. f. Math. 94, S. 277 (1883).
4) Vgl. die Anmerkung auf S. 199.

zuerst von Harnack[1]) abgeleitet worden. Sein Beweis kommt darauf hinaus, dafs das obere Integral bei zweimaliger Integration nicht gröfser sein kann als das obere Doppelintegral, und ebenso das untere nicht kleiner als das untere Doppelintegral, woraus der Satz unmittelbar folgt. Denselben Beweis giebt auch C. Arzelà[2]). Die hier ausgesprochene präcise Formulirung findet sich allerdings erst bei C. Jordan[3]).

Um den Satz mit den Eigenschaften der Punktmengen zu erweisen, schicke ich zunächst eine allgemeine Orientirung über die Verteilung der Punkte $\omega \geqq k$ einer Menge K voraus. Sei x ein beliebiger Punkt der Seite h_1 von H und K^x die Teilmenge von K, die auf der durch x parallel zur y-Axe gehenden Geraden h^x liegt. Es ist dann, da ein Doppelintegral existirt, $J(K) = 0$, und wir setzen

$$J(K^x) = J_k(x).$$

Wird dann σ beliebig vorgegeben, so ist gemäfs Satz VIII von S. 96 die Menge $X_\sigma = \{x_\sigma\}$ derjenigen Punkte, für die der Inhalt $J_k(x_\sigma) > \sigma$ ist, notwendig unausgedehnt. Dies können wir kurz so aussprechen, dafs $J_k(x)$ eine integrirbare Nullfunction ist, und zwar gilt dies für jedes k. Nun denke man sich eine Reihe von Gröfsen

$$k_1 > k_2 > k_3 > \cdots > k_\nu > \cdots$$

mit $\lim k_\nu = 0$, und es seien

$$J_1(x),\ J_2(x),\ J_3(x),\ \ldots\ J_\nu(x),\ \ldots$$

die zugehörigen eben definirten Nullfunctionen, so wird die zur Gesamtmenge $\mathfrak{M}\{X_\sigma\}$ gehörige Complementärmenge $\Xi = \{\xi\}$ nunmehr dadurch ausgezeichnet sein, dafs auf jeder durch einen Punkt ξ gehenden Geraden h^ξ

$$J_\nu(\xi) = J_\nu(K^\xi) = 0$$

ist für jedes k_ν. Setzt man also noch $\lim J_\nu(x) = J(x)$, so ist $J(x)$ eine integrirbare Nullfunction allgemeinster Art[4]). Damit haben wir ein hinreichendes Bild der bezüglichen Punktverteilung gewonnen.

Um nun den Beweis des Satzes zu liefern, betrachten wir zunächst wieder einen beliebigen Punkt x der Seite h_1, so besitzt auf der durch ihn gehenden Geraden h^x die Function $f(x, y)$ ein oberes Integral $O(x)$ und ein unteres Integral $U(x)$. Wird durch $F(x)$ irgend ein Wert bezeichnet, der zwischen beiden enthalten ist, so ist zu zeigen, dafs $F(x)$ in dem oben (S. 182) angegebenen Sinn

1) Vgl. Harnack's Ausgabe der Differential- und Integralrechnung von Serret, Bd. 2, S. 282 (1885).

2) Mem. dell' Ist. di Bologna (5) II, S. 133.

3) Journ. de math. (4) Bd. 8, S. 84, sowie cours etc., Bd. 1, S. 42. Den nämlichen Beweis giebt Pringsheim, Ber. d. Münch. Ak. 28, S. 59.

4) Dies ist ein besonderer Fall von Satz II auf S. 225.

eine punktweise unstetige integrirbare Function ist. Zunächst ist nach dem vorigen klar, dafs $f(x, y)$ auf jeder Geraden h^ξ integrirbar und damit $F(\xi)$ eindeutig ist. Wird weiter k und σ beliebig gewählt, ist X_σ wie eben die zugehörige unausgedehnte Menge und x' innerer Punkt eines zu ihr gehörigen Intervalles δ_ν, so ist für die zugehörige Teilmenge K' der Voraussetzung gemäfs $J(K') < \sigma$. Wir haben jetzt nur nötig, die Ausführungen von S. 96 zu wiederholen (Fig. 4). Sei also wieder $E = \{\varepsilon_\nu\}$ die zu K' gehörige Intervallmenge, so bestimme man μ Intervalle ε_i, so dafs bei vorgegebenem σ'

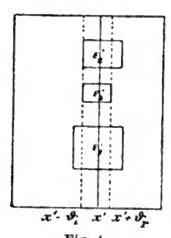


Fig. 4.

$$\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \cdots + \varepsilon_\mu' > h_2 - \sigma - \sigma'$$

ist. Zu jedem inneren Punkt p von ε_i' giebt es dann wieder einen rechteckigen Bereich, in dem die Schwankung von $f(x, y)$ unterhalb k liegt, und es mufs auch hier die Breite dieser Bereiche für die Punkte aller μ Intervalle ε_i' eine von Null verschiedene untere Grenze haben, da sie sonst einen Punkt von K enthielten. Diese unteren Grenzen ϑ_l und ϑ_r bestimmen dann wieder zu x' ein endliches Intervall $x' - \vartheta_l \cdots x' + \vartheta_r$. Wird nun die Maximalschwankung von $f(x, y)$ in H mit k_m bezeichnet, so ist, wenn x_1 und x_2 zwei innere Punkte des Intervalls $x' - \vartheta_l \cdots x' + \vartheta_r$ sind,

$$\Delta = |F(x_2) - F(x_1)| < kh_2 + (\sigma + \sigma')k_m.$$

Ein solches Intervall existirt aber um jeden inneren Punkt eines Intervalles δ_ν. Wählt man nun wieder ν so, dafs

$$\delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_\nu' > h_1 - \sigma_1$$

ist, so kann jetzt die Seite h_1 in eine endliche Zahl von Intervallen τ_i so zerlegt werden, dafs bei vorgegebenem η die Summe derjenigen, in denen $\Delta < \eta$ ist, ihrerseits unter einer Gröfse η_1 liegt[1]. Dies heifst aber in der That, dafs in dem obigen Sinn (S. 182) $F(x)$ eine integrirbare Function ist, und es bilden insbesondere noch die Punkte von $\Xi = \{\xi\}$ die Stetigkeitspunkte der Function[2]. Damit ist zunächst die Existenz des zweimaligen Integrals bewiesen.

Die Gleichheit des zweimaligen Integrals und des Doppel-

1) Es genügt z. B., $h_2 k < \frac{\eta}{3}$, $\sigma k_m < \frac{\eta}{3}$, $\sigma' k_m < \frac{\eta}{3}$, $\sigma_1 < \eta_1$ zu wählen. Die erste Relation bestimmt die Menge K, die zweite X_σ, die dritte und vierte regeln die Werte von μ und ν, und damit die Zahl der Intervalle τ_i.

2) Einen speciellen Fall des obigen Satzes giebt C. Severini. Er zeigt, dafs $F(x)$ stetig ist, wenn $J(K^x) = 0$ ist für jedes k und jedes x. Rend. di Palermo 13, S. 7 (1899).

integrals zu erschliefsen, hat nunmehr keinerlei Schwierigkeit und bedarf kaum einer näheren Begründung. Der Erfolg unserer Betrachtung besteht ja darin, dafs wir einerseits Gebietsmengen auf constructivem Wege hergestellt haben, die die Übereinstimmung der für das Doppelintegral und das zweimalige Integral in Betracht kommenden Elementarsummen direct in Evidenz setzen, und dafs andererseits die diesen Gebietsmengen entsprechenden Elementarsummen sowohl dem Wert des Doppelintegrals wie auch dem des zweimaligen Integrals beliebig nahe gebracht werden können. Damit ist die Behauptung erwiesen. Wir dürfen also setzen:

$$\int\int f(x, y)\, dH = \int_a^{a_1} F(x)\, dx = \int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f(x, y)\, dy.$$

Nunmehr können wir noch die Änderung einführen, dafs wir wieder von der Function $F(x)$ zur zugehörigen Function $\Phi(x)$ übergehen, so dafs die Function $\Phi(x)$ durch die Werte von $F(x)$ an den Stetigkeitsstellen ξ bestimmt ist; alsdann ist

$$\int\int f(x, y)\, dH = \int_a^{a_1} \Phi(x)\, dx.$$

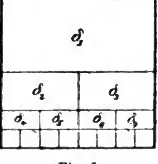


Fig. 5

Ich lasse ein einfaches Beispiel folgen. In einem Quadrat über der Längeneinheit (Fig. 5) definire man $f(x, y)$ so, dafs in allen Punkten

$$x = \frac{2\mu + 1}{2^\nu}, \quad y \leqq \frac{1}{2^\nu}$$

$f(x, y) = 1$ ist, sonst aber $f(x, y) = 0$, so ist das Doppelintegral Null, wie die Figur unmittelbar veranschaulicht. Alsdann ist die Integralfunction $F(x)$ eine überall eindeutige, integrirbare Nullfunction, so dafs

$$F\left(\frac{2\mu + 1}{2^\nu}\right) = \frac{1}{2^\nu}$$

ist, und es ist $\Phi(x) = 0$. Wird jetzt $f(x, y)$ so abgeändert, dafs $f(x, y) = 1$ nur an denjenigen der obigen Werte ist, wo y rational ist, so wird

$$0 \leqq F\left(\frac{2\mu + 1}{2^\nu}\right) \leqq \frac{1}{2^\nu},$$

da an diesen Stellen das untere Integral $U(x) = 0$ ist, das obere $O(x) = 1/2^\nu$. Auch jetzt aber ist $\Phi(x) = 0$, und also ist auch das zweimalige Integral Null. Es ist eben ausschliefslich die Function $\Phi(x)$, auf die es für die Ermittelung des Integralwertes ankommt. Diesem Thatbestand hat übrigens auch Arzelà Ausdruck gegeben, der sich

ebenfalls mit der Existenzfrage für Doppelintegrale und das zweimalige Integral beschäftigt hat. Er spricht sich dahin aus, dafs $O(x) - U(x)$ eine Function vom Integral Null und $U(x)$ integrirbar sein müsse, damit das Doppelintegral existiren kann. Allerdings ist diese Bedingung, wie der folgende Satz zeigt, und auch Arzelà angiebt, nicht hinreichend.

Harnack hat in seiner ersten Darstellung des Satzes den Ausdruck gebraucht, dafs bei jedem Doppelintegral die Gesamtmengen $\{X_\sigma\}$ selbst eine unausgedehnte Menge bilden, was ja aber keineswegs nötig ist. Stolz[1]), der dieses Versehen bemerkte, beschränkte sich deshalb darauf, den Satz unter der ausdrücklichen Bedingung abzuleiten, dafs auch $J\{X_\sigma\} = 0$ ist; was jedoch ein zu enges Resultat ergiebt. Auf das Monitum von Stolz hin hat alsbald Harnack[2]) seine Ausdrucksweise richtig dahin corrigirt, dafs $J(X_\sigma) = 0$ für jedes σ sein müsse, und dem Satz seinen allgemeinen Inhalt jedenfalls für den Fall gesichert, dafs das Gebiet H von jeder Parallelen zu den Axen in zwei Punkten getroffen wird.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit erwähnen, dafs auf mancher Seite dem Satz gegenüber eine gewisse Engherzigkeit obwaltet, mindestens in Bezug auf den Sprachgebrauch. Man findet mehrfach die Ausdrucksweise, dafs das zweimalige Integral vorhanden sein könne, ohne dafs das einfache Integral $F(x) = \int f(x, y)\,dy$ existire. Ich halte diesen Sprachgebrauch nicht für zweckmäfsig; er schwindet bei der hier gewählten Begriffsbestimmung von selbst, und ich darf hinzufügen, dafs diese Auffassung auch bei den meisten Autoren vorhanden ist, die sich mit dem Gegenstand beschäftigt haben, allerdings nicht überall. Ich erwähne dies, weil Stolz[3]) so weit gegangen ist, den Begriff des zweimaligen Integrals in diesen Fällen gar nicht zuzulassen, zumal die Punkte x, für die $\int f(x, y)\,dy$ nicht erklärt sei, überall dicht liegen könnten[4]). Aber die überall dichte Erfüllung ist belanglos, da ja die Differenz $O(x) - U(x)$ eine integrirbare Nullfunction allgemeinster Art sein kann, wie auch bei Arzelà zu lesen ist.

Es fragt sich, wann der Satz VIII umkehrbar ist. Diese Frage läfst sich auf Grund der früher bewiesenen Sätze über den Inhalt

---

1) Math. Ann. 26, S. 93.

2) Math. Ann. 26, S. 566.

3) Grundzüge, III, S. 88, 140. Das Beispiel, auf das Stolz sich beruft, lautet

$$f(x, y) = \frac{1}{2^\nu} \text{ für } x = \frac{2\mu + 1}{2^\nu}, \quad y = \frac{2\varkappa + 1}{2^\lambda},$$

sonst aber $f(x, y) = 0$. Vgl. auch du Bois, Journ. f. Math. 94, S. 278.

4) Auch Pringsheim folgt dem oben bemängelten Sprachgebrauch; z. B. Ber. d. Münch. Ak. 29, S. 39.

ebener Mengen leicht beantworten. Aus diesen Sätzen folgt nämlich unmittelbar:

IX. Gestattet die Function $f(x, y)$ im Rechteck H ein zweimaliges Integral erst nach y und dann nach x, und ist K^x die Menge der Punkte $\omega \geqq k$ für irgend eine Parallele zur y-Axe, so besitzt $f(x, y)$ stets und nur dann ein Doppelintegral, wenn die Gesamtmenge $\{K^x\}$, die zu allen den genannten Parallelen gehört, für jedes k abgeschlossen ist.

Ist nämlich die Menge $\{K^x\}$ abgeschlossen, so folgt aus Satz IX von S. 96 unmittelbar, dafs ihr Inhalt Null ist. Denn wird zunächst k und damit K beliebig gewählt, so bewirkt die Existenz des zweimaligen Integrals, dafs die in dem bezüglichen Satz benutzte Menge X_σ für jedes σ unausgedehnt ist, und da $\{K_x\}$ abgeschlossen ist, so besagt dieser Satz, dafs $J\{K^x\} = 0$ ist. Dies gilt aber für jedes k, woraus der obige Satz folgt.

Dafs es Mengen $\{K^x\}$ geben kann, die nicht abgeschlossen sind, wurde bereits S. 97 erwähnt. Man kann also solche Mengen auch so construiren, dafs ein zweimaliges Integral existirt, während ein Doppelintegral nicht vorhanden ist, und zwar derart, dafs die Menge $\{K^x\}$ als ebene Menge einen von Null verschiedenen Inhalt besitzt, während jedes einzelne K^x den Inhalt Null hat[1]). Es beruht dies darauf, dafs beim Inhalt der ebenen Menge alle ihre Grenzpunkte in Frage kommen, für den Inhalt jeder einzelnen Menge K^x nur diejenigen, die auf den Geraden h^x liegen. Beides kann aber sehr verschiedenen Erfolg haben[2]).

Mit dem soeben bewiesenen Satz hängt auch die Frage nach der Vertauschbarkeit der Integrationsordnung zusammen, obwohl sie mit ihm nicht identisch ist. Es können nämlich die Mengen K^x eine solche Verteilung im Integrationsgebiet haben, dafs auch die sämtlichen Mengen K^y abgeschlossen sind, während es die ebenen Mengen K nicht sind. Ein derartiges Beispiel hat Pringsheim angegeben[3]). Im übrigen kann die theoretische Frage nach der Vertauschung der Integrationsordnung allgemein nur dahin beantwortet werden, dafs sämtliche Mengen K^y den allgemeinen Bedingungen der obigen Sätze genügen müssen, ebenso wie die Existenz des

---

1) Ein solches erstes Beispiel gab Thomae, Zeitschr. f. Math. 23, S. 67. Er setzt $f(x, y) = 1$ für rationales x und $f(x, y) = 2y$ für irrationales x. Hier sind alle Mengen $K^x = 0$, aber für kein k ist $J(K) = 0$.

2) Vgl. die Beispiele auf S. 97.

3) Ber. d. Münch. Ak. Bd. 29, S. 50. Man stelle x und y als dyadische Brüche dar und setze die bezügliche Menge aus allen Wertepaaren x, y zusammen, die mit einer endlichen Zahl Stellen und überdies mit gleich vielen gebildet sind; z. B. $x = 0{,}0101$, $y = 1011$. Hier ist jede Menge K^x und K^y endlich, während K aus allen Punkten des Quadrats besteht.

Doppelintegrals trotz der Existenz der zweimaligen Integrale nur dann gesichert ist, wenn alle ebenen Mengen K inhaltslos sind[1]).

10. Es ist schliefslich noch übrig, auch über die Theorie der uneigentlichen Doppelintegrale zu berichten. Nach den ausführlichen Darlegungen über das uneigentliche einfache und das eigentliche Doppelintegral kann ich mich hier aber wesentlich kürzer fassen. Beschränkt man sich zunächst auf die unbedingt convergenten Integrale, so bleiben ersichtlicher Weise alle die Ausführungen bestehen, die oben über den Charakter und das gegenseitige Verhältnis der einzelnen Definitionen gemacht worden sind. Insbesondere läfst sich die Definition von de la Vallée Poussin auf Functionen mehrerer Variablen ausdehnen, und es folgt auch hier aus ihr, dafs $J(K_\infty)=0$ ist, und dafs das Integral überdies auf jedem Gebiet δ_ν der zu K_x gehörigen Gebietsmenge $D=\{\delta_\nu\}$ absolut convergent ist und damit auch auf jedem Teilgebiet von H. Es folgt auch weiter, dafs die Summe der Integrale, die sich über ν Teilgebiete $\delta_1', \delta_2', \ldots \delta_\nu'$ erstrecken, mit wachsendem ν selbst eine Folge bildet und gegen den Wert des Doppelintegrals convergirt, so dafs der Integralwert auch von der Menge D unabhängig ist.

Hiermit ist das Analogon der Eigenschaft erreicht, auf die sich Harnack's Definition des uneigentlichen einfachen Integrals stützt; sie ist es zugleich, die die Grundlage von C. Jordan's[2]) Definition des uneigentlichen Doppelintegrals bildet, und die auch Stolz[3]) für seine Darstellung zum Ausgangspunkt gewählt hat[4]). Nur tritt bei Jordan und Stolz die Modification auf, dafs sie einen unbestimmten Flächenbegriff H_ν benutzen, der die Menge K_∞ ausschliefst und sich der Gesamtfläche H immer mehr nähert, während hier der ganzen Anlage des Berichtes nach die Gebiete δ_ν die Grundlage der Gebietsconvergenz bilden. Die Bedingung $J(K_x)$ kommt dabei in der Weise zum Ausdruck, dafs die Flächen H_ν, für die man das Doppelintegral betrachtet, der Gesamtfläche H sich so nähern sollen, dafs $H - H_\nu$ beliebig klein wird.

Was nun die Beziehung zwischen dem absolut convergenten Doppelintegral und den zweimaligen Integralen betrifft, so ist hier die gegenseitige Ersetzbarkeit immer gestattet, vorausgesetzt natürlich, dafs aufser K_x auch jede andere Menge K der Punkte $\omega \geq k$ unausgedehnt ist. Dies folgt hier bereits aus den analogen Sätzen

---

1) Ein specieller Satz hierüber findet sich bei Arzelà. Er lautet, dafs die Vertauschbarkeit immer gestattet ist, wenn $f(x, y)$ nach x und y bis je auf eine unausgedehnte Menge gleichmäfsig integrirbar ist. (Mem. dell' Acc. di Bologna (5) 2, S. 133ff.)

2) Cours etc., II, S. 75.

3) Grundzüge etc., III, S. 124.

4) Übrigens erscheint diese Idee auch schon bei du Bois, Journ. f. Math. 94, S. 281 (1883); es fehlt dort freilich die Bedingung $J(K_x) = 0$.

über das eigentliche Doppelintegral in Verbindung mit der allgemeinen Definition de la Vallée Poussin's. Ist nämlich $f_\nu(x, y)$ irgend eine Function der zu (6) analogen Reihe, und ist K für $f(x, y)$, K_ν für $f_\nu(x, y)$ die Menge der Punkte $\omega \geqq k$, so ist, welches auch der Wert von k sei,

$$J(K_\nu) \leqq J(K) + J(K_\infty),$$

und daher $J(K_\nu) = 0$, falls $J(K) = 0$ und $J(K_\infty) = 0$ ist. Es genügt daher jedes $f_\nu(x, y)$ den Bedingungen von Satz VII, und nach Satz VIII ist daher für jedes $f_\nu(x, y)$ das Doppelintegral durch das zweimalige Integral ersetzbar. Gemäfs unseren Annahmen über die Mengen K und K_∞ ist aber nach Satz IX auch das umgekehrte der Fall. Von den beiden Reihen

$$(8) \quad \int\int f_1(x, y)\,dH, \quad \int\int f_2(x, y)\,dH, \ldots \quad \int\int f_\nu(x, y)\,dH, \ldots$$

$$(9) \quad \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f_1(x, y)\,dy, \quad \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f_2(x, y)\,dy, \ldots \quad \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f_\nu(x, y)\,dy, \ldots$$

bildet also die zweite eine Folge, wenn die erste es thut, und die erste bildet eine Folge, wenn die zweite es thut. Wir haben es ja nur mit zwei einfachen Fundamentalreihen bestimmter Zahlgröfsen, oder falls man das Integral ebenfalls durch ein Grenzverfahren auflöst, mit vorgeschriebener Reihenfolge der Grenzübergänge zu thun[1]).

Das hiermit erreichte Resultat hat noch nicht diejenige einfachste Form, in der es zugleich den praktischen Ansprüchen zu genügen vermag. Um diese zu erhalten, nehme man $f(x, y)$ überall positiv[2]), denke sich die Function $f_\nu(x, y)$, die man für festes x ins Auge zu fassen hat, durch die zugehörige möglichst stetige Function $\varphi_\nu(x, y)$ ersetzt, und setze alsdann

$$\int_b^{b_1} f_\nu(x, y)\,dy = \int_b^{b_1} \varphi_\nu(x, y)\,dy = F_\nu(x),$$

wo $F_\nu(x)$ in dem oben angegebenen Sinn für gewisse x auch eine

---

1) Die obige Betrachtung zeigt, dafs es für die Fälle, in denen man es mit vorgeschriebener Folge von Grenzübergängen zu thun hat, nicht zweckmäfsig scheint, jedesmal die Doppelsumme zu Grunde zu legen. Diese Bemerkung trifft übrigens auch die von du Bois resp. Pringsheim gegebenen Beweise für den Satz VIII. Will man übrigens die Analyse der Grenzprocesse weiter treiben, so beruht der obige Satz darauf, dafs für die Functionen $f_\nu(x, y)$ auch die im Beweis von Satz IX auftretenden Gröfsen $\int(\sigma + \sigma')k_m\,dx$ eine Folge bilden, und zwar eine solche, die gegen Null convergirt. Die Zahl der Teile, mit denen man dabei operiren mufs, wird natürlich mit wachsendem ν ebenfalls beliebig grofs.

2) Es ist klar, dafs dies keine wesentliche Beschränkung ist.

mehrwertige Function sein kann, aber jedenfalls eine **integrirbare** Function von x ist. Diese Function ersetze man nun ebenfalls durch die ihr entsprechende Function $\Phi_\nu(x)$, so ist schliefslich

$$\int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f_\nu(x, y)\,dy = \int_a^{a_1} \Phi_\nu(x)\,dx,$$

und es bilden jetzt auch die Integrale

$$(10) \qquad \int \Phi_1(x)\,dx, \quad \int \Phi_2(x)\,dx, \ldots \int \Phi_\nu(x)\,dx, \ldots$$

die nämliche Folge, wie die Integrale von (8) und (9). Diese Folge besitzt nun aber den Charakter, den die Definition (S. 187) des uneigentlichen einfachen Integrals verlangt. Erstens bilden die Functionen

$$(11) \qquad \Phi_1(x), \ \Phi_2(x), \ldots \Phi_\nu(x), \ldots$$

eine solche Functionenreihe, wie sie der Definition entspricht. Wenn nämlich für irgend ein x die Relation $f_{\nu+1}(x, y) \geqq f_\nu(x, y)$ besteht, so folgt daraus, dafs auch $\Phi_{\nu+1}(x) \geqq \Phi_\nu(x)$ ist, und daraus wieder leicht die vorstehende Behauptung. Zweitens haben aber auch die Functionen $\Phi_\nu(x)$ die Eigenschaft, dafs jede von ihnen integrirbar ist, und dafs ihre Integrale eine Folge bilden. Damit sind alle Bedingungen der Definition erfüllt, und es convergirt die obige Reihe gegen $\int \Phi(x)\,dx$, wo zunächst $\Phi(x) = \lim \Phi_\nu(x)$ ist. Wird nun noch

$$F(x) = \lim F_\nu(x)$$

gesetzt, so ist jetzt auch

$$\int_a^{a_1} F(x)\,dx = \int_a^{a_1} \Phi(x)\,dx,$$

da $\Phi(x)$ und $F(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt übereinstimmen müssen. Für jeden Stetigkeitspunkt von $F(x)$ giebt es nämlich ein bestimmtes ν, so dafs er auch Stetigkeitspunkt eines gewissen $F_\nu(x)$ ist, also auch von $\Phi_\nu(x)$ ist, und daraus folgt nun endlich, dafs die Gleichung

$$\iint f(x, y)\,dH = \int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f(x, y)\,dy$$

in der Weise gilt, dafs

$$\int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f(x, y)\,dx = \int_a^{a_1} \Phi(x)\,dx, \quad F(x) = \int_b^{b_1} \varphi(x, y)\,dy$$

gesetzt werden kann. Dieses Resultat läfst sich nunmehr folgendermafsen aussprechen:

X. Der Wert eines absolut convergenten uneigentlichen Doppelintegrals ist gleich jedem der bezüglichen zweimaligen Integrale, und umgekehrt.

Die Bedingung des Satzes besteht nur darin, dafs sich die Integration über ein mefsbares Gebiet erstreckt und alle Mengen K unausgedehnt sind. Praktisch bedeutet er, dafs ein endlicher Wert des Doppelintegrals immer und nur dann existirt, wenn die zweimalige Integration eine Folge liefert, die ein endliches Resultat ergiebt.

11. Zu dem hiermit erreichten allgemeinen Resultat ist man nur allmählich gelangt. De la Vallée Poussin, dem man ja die gründliche und definitive Behandlung der uneigentlichen Integrale verdankt, hat den Satz in seiner ersten Arbeit nur für den Fall der sogenannten regelmäfsig convergenten Integrale abgeleitet, und zwar nennt er[1]) das Integral regelmäfsig convergent, wenn bei vorgegebenem σ die Relation

$$\left|\int_b^{b_1} f(x', y)\,dy - \int_b^{b_1} f_\nu(x', y)\,dy\right| < \sigma$$

zwar nicht für jedes x, aber doch für alle x' mit Ausnahme einer unausgedehnten Menge $X_\sigma = \{x_\sigma\}$ durch geeignetes ν resp. durch geeignetes M_ν und N_ν erreicht werden kann. Dem gegenüber ist aber zu bemerken, dafs der Satz, gerade wenn man die Definition de la Vallée Poussin's zu Grunde legt, weder von der gleichmäfsigen, noch der regelmäfsigen, noch auch sonst irgend einer bestimmten Art der Convergenz abhängen kann, weil ja jedes zweimalige Integral der Reihe (9), wie bereits erwähnt, nur scheinbar durch einen Doppellimes, und in Wirklichkeit durch einen einfachen Grenzprocefs definirt ist[2]). Es ist auch leicht, Beispiele herzustellen, in denen die vorstehende Relation für jedes vorgegebene σ für eine überall dichte Menge $X = \{x\}$ nicht erfüllt ist, und bei der Wichtigkeit des Gegenstandes führe ich ein solches Beispiel hier an. Zu diesem Zweck definire man $f(x, y)$ in einem Quadrat über der Längeneinheit wie oben (S. 195), nur mit dem Unterschied, dafs jetzt $f(x, y) = \infty$ ist, wo früher $f(x, y) = 1$ war. Alsdann besitzt die Function ein Doppelintegral S, das den Wert Null hat. Denn es ist, wie die Gebietsmenge $D = \{\delta\}$ unmittelbar lehrt, $J(K_x) = 0$,

1) Journ. de math. (4) 8, S. 436.

2) Dagegen kann die Art der Convergenz sehr wohl auf gewisse Eigenschaften des Integrals von Einflufs sein, also z. B. die Stetigkeit der Function $F(x)$ bewirken. Dem entsprechen die Sätze von de la Vallée Poussin. Ebenso gehört hierher der oben (S. 194) erwähnte Satz von C. Severini, Rend. d. Palermo Bd. 13, S. 20 (1899), der auch für uneigentliche Integrale Geltung hat.

und es folgt in diesem Fall bereits aus der Jordan'schen Definition, dafs $S = 0$ ist. Dagegen kann die obige Relation für keinen rationalen Punkt der x-Axe durch irgend einen Wert von ν befriedigt werden. Andererseits ist für jedes ν das zweimalige Integral

$$\int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f_\nu(x, y) dy = 0$$

für alle Werte x, und es liefert die Folge den richtigen Wert. Führt man hingegen die zweimalige Integration in umgekehrter Reihenfolge aus, so ist das bezügliche zweimalige Integral sogar gleichmäfsig convergent. Wenn man nun aber der Function $f(x, y)$ auch in allen Punkten

$$y = \frac{2\mu + 1}{2^\nu}, \qquad x \leqq \frac{1}{2^\nu}$$

den Wert ∞ erteilt, so ist keines der beiden zweimaligen Integrale regelmäfsig convergent, und doch gilt der Satz, und das Integral ist Null.

Für die Anwendungen und die praktische Auswertung wird man zweckmäfsig eine überall dichte Menge $X = \{x_\nu\}$ auswählen, für die man die Function $\Phi(x)$, resp. $\varphi(x, y)$ beherrscht. In dem obigen Beispiel ist insbesondere die Menge X irgend eine überall dichte Teilmenge der irrationalen Werte x, und in jedem dieser Punkte ist $\int f(x_\nu, y) dy = 0$, also auch $\Phi(x) = 0$ und daher auch das zweimalige Integral.

Das hiermit gewonnene Resultat deckt sich der Sache nach mit derjenigen Fassung, in der kürzlich de la Vallée Poussin den bezüglichen Satz ausgesprochen hat[1]). Er schreibt

$$\int\int f(x, y) dH = \underline{\int} dx \underline{\int} Mf(x, y) dy,$$

wo $Mf(x, y)$ die untere Grenze von $f(x, y)$ mit Bezug auf ein den Punkt x, y umgebendes kleines Gebiet bedeutet. Das Beweisverfahren, das er wählt, ist jedoch einerseits nicht einwandsfrei[2]), andererseits aber sehr complicirt, weil er bis zum Schlufsresultat mit den verschiedenen Grenzwerten operirt, die dem oberen und unteren Integral entsprechen[3]).

1) Journ. de math. (5) Bd. 5, S. 202 (1899).

2) Das a. a. O. unter 11 ausgesprochene Theorem trifft nicht zu, was man durch einfache Beispiele belegen kann.

3) Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, dafs ein Satz, wie der Satz IX, auch bestehen kann, falls für eine Function $f(x, y)$ ein convergentes oberes und unteres Integral so existirt, dafs beide verschieden sind. Es ist dies immer und nur dann der Fall, wenn für irgend ein k der Inhalt $J(K) > 0$ ist. Es ist dann auch, falls $k' > k$ ist, $J(K') > 0$, und in der Reihe (8)

Einen selbständigen Beweis des obigen Satzes hat auch C. Jordan in seinem cours gegeben; er enthält jedoch eine beschränkende Bedingung, die für ihn nicht notwendig ist[1]). Der Beweis bedarf nämlich der Annahme, dafs die Menge K_x der Unendlichkeitspunkte kein Stück einer Geraden enthalten kann, die einer Axe parallel ist, während ihr ein Geradenstück anderer Richtung oder gar ein Curvenstück sehr wohl angehören könnte. Für den einfachen Fall, dafs Punkte von K_∞ nur auf dem Umfang von H liegen, findet sich der Satz auch bei Stolz bewiesen[2]).

Die vorstehenden Erörterungen lassen meines Erachtens die Definition de la Vallée Poussin's als die ebenso naturgemäfse, wie zweckmäfsige Grundlage für die Behandlung der uneigentlichen Integrale erkennen. In der That dürften die Vorzüge dieser Definition durch die einfache Art, wie man mit ihnen die Theorie des Doppelintegrals behandeln kann, am besten ins Licht treten.

12. Cauchy[3]) hat wohl zuerst bemerkt, dafs bei einem bedingt convergenten uneigentlichen Doppelintegral der Satz VIII nicht zutrifft, sondern das Resultat der zweimaligen Integration von der Reihenfolge abhängig ist. Du Bois[4]) hat sodann diesem Übelstand durch kritische Begrenzung der Punkte von K_x abhelfen wollen, doch hat diese Idee, die an Cauchy's Begriff der singulären Integrale anknüpft, keinen Anklang finden können. Präcise Sätze über bedingt convergente Doppelintegrale hat zuerst de la Vallée Poussin aufgestellt[5]), unter besonderen Bedingungen für die Menge K_x. Doch darf es unterbleiben, auf sie näher einzugehen; denn C. Jordan hat in seinem cours den Satz ausgesprochen, dafs es bedingt convergente Doppelintegrale gar nicht geben kann[6]). Andererseits haben wir die Existenz bedingt convergenter einfacher Integrale zugelassen, freilich mit einem Hinweis auf eine spätere Erörterung. Es fragt sich, worin denn hier der Unterschied zwischen beiden Gattungen von Integralen begründet ist.

Hat die Function $f(x, y)$ ein uneigentliches Integral im Gebiet H, so kann man die Forderung stellen, dafs diese Function auch über jedes Teilgebiet H' von H ein Integral besitze. In diesem all-

---

sind von einem bestimmten ν an das obere und untere Integral verschieden. Dann stellen die Reihen (8) resp. (9) je zwei verschiedene Folgen convergenter Werte vor, für je zwei entsprechende besteht aber wieder die Gleichheit.

1) Cours etc. (2) II, S. 67 u. 88. Die oben erwähnte Bedingung ist in § 86 unter Nr. 3 enthalten. Übrigens umfafst der Beweis Jordan's auch den Fall eines unendlich grofsen Gebiets.

2) Grundzüge, III, S. 134.

3) Oeuvres (1) Bd. 1, S. 314.

4) Journ. f. Math. 94, S. 280.

5) Journ. de Liouv. (4) Bd. 8, S. 455 ff.

6) Cours etc. (2) II, S. 87.

gemeinen Umfang ist die Forderung allerdings auch für einfache bedingt convergente Integrale nicht erfüllt. Wenn dagegen das Teilgebiet H' als einfach zusammenhängend angenommen wird, so ist die Forderung für das einfache Integral erfüllt, für das Doppelintegral jedoch nicht, und dies bewirkt die bei beiden auftretende Verschiedenheit. Um diesen Sachverhalt in präciser Form zum Ausdruck zu bringen, geht man zweckmäfsig wieder auf gewisse Gebietsmengen zurück, die zu der Function $f(x, y)$ gehören, und zwar folgendermafsen.

Ist p_1 ein Stetigkeitspunkt, so dafs $f(p_1) > 0$ ist, so läfst sich um p_1 ein endlicher quadratischer Bereich legen, so dafs auch für alle seine inneren Punkte $f > 0$ ist. Dieser Bereich möge sich in derselben Weise ausdehnen, wie dies oben (S. 81) bewirkt wurde. Dabei soll es belanglos sein, wenn auf seinem Umfang einzelne Punkte auftreten, für die $f \leq 0$ ist. Es giebt aber für das Wachstum jeder Seite eine obere Grenze, so dafs auf ihr kein Intervall vorhanden ist, in dessen sämtlichen Punkten $f \leq 0$ ist. Der so um p_1 bestimmte Bereich sei δ_1^+. Liegen aufserhalb δ_1^+ noch andere Stetigkeitspunkte von $f(x, y)$, in denen $f > 0$ ist, und ist p_2 einer von ihnen, so construiren wir um ihn einen analogen Bereich δ_2^+, u. s. w. Wir erhalten so eine Gebietsmenge $D^+ = \{\delta_\nu^+\}$, und es sei P_+ die Gesamtheit der Punkte, die im Innern oder auf dem Umfang aller Bereiche δ_ν^+ liegen. Mit den Stetigkeitspunkten $f(x, y) < 0$ können wir ebenso eine Gebietsmenge $D^- = \{\delta_\nu^-\}$ und eine Punktmenge P_- definiren. Es können nun noch Punkte resp. Gebiete vorhanden sein, in denen $f(x, y) = 0$ ist; in diesem Fall führen sie zu einer Menge $D^0 = \{\delta_\nu^0\}$ und einer Punktmenge P_0. Die Mengen D^+, D^-, D^0 müssen nun aber das Gebiet H überall dicht bedecken, und zwar so, dafs jeder innere Punkt von H entweder einer der drei Mengen P_+, P_-, P_0 angehört, oder aber Grenzpunkt mindestens zweier dieser Mengen ist. Hiermit haben wir die für die weiteren Schlüsse nötige Grundlage gewonnen[1]). Man kann nämlich jetzt Teilgebiete der Punktmengen P_- und P_0 so ins Auge fassen, dafs sie im Verein mit der Punktmenge P_+ oder einem Teil von ihr ein einfach zusammenhängendes Gebiet H' bilden, und da das Doppelintegral nur bedingt convergirt, so kann dies sogar so geschehen, dafs das bezügliche Doppelintegral in H' unendlich grofs ist.

Für einfache Integrale hingegen ist dies nicht mehr möglich. Die Intervallmengen D^+, D^-, D^0 existiren allerdings auch hier; wenn man aber Teilintervalle so wählt, dafs das über sie erstreckte Integral einen unendlichen Wert liefert, so müssen diese Intervalle immer sämtlich getrennt von einander liegen. Dies ist der Grund, aus dem

1) Für die genauere Analyse der geometrischen Begriffe auf Grundlage der Mengentheorie verweise ich auf den vierten Abschnitt.

C. Jordan zu dem Schlufs gelangt ist, dafs es bedingt convergente uneigentliche Doppelintegrale nicht giebt. Man sieht aber zugleich, dafs wenn man die Forderung des einfachen Zusammenhangs fallen läfst, die gleiche Auffassung den bedingt convergenten einfachen Integralen gegenüber Platz greift[1]). Dieser Auffassung hat kürzlich O. Stolz Ausdruck gegeben und infolge davon auch die Existenz des bedingt convergenten einfachen Integrals verneinen zu sollen geglaubt[2]). Mit anderen Worten: Verlangt man nicht allein, dafs auf jedem δ_ν ein Integral existirt, was bereits oben als eine notwendige Ergänzung der Definition für das bedingt convergente Integral erkannt wurde, sondern dafs auch auf jeder beliebigen Gruppe von Teilintervallen der δ_ν ein Integral existirt, so gelangt man auf Grund dieser Forderungen nur zu dem absolut convergenten einfachen Integral. Das absolut convergente Integral besitzt aber auch andererseits alle die einfachen Eigenschaften, die den eigentlichen Integralen eigentümlich sind, was einer näheren Ausführung nicht bedarf[3]).

Dafs die vorstehenden Betrachtungen über das Doppelintegral ohne Ausnahme auf vielfache Integrale übertragbar sind, ist evident,

---

1) Ein einfaches Beispiel ist das folgende. Man gehe von einer linearen Menge $D = \{\delta_\nu\}$ aus, die im Intervall $a \ldots b$ liegt, und bestimme innerhalb jedes δ_ν eine Function $f(x)$ folgendermafsen: Man teile δ_ν von der Mitte aus in Intervalle von der Länge

$$\varepsilon, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{9}, \ldots \frac{\varepsilon}{\mu^2}, \ldots,$$

so dafs ihre Summe δ_ν beträgt, und gebe $f(x)$ auf ihnen die Werte 1, $-2, +3, \cdots \pm \mu, \cdots$, so existirt für jedes δ_ν ein bedingt convergentes Integral, dessen Wert $2\varepsilon \lg 2$ ist. Nun lasse man das Intervall $a \ldots b$ um einen Endpunkt rotiren, und es möge $f(x, y)$ auf allen Punkten jedes so entstehenden Kreises denselben Wert haben, wie $f(x)$ in dem bezüglichen Punkt von $a \ldots b$. Dann kann man leicht einfach zusammenhängende Gebiete angeben, in denen das Integral unendlich ist. Giebt man aber den Teilen von δ_ν die Längen

$$\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2^3}, \frac{\varepsilon}{3^3}, \ldots \frac{\varepsilon}{\mu^3},$$

so erhält man absolut convergente Integrale. Falls D eine perfecte Menge T bestimmt, so existirt für das Doppelintegral eine perfecte Menge von Kreisen, die die Menge K_x darstellen. Man kann übrigens die Functionsbestimmung leicht so abändern, dafs sie aufser in K_x überall stetig ist.

2) Grundzüge, S. 144 und Ber. d. Wien. Akad. Bd. 108, II, S. 234. Der hierin ausgedrückte Gedanke geht auf Wirtinger zurück. Auch F. Hocevar hat schon die Unmöglichkeit der Teilung des Integrals in beliebige Teile hervorgehoben, Mon. f. Math. 4, S. 177 (1893).

3) Eine ausführliche Darlegung dieses Thatbestands giebt Stolz. Vgl. Grundzüge, Teil III, Cap. XVIII und Anhang, Cap. II.

da dies von allen den Begriffen und Sätzen gilt, auf denen ihre Beweise ruhen.

Ebenso begnüge ich mich mit dem Hinweis, dafs durch die Theorie des Doppelintegrals und der mehrmaligen Integrale auch die Differentiation eines Integrals nach einem Parameter in mengentheoretischer Hinsicht erledigt ist[1]).

Sechstes Capitel.

Der Fundamentalsatz der Integralrechnung.

Der Grundsatz der höheren Analysis drückt sich darin aus, dafs im allgemeinen differenziren und integriren umgekehrte Operationen sind. Dies trifft in vollem Umfang nicht mehr zu, falls man beliebige Functionen in Betracht zieht. Erstens kann der Satz, dafs das Integral $F(x)$ einer integrirbaren Function $f(x)$ wiederum $f(x)$ als Ableitung besitzt, Ausnahmen erleiden und ist durch den zutreffenden Sachverhalt zu ersetzen (1). Zweitens erleidet aber auch der Satz gewisse Ausnahmen, dafs, wenn $F(x)$ die Function $f(x)$ als Ableitung besitzt, aus $f(x)$ bis auf eine Constante immer wieder $F(x)$ durch Integration hervorgeht. Dieser sogenannte Fundamentalsatz der Integralrechnung wird naturgemäfs dann illusorisch, wenn die Ableitung $f(x)$ nicht integrirbar ist (3), er kann aber auch dann versagen, wenn $f(x)$ integrirbar ist.

Es ist du Bois-Reymond, der das Bedürfnis empfand, eine genaue Prüfung dieser Verhältnisse eintreten zu lassen, zumal im Hinblick darauf, dafs die Ableitung von $F(x)$ nicht in allen Punkten bestimmt zu sein braucht. Er bewies zuerst, dafs der Fundamentalsatz immer gilt, falls in jedem Punkt eine vordere und eine hintere Ableitung besteht und diese integrirbar ist. Bald darauf hat sich auch Dini in seinem Lehrbuch mit dem Satz beschäftigt und das Resultat du Bois' auf beliebige Functionen, deren Ableitungswerte immer endlich und integrirbar sind, ausgedehnt; so dafs der Satz für jede derartige Ableitung erfüllt ist (2).

Anders liegen die Dinge, wenn die Ableitung $f(x)$ auch unendlich wird, so dafs $f(x)$ nur ein uneigentliches Integral $F(x)$ besitzen kann. Hier besteht das bemerkenswerte Resultat, dafs sich die beiden oben gegebenen Definitionen des uneigentlichen Integrals dem Fundamentalsatz gegenüber durchaus verschieden verhalten. Er gilt nur für die uneigentlichen Integrale erster Art, d. h. also, wenn die Menge der Unendlichkeitspunkte abzählbar ist, wie durch Arbeiten von

1) Vgl. hierüber insbesondere de la Vallée Poussin, Ann. de la Soc. sc. de Brux. XVIb, 150 (1892), sowie Hossenfelder, Programm, Strafsburg i. Westpr., 1891.

Hölder und Scheeffer nachgewiesen worden ist (5). Harnack hatte den Satz ursprünglich auf jedes uneigentliche Integral auszudehnen versucht, hat dies aber im Anschlufs an die eben genannten Untersuchungen selber richtiggestellt. Es sind die streckenweise constanten Functionen, die hier eine Rolle spielen, und auf deren Existenz Harnack gerade bei dieser Gelegenheit geführt wurde[1]).

Eine neue Untersuchungsrichtung ist auf diesem Gebiet von L. Scheeffer eingeschlagen worden (4). Spricht man den Fundamentalsatz dahin aus, dafs zwei Functionen $F(x)$ und $F_1(x)$, die überall dieselbe endliche Ableitung besitzen, sich nur um eine Constante unterscheiden können, so kann man fragen, unter welchen Bedingungen dies Geltung behält, wenn von den beiden Functionen $F(x)$ und $F_1(x)$ nicht mehr bekannt ist, dafs sie in allen Punkten dieselbe endliche Ableitung besitzen, wenn vielmehr eine Menge L von Ausnahmepunkten existirt, für die diese Beziehung nicht mehr erfüllt oder nicht bekannt ist (5). Wie Scheeffer gezeigt hat, bleibt der Satz bestehen, falls die Menge L abzählbar ist (6), aber nicht, falls sie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat. Ist L insbesondere eine nirgends dichte Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, so braucht die Differenz beider Functionen wiederum keine Constante zu sein, sondern kann eine streckenweise constante Function bilden.

Dem obigen Fundamentalsatz gehen die Sätze von Schwarz und du Bois parallel, die ein Kriterium aufstellen, wann eine stetige Function eine lineare Function ist (7). Auch hier kann man fragen, wann dieser Satz durch Ausnahmemengen nicht beeinträchtigt wird. Diese Frage hat insbesondere für die Theorie der trigonometrischen Reihe Wichtigkeit, ihre teilweise Beantwortung ist bereits im Schlufs des vierten Capitels enthalten. Ebenso lassen sich die obigen Fragestellungen auf mehrmalige resp. mehrfache Integrale, insbesondere auf Doppelintegrale übertragen (8).

1. Es werde, wenn $f(x)$ irgend eine eigentlich oder uneigentlich integrirbare Function ist,

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

gesetzt, so folgt aus der Integraldefinition, welche Function $f(x)$ auch immer sei, dafs $F(x)$ eine stetige Function von x ist. Ist auch $f(x)$ eine stetige Function, so besitzt die Integralfunction $F(x)$ eine zweite grundlegende Eigenschaft: sie hat in jedem Punkt x eine bestimmte Ableitung $F'(x)$, deren Wert gleich $f(x)$ ist. Diese Eigen-

1) Dies ist auch der Grund dafür, dafs mehrere der von Harnack in den Math. Ann. 19 u. 23 ausgesprochenen Sätze nicht zutreffen; vgl. S. 145 dieses Berichts. Dies trifft auch seine Resultate über die trigonometrische Reihe.

schaft kann jedoch nicht mehr bestehen bleiben, wenn $f(x)$ eine beliebige punktweise unstetige Function ist. Wird nämlich wieder die möglichst stetige Function $\varphi(x)$ herangezogen (S. 134), also

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

gesetzt, so liefern gemäfs S. 181 $f(x)$ und $\varphi(x)$ dieselbe Integralfunction $F(x)$, und hieraus folgt deutlich, dafs in diesem Fall der obige Satz über den Wert der Ableitung von $F(x)$ durch eine allgemeinere Formulirung zu ersetzen ist. Andererseits erhält diese Formulirung durch Einführung der Function $\varphi(x)$ ihren einfachsten Ausdruck. In der That kommt ja für die Ableitungswerte nur $\varphi(x)$ in Frage, während die in $\psi(x)$ eingehenden äufserlichen Unstetigkeiten in dieser Hinsicht belanglos sind. Auf Grund der gewöhnlichen Betrachtungen, die auf dem Mittelwertsatz beruhen, folgt nun sofort, dafs $F(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt von $\varphi(x)$ eine bestimmte Ableitung

$$F'(x) = \varphi(x)$$

besitzt, in jedem Punkt, wo ein Grenzwert $\varphi(x+0)$ resp. $\varphi(x-0)$ existirt, eine bestimmte vordere oder hintere Ableitung

$$F'_{+}(x) = \varphi(x+0), \quad F'_{-}(x) = \varphi(x-0),$$

wenn dagegen ein solcher Grenzwert fehlt, so existiren zwei vordere resp. zwei hintere Ableitungen, die durch die bezüglichen Unbestimmtheitsgrenzen von $\varphi(x+0)$ resp. $\varphi(x-0)$ dargestellt werden. Durch Einführung von $\varphi(x)$ gelangt man also zu den wirklichen Werten der Ableitungen.

Fassen wir nun wieder die Function $\varphi(x)$ an den Unstetigkeits punkten als mehrwertig auf und erinnern uns, dafs das Integral von $\varphi(x)$ sich nicht ändert, wenn man den Wert, den man der Function an einer Unstetigkeitsstelle x' erteilt, auf der zu x' gehörigen Unstetigkeitsstrecke $\varkappa'$ (S. 132) beliebig wählt, so folgt sofort, dafs für jede Ableitung $DF(x)$ die Gleichung

$$\int_a^x DF(x) = \int_a^x \varphi(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x)$$

besteht, und es ergiebt sich der folgende Satz:

I. Ist $f(x)$ eine integrirbare Function und $F(x)$ ihre Integralfunction, so sind die vier Ableitungen von $F(x)$ ebenfalls integrirbar und liefern wieder $F(x)$ als Integralfunction.

Man kann übrigens diesen Satz einfacher dahin aussprechen, dafs die Differenz $f(x) - DF(x)$ eine integrirbare Nullfunction ist, und zwar für jede der vier Ableitungen $DF(x)$.

Die vorstehend abgeleiteten Beziehungen zwischen einer integrirbaren Function $f(x)$, ihrer Integralfunction $F(x)$ und deren Ableitungen dürften wohl zuerst in den einschlägigen Darstellungen von Thomae und Dini auftreten; übrigens findet sich an diesen Stellen insofern eine Ungenauigkeit, als behauptet wird, dafs an einem Punkt, wo $f(x)$ links oder rechts eine Unstetigkeit zweiter Art besitzt, das Integral eine bestimmte Ableitung nicht besitzen kann[1]), und diese Bemerkung ist auch von den späteren Autoren, die über diesen Gegenstand gearbeitet hatten, nicht corrigirt worden[2]). Solche Stellen können aber sehr wohl Stetigkeitsstellen von $\varphi(x)$ sein und damit eine bestimmte Ableitung zulassen.

Ich bemerke endlich, dafs die vorstehenden Sätze sowohl für eigentliche, wie für uneigentliche Integrale Geltung haben, da sie nur auf dem Mittelwertsatz und auf der Existenz der Function $\varphi(x)$ beruhen, die ja auch bei den uneigentlichen Integralen existirt.

2. Falls die stetige Function $F(x)$ in jedem Punkt eine bestimmte endliche Ableitung $f(x)$ besitzt, so giebt es einen dritten für den Integralbegriff grundlegenden Satz, der in der Gleichung

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx \tag{1}$$

seinen Ausdruck findet. Falls die Ableitung von $F(x)$ nicht mehr bestimmt ist, gilt dieser Satz in allgemeinerem Sinn für jede Ableitung $DF(x)$ von $F(x)$, falls diese endlich und integrirbar ist, d. h. es besteht das Theorem:

II. Ist die Function $F(x)$ im Intervall $a \cdots b$ stetig, und ist eine ihrer vier Ableitungen stets endlich und integrirbar, so gilt es von allen, und jede dieser vier Ableitungen liefert wieder $F(x)$ als Integralfunction.

Diesen Satz, der im wesentlichen von du Bois[3]) stammt, kann man folgendermafsen beweisen. Man nehme auf $a \cdots b$ die Teilpunkte $x_1, x_2, \cdots x_\nu$ beliebig an, alsdann ist offenbar

$$F(b) - Fa) = (x_1 - a)\frac{F(x_1) - F(a)}{x_1 - a} + (x_2 - x_1)\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} + \cdots$$
$$\cdots + (b - x_\nu)\frac{F(b) - F(x_\nu)}{b - x_\nu}.$$

1) Thomae, Einleitung etc., S. 17; Dini, Grundlagen etc., S. 369.

2) Thomae selbst hat allerdings später in einem Falle auf die mögliche Existenz einer Ableitung an solchen Punkten hingewiesen (Gött. Nachr. 1893, S. 698), ohne jedoch die obige Formulirung zu erreichen.

3) Abh. d. Münch. Ak. XII, I, S. 161 (1876); sowie Math. Ann. 16, S. 115 (1880). Vgl. auch Dini, Grundlagen etc., S. 378 (1878), sowie Pasch, Math. Ann. 30, S. 153.

Nun sei $DF(x)$ wieder irgend eine der vier Ableitungen von $F(x)$; alsdann ist bekanntlich [1])

$$g \leqq \frac{F(x_1) - F(a)}{x_1 - a} \leqq l,$$

wo g die untere Grenze und l die obere Grenze von $DF(x)$ im Intervall $a \cdots x_1$ darstellt. Daraus folgt aber sofort

$$G \leqq F(b) - F(a) \leqq L,$$

und da nun $DF(x)$ als integrirbar angenommen wurde, so convergiren, falls die Punkte $x_1, x_2, \cdots x_\nu$ im Intervall $a \cdots b$ überall dicht angenommen werden, G und L gemeinsam gegen das bezügliche Integral. Wird nun noch b durch x ersetzt, so folgt

$$\int_a^x DF(x) = F(x) - F(a). \tag{2}$$

Es giebt also auch in diesem Fall, von einer Constanten abgesehen, nur eine einzige Integralfunction.

3. Der vorstehende Satz schliefst zunächst den Fall aus, dafs die Ableitungen $DF(x)$ einer Function $F(x)$ überall endlich, aber nicht mehr integrirbar sind, sei es, dafs sie eine total unstetige oder eine punktweise unstetige Function darstellen, für die bei gewissem k der Inhalt $J(K) > 0$ ist. Die Frage, wie die Function $F(x)$ von ihren Ableitungen abhängt, bleibt natürlich bestehen, sie ist aber mittelst des Integralbegriffes nicht lösbar, doch sind in dieser Richtung nur wenige Schritte unternommen worden [2]). Es lassen sich aber jedenfalls grofse Klassen von Functionen angeben, für die dieser Sachverhalt zutrifft. Dies gilt natürlich zunächst von den streckenweise constanten Functionen, für die $J(T) > 0$ ist, andererseits aber auch von allen überall oscillirenden Functionen und denen, die sich auf solche reduciren lassen. Für eine überall oscillirende Function ist nämlich in jedem Intervall $g < 0$ und $l > 0$, also auch $G < 0$ und $L > 0$, und da es stets Intervalle $a \cdots b$ giebt, so dafs

1) Der bezügliche Satz wurde von Dini zuerst ausgesprochen, Atti dell' Acc. dei Lincei (3) 1, S. 131 (1877) und Grundlagen, S. 264. Vgl. auch du Bois, Math. Ann. 16, S. 119 (1880).

2) Für die nicht integrirbare Ableitung $F'(x)$ läfst sich jedenfalls ein oberes Integral $O(x)$ und ein unteres $U(x)$ definiren. Beide sind stetige Functionen der oberen Grenze und besitzen ähnliche Eigenschaften wie das eigentliche Integral. Man kann z. B. zeigen, dafs in den Stetigkeitspunkten von $F'(x)$ sowohl $O(x)$ wie $U(x)$ den Functionswert $F'(x)$ als Ableitung besitzen. Ferner zeigt man leicht, dafs $F(x) - F(a)$ zwischen $O(x)$ und $U(x)$ enthalten ist; im besondern kann $O(x) - U(x)$ eine streckenweise constante Function sein u. s. w. Diese Sätze gab Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 340ff. (1881). Sie lassen sich ausdehnen auf den Fall, dafs eine Ableitung $F'(x)$ nicht existirt.

$F(b) \gtrless F(a)$ ist, so ist damit die Behauptung erwiesen. Dieser schon von Dini bemerkte Umstand[1]) führt zu folgendem Satz:

III. Die Ableitungen einer überall oscillirenden Function $F(x)$ sind niemals integrirbar.

Daraus darf man jedoch nicht schliefsen, dafs diese Ableitungen immer total unstetige Functionen darstellen. Wir haben ja bereits erwähnt (S. 148), dafs, wenn die Function $F(x)$ in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung $F'(x)$ besitzt, $F'(x)$ eine punktweise unstetige Function ist. Wir schliefsen daher weiter, dafs es für sie Werte k geben mufs, so dafs für die Menge K der Punkte $\omega \geqq k$ der Inhalt $J(K) > 0$ ist[2]).

Dagegen folgt aus dem Satz I von S. 148, dafs wenn eine monotone Function, die nicht aus einer unendlich oft oscillirenden Function entstanden ist, in jedem Punkt eine bestimmte vordere oder hintere Ableitung besitzt, die Ableitung stets integrirbar ist.

4. Der Satz II schliefst ferner auch den Fall aus, dafs $F(x)$ eine integrirbare Ableitung besitzt, die nicht mehr überall endlich ist, und es fragt sich, wie weit alsdann sein Geltungsbereich geht. Um dies ins rechte Licht zu setzen, ist es zweckmäfsig, der Untersuchung eine Wendung zu geben, die auf Scheeffer zurückgeht. Unser Satz ist gleichbedeutend mit dem sogenannten Fundamentalsatz der Integralrechnung, der in seiner einfachsten Form besagt, dafs zwei in einem Intervall $a \cdots b$ stetige Functionen $F(x)$ und $\Phi(x)$, die überall den gleichen endlichen Differentialquotienten besitzen, sich nur um eine Constante unterscheiden können. Nun sei eine Menge L von Ausnahmepunkten vorhanden, für die die Endlichkeit und Gleichheit der Ableitungen nicht mehr behauptet werden kann, sei es, dafs man über die Differentialquotienten nichts weifs, sei es, dafs sie nicht endlich sind oder gar nicht existiren, so ist die Frage, ob resp. wann der Schlufs auf die Constanz von $F(x) - \Phi(x)$ dann noch gestattet ist. Hierauf läfst sich freilich eine abschliefsende Antwort noch nicht geben. Wie bei der Discussion über den Wert der Ableitungen liegt auch hier die Schwierigkeit darin, dafs man es, der Natur der Sache nach, mit Mengen zu thun hat, die nicht abgeschlossen sind.

Mit Scheeffer soll die Untersuchung von vornherein so verallgemeinert werden, dafs statt der Differentialquotienten irgend eine

1) Grundlagen etc., S. 383.

2) Ein Beispiel einer nicht integrirbaren Function, für die überall eine bestimmte Ableitung $F'(x)$ existirt, giebt auch Volterra (Giorn. di mat. 19, S. 335). Er setzt über jedes Intervall δ einer Menge T, für die $J(T) > 0$ ist, von links und rechts ein Stück einer Function der Gattung $y = x^2 \sin {}^1/x$, und zwar vom Punkt $x = 0$ bis zum ersten Maximum. Für diese Function ist $F'(x) = 0$ in jedem Punkt von T, und sonst überall $F'(x)$ endlich, doch ist $F'(x)$ nicht integrirbar.

der vier Ableitungen in Betracht gezogen wird. Auch für sie besteht im einfachen Fall der Fundamentalsatz uneingeschränkt, nämlich der Satz:

IV. Hat für zwei im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Functionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ irgend eine der vier Ableitungen in jedem Punkte von $a \cdots b$ den nämlichen endlichen Wert, so können sich $F(x)$ und $\Phi(x)$ nur um eine Constante unterscheiden.

Da dieser Satz grundlegend für das folgende ist, so teile ich den Beweis Scheeffer's hier mit. Wir betrachten die Function

$$\Psi(x) = c(x-a) + F(x) - \Phi(x) - (F(a) - \Phi(a)),$$

und es seien $DF(x)$, $D\Phi(x)$, $D\Psi(x)$ die bezüglichen Ableitungen. Wird zunächst c als positive Constante vorausgesetzt, so beweist man zunächst, dafs $\Psi(x)$ im Intervall $a \cdots b$ nirgends negativ sein kann. Wäre nämlich ξ ein Wert des Intervalles $a \cdots b$, so dafs $\Psi(\xi) < 0$ wäre, so giebt es eine in $a \cdots \xi$ enthaltene obere Grenze ξ' aller derjenigen Werte, für die $\Psi(x)$ nicht negativ ist, und es folgt aus der Stetigkeit von $\Psi(x)$, dafs notwendig $\Psi(\xi') = 0$ ist. Es ist also $\xi' < \xi$, und es müfste für jeden Wert ξ'' des Intervalles $\xi' \cdots \xi$ die Relation

$$\Psi(\xi'') - \Psi(\xi') < 0$$

bestehen. Daraus würde aber weiter $D\Psi(\xi') \leqq 0$ folgen; da aber andererseits $D\Phi(x)$ und $D\Psi(x)$ beide überall endlich sind, so ist leicht ersichtlich, dafs $D\Psi(x) = c$ ist für jedes x. Damit ist bewiesen, dafs $\Psi(x)$ nirgends negativ sein kann, und da dies für beliebiges c gilt, so folgt weiter, dafs auch

$$F(x) - \Phi(x) - [F(a) - \Phi(a)]$$

nirgends negativ ist. Ebenso beweist man, dafs diese Differenz nirgends positiv sein kann, d. h. es ist

$$F(x) - \Phi(x) = F(a) - \Phi(a),$$

womit der Satz bewiesen ist.

5. Sei nun die Menge L der Ausnahmepunkte zunächst nirgends dicht, so bestimmt sie eine Menge $D = \{\delta\}$ punktfreier Intervalle und damit eine abgeschlossene Menge Q, in Bezug auf die L überall dicht ist. In jedem Intervalle δ besteht dann der Satz IV in der Weise, dafs die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ für jedes innerhalb δ gelegene Teilintervall δ' eine Constante ist, und man schliefst nun aus der Stetigkeit von $F(x) - \Phi(x)$, dafs dies auch für δ selbst der Fall ist. Gemäfs den Betrachtungen von S. 166 ist daher $F(x) - \Phi(x)$ entweder eine Constante, oder eine streckenweise constante stetige Function. Das erste ist notwendig der Fall, wenn $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}$ ist; das zweite kann nur dann der Fall sein, wenn $\mathfrak{l} = \mathfrak{c}$ ist. Also folgt:

V. Ist für zwei stetige Functionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ die Endlichkeit und Gleichheit entsprechender Ableitungen bis auf eine Menge L erfüllt, so ist die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ immer dann eine Constante, wenn die Menge L nirgends dicht, und die durch sie bestimmte abgeschlossene Menge abzählbar ist.

Nimmt man nun insbesondere wieder an, dafs die Ableitungen in L überall unendlich sind, so fliefst hieraus sofort die Thatsache, dafs der Satz III gilt; d. h.

VI. Ist $F(x)$ eine stetige Function, für die irgend eine ihrer Ableitungen $f(x)$ integrirbar ist und ein uneigentliches Integral erster Art bildet, so gilt die Gleichung

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Ist zweitens die Menge L nicht abzählbar, so genügt es, die in Q enthaltene perfecte Teilmenge T ins Auge zu fassen. Wenn nun T den Inhalt Null hat, und man weifs, dafs die entsprechenden Ableitungen $DF(x)$ und $D\Phi(x)$ überall endlich sind, so gilt der Fundamentalsatz. Dies ist eine unmittelbare Folge des Satzes II. Wird nämlich

$$\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$$

gesetzt, so ist $D\Psi(x)$ eine integrirbare Function mit verschwindendem Integral, und nach unserem Satz resp. nach Gl. 2) folgt jetzt

$$\int_a^x D\Psi(x) = \Psi(x) - \Psi(a) = 0,$$

womit die Behauptung erwiesen ist. Also folgt:

VII. Sind für zwei stetige Functionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ zwei entsprechende Ableitungen $DF(x)$ und $D\Phi(x)$ in allen Punkten des Intervalles $a \cdots b$ endlich, und ist ihre Gleichheit bis auf die Punkte einer Menge L bekannt, deren Inhalt Null ist, so ist in $a \cdots b$ die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ eine Constante.

Derselbe Schlufs gilt übrigens aus denselben Gründen auch dann noch, wenn die Übereinstimmung der Ableitungen nur so bekannt ist, dafs die möglichen Differenzen eine integrirbare Nullfunction allgemeinster Art bilden[1]).

Sind dagegen die Ableitungen in den Punkten der nirgends dichten Menge L nicht mehr überall endlich, oder ist $J(L) > 0$, so hört die Anwendbarkeit des Fundamentalsatzes wirklich auf. In

1) Vgl. Ascoli. Rend. dell' Ist. Lomb. (2) 12, S. 215.

diesem Falle kann die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ möglicherweise auch eine streckenweise constante Function sein. Die Auseinandersetzungen von Cap. 4 lehren nun aber, daſs dieser hier nur als möglich erkannte Fall auch wirklich zutreffen kann. Denn wir haben (S. 171) gesehen, daſs jede streckenweise constante Function $T(x)$, für die $J(T) = 0$ ist, eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt, an der eine vordere oder hintere Ableitung unendlich groſs ist; wir haben weiter gesehen, daſs es, falls $J(T) > 0$ ist, Functionen $T(x)$ geben kann, die in allen Punkten von T endliche Ableitungswerte besitzen. Es sind also die dortigen Resultate in Übereinstimmung mit den hier gefundenen. Auch hier aber ist zu sagen, daſs die bisherigen Untersuchungen zu hinreichenden Kriterien für die Giltigkeit des Fundamentalsatzes noch nicht geführt haben und über die früheren Resultate nicht hinausführen. Wir schlieſsen mit folgender Aussage:

VIII. Ist $F(x)$ eine stetige Function, für die eine ihrer Ableitungen $f(x)$ integrirbar ist und ein uneigentliches Integral zweiter Art liefert, so gilt die Relation

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a) + T(x) - T(a),$$

wo $T(x)$ eine gewisse streckenweise constante Function ist.

Hierin findet der Unterschied zwischen den beiden Gattungen uneigentlicher Integrale seinen einfachsten Ausdruck.

6. Es ist endlich noch der Fall zu erledigen, daſs die Menge L überall dicht ist. Für diesen Fall ist bisher nur ein einziger Satz bekannt, und zwar der folgende:

IX. Ist die Menge L der Ausnahmepunkte abzählbar, und weiſs man, daſs von den beiden Ableitungen $DF(x)$ und $D\Phi(x)$ an jedem Punkt von L mindestens eine endlich ist, so gilt der Fundamentalsatz.

Zum Beweise führen wir eine Function $\Psi_c(x)$ ein durch die Gleichung

$$\Psi_c(x) = cx + F(x) - \Phi(x),$$

wo zunächst wieder c positiv sein möge. Es folgt zunächst, daſs für jeden Punkt x, der nicht zur Menge L gehört, $D\Psi_c(x) = c$ ist. Wir nehmen nun wieder an, es gäbe einen Wert ξ, so daſs

$$F(\xi) - \Phi(\xi) - (F(a) - \Phi(a)) = -m$$

wäre, wo $m > 0$ ist, und bestimmen jetzt c so, daſs für $m > n > 0$

$$\Psi_c(\xi) - \Psi_c(a) = c(\xi - a) - m < -n$$

ist, was stets möglich ist. Im Intervalle $a \cdots \xi$ giebt es nun wieder eine obere Grenze ξ_c derjenigen Werte x, für die $\Psi_c(x) - \Psi_c(a) \geq -n$ ist, und es folgt wie oben, daſs wegen der Stetigkeit von $\Psi_c(x)$

$$\Psi_c(\xi_c) - \Psi_c(a) = -n$$

ist, und dafs für jeden Punkt ξ'' des Intervalls $\xi_c \cdots \xi$

$$\Psi_c(\xi'') - \Psi_c(\xi_c) < 0$$

ist. Daraus folgt wiederum $D\Psi_c(\xi_c) \leqq 0$, und dies ist nur so möglich, dafs ξ_c ein Punkt der Menge L ist.

Hält man m und n fest, so kann man die Constante c innerhalb eines gewissen continuirlichen Bereichs beliebig variiren. Ist c' ein anderer Wert von ihr, so gehört dazu ein Wert $\xi_{c'}$, für den die Gleichung

$$\Psi_{c'}(\xi_{c'}) - \Psi_c(a) = -n$$

bestehen müfste, und von dem man leicht beweist, dafs er von ξ_c verschieden ist. Die Menge $L = \{\xi_c\}$ müfste also die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, während sie doch abzählbar ist. Damit ist dargethan, dafs die Annahme $m > 0$ unzulässig ist; ebenso zeigt man die Unzulässigkeit von $m < 0$, woraus der Satz wiederum folgt.

Dieser Satz hat eine bemerkenswerte praktische Consequenz. Es folgt aus ihm, dafs der Schlufs auf die Constanz der Differenz $F(x) - \Phi(x)$ immer dann zulässig ist, falls die Gleichheit entsprechender Ableitungen für alle irrationalen Punkte eines Intervalls bekannt ist. Dagegen ist er nicht mehr erlaubt, falls diese Übereinstimmung nur für alle rationalen, resp. jede andere überall dichte und abzählbare Menge besteht. Um dies nachzuweisen, hat man nur zu zeigen, dafs man jeden rationalen Punkt als inneren Punkt eines Intervalles einer Menge $D = \{\delta\}$ betrachten kann, die eine perfecte Menge T bestimmt; denn alsdann wird die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ eine zu dieser Menge gehörige streckenweise constante Function sein können. Eine solche Intervallmenge wird aber durch das früher erörterte Beispiel einer Borel'schen Menge dargestellt (S. 104).

Scheeffer knüpft hieran die Bemerkung, dafs die Sätze der Integralrechnung fehlerhaft sein würden, wenn man als Bereich der unabhängigen Variablen die rationalen Zahlen zu Grunde legte, wie dies den Tendenzen Kronecker's in ihrer strengeren Form entsprechen würde. Falls man dies aber doch thut, müfste man wieder den Begriff der gleichmäfsigen Differenzirbarkeit einführen, in Analogie mit dem, was wir oben für den Stetigkeitsbegriff des näheren ausgeführt haben (S. 120).

Die hiermit für einen speciellen Fall berührte Möglichkeit, dafs die Ausnahmemenge L überall dicht und nicht abzählbar ist, hat eine Behandlung allgemeiner Tragweite noch nicht erfahren.

7. Die wichtige Beziehung, die zwischen dem Fundamentalsatz der Integralrechnung und den streckenweise constanten Functionen besteht, überträgt sich auf diejenigen dem Fundamentalsatz analogen

Sätze, in denen höhere Ableitungen auftreten. Hier ist in erster Linie der Satz von Schwarz[1]) zu erwähnen, dafs eine stetige Function $F(x)$ eine lineare Function ist, falls überall der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon)-2F(x)+F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

den Wert Null hat, sowie die verallgemeinerte Form des Satzes, die auf du Bois zurückgeht[2]). Um sie darzustellen, führt man zweckmäfsig für jede Stelle x die Unbestimmtheitsgrenzen $O(x)$ und $U(x)$ des obigen Quotienten ein und definirt eine Function $f(x)$ so, dafs sie überall einen zwischen $O(x)$ und $U(x)$ liegenden Wert hat. Wenn dann diese Function $f(x)$ überall endlich und integrirbar ist, was immer nur dann der Fall ist, wenn die Differenz $O(x) - U(x)$ eine integrirbare Nullfunction darstellt, so kann sich gemäfs dem Satz von du Bois das zweimalige Integral von $f(x)$ von der Function $F(x)$ nur um eine lineare Function unterscheiden. Dieser Satz hat bekanntlich für die Theorie der trigonometrischen Reihe Wichtigkeit. Er hat durch O. Hölder[3]) eine neue und zwingende Begründung erfahren.

Man kann wieder fragen, inwieweit diese Sätze Geltung behalten, falls eine Menge L von Ausnahmepunkten existirt. Für den Fall, dafs die Menge nirgends dicht ist, läfst sich die Antwort leicht geben. Zunächst mufs die Function auf jedem zur Menge L gehörigen Intervall δ linear sein. Daraus allein läfst sich aber ein weiterer Schlufs hier nicht ziehen, selbst wenn die Menge L endlich ist. Der Fall, der hier allein interessirt, ist derjenige, dafs die Function in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzt; dieser Fall hat aber schon früher seine Erledigung gefunden. Nur wenn L abzählbar ist, liefs sich gemäfs Satz IX von S. 175 schliefsen, dafs die Function im Gesamtintervall linear ist.

Der Fall, dafs die Menge L überall dicht ist, ist noch nicht behandelt worden.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich auch auf mehrmalige Integrale und höhere Differentialquotienten übertragen, ohne jedoch zu neuen Fragestellungen principieller Natur Veranlassung zu geben[4]).

8. Die Beziehungen zwischen einer Function $f(x)$ und ihrer Integralfunction $F(x)$ lassen sich auf Functionen mehrerer Variablen ausdehnen; einige Andeutungen hierüber dürften genügen.

1) Journ. f. Math. 72, S. 141.

2) Abh. d Münch. Ak. XII, S. 141 ff. (1879). Ascoli beweist den Satz für den Fall, dafs $O(x)$ und $U(x)$ integrirbare Nullfunctionen sind. (Ann. di mat. (2) 7, S. 290.) In diesem Fall ist der Satz evident.

3) Math. Ann 24, S. 183. Vgl. auch Harnack, Math. Ann. 24, S. 241.

4) Diese Ausdehnung hat Harnack durchgeführt, Math. Ann. 23, S. 270 und 24, S. 247. Vgl. übrigens die Anm. 1 auf S. 145.

Zunächst wird es wieder zweckmäfsig sein, die Function $f(x, y)$ durch die zugehörige, möglichst stetige Function $\varphi(x, y)$ zu ersetzen, die sich ergiebt, wenn man die Function $f(x, y)$ nur für die Stetigkeitspunkte definirt denkt und sie dann auf das Gesamtgebiet erweitert, so dafs $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ sich nur um eine integrirbare Nullfunction unterscheiden können. Alsdann ist

$$F(x, y) = \int_a^x \int_b^y f(x, y)\, dH = \int_a^x \int_b^y \varphi(x, y)\, dH,$$

und es bestimmt daher auch in diesem Fall die Function $\varphi(x, y)$ die wirklichen Werte der Ableitungen von $F(x, y)$. Insbesondere ist in jedem Stetigkeitspunkt von $\varphi(x, y)$ eine partielle Ableitung nach x, eine nach y und eine einzige nach x und y stets vorhanden. An den Unstetigkeitspunkten von $\varphi(x, y)$ hingegen unterliegen die Ableitungen von $F(x, y)$ andern Gesetzen, die von der Art der Unstetigkeit abhängen[1]).

Man kann auch hier Betrachtungen anstellen, die denen über den Fundamentalsatz parallel gehen, insbesondere wieder fragen, wann der Schlufs auf die Constanz der Differenz $F(x, y) - \Phi(x, y)$ bestehen bleibt, vorausgesetzt, dafs im allgemeinen $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$ die gleichen partiellen Ableitungen besitzen, und dafs diese bis auf eine Menge L von Ausnahmepunkten den bezüglichen fundamentalen Sätzen genügen. Ist diese Menge zunächst nirgends dicht, so kommt es auf die abgeschlossene Menge Q an, die durch die zu L zugehörige Gebietsmenge $D = \{\delta\}$ bestimmt wird. Ist sie abzählbar, so müssen gemäfs S. 85 immer zwei Bereiche δ' und δ'' benachbart sein, und der Schlufs bleibt in Kraft; ist sie nicht abzählbar, so kann wiederum $F(x, y) - \Phi(x, y) = T(x, y)$ sein, wo $T(x, y)$ eine gebietsweise constante Function darstellt.

Siebentes Capitel.

Die Convergenz der Reihen und die Functionsfolgen.

Die Bestimmung einer Function durch eine Fundamentalreihe oder Folge von Functionen bildet eine der fundamentalsten Definitionsmethoden der gesamten Analysis. Wir begegnen ihr vielfach auch da, wo sie als Grundlage der Darstellungsweise nicht so unmittelbar zu Tage tritt. Zunächst weise ich auf die vielfach benutzte Methode hin, Functionen mit Ausnahmeerscheinungen dadurch zu bilden, dafs

1) Freilich kann der Unstetigkeitscharakter von $\varphi(x, y)$ ein weit mannigfaltigerer sein, als der einer Function einer Variablen. Vgl. S. 135.

man den Grenzwert geeigneter Functionsausdrücke in Betracht zieht[1]). Dieselbe Darstellungsweise ist es aber auch, die in der Bestimmung einer Function durch eine überall dichte Menge vorgeschriebener Werte zum Ausdruck kommt, insbesondere also auch bei derjenigen Construction stetiger Functionen, die in Cap. III und IV ausgeführt wurde. Immer handelte es sich ja darum, die Functionswerte an einer Menge X_ν sich mehr und mehr häufender Punkte so vorzuschreiben, dafs die Function, die dem zugehörigen Polygonzug entspricht, in der Grenze in eine Function mit gewissen Eigenschaften übergeht. Dieser einfache Grundgedanke ist es auch, der in dem Satz von Weierstrafs zum Ausdruck kommt, dafs eine stetige Function $f(x)$ durch eine Reihe ganzer rationaler Functionen gleichmäfsig approximirt werden kann. Denn da sich ein Intervall $a \cdots b$ immer so in eine endliche Zahl von Teilen zerlegen läfst, dafs in jedem die Gesamtschwankung der Function unter einer Gröfse σ bleibt, so kann man sich einer stetigen Function durch ein ihr eingeschriebenes Polygon von wachsender Seitenzahl gleichmäfsig annähern; und so elementar diese Bemerkung ist, so wichtig scheint sie mir doch durch den Umstand zu werden, dafs C. Runge[2]) und ganz kürzlich O. Lebesgue[3]) von ihr aus auf einfachen und fast elementaren Wegen zu dem analytischen Ausdruck geeigneter ganzer Functionen resp. Polynome, die gegen die stetige Function $f(x)$ convergiren, gelangt sind[4]).

Bei dieser Auffassung ist zwischen derjenigen Definition einer Function, die auf Fixirung ihrer Werte an einer abzählbaren, überall dichten Menge beruht, und derjenigen, die in ihrer Approximation durch eine abzählbare Menge analytisch gegebener Functionen besteht, kein wesentlicher Unterschied mehr, und wenn z. B. Dini zu der von ihm aufgestellten Klasse nirgends differenzirbarer Functionen dadurch gelangt, dafs er sie durch eine unendliche Reihe überall stetiger und differenzirbarer Functionen darstellt, so ist dies der Sache nach durchaus die nämliche Methode wie diejenige, die den Betrachtungen von Cap. IV zu Grunde liegt. In der That knüpft ja auch das Resultat Dini's an die nämlichen Quotienten $s_N : t_N$ an, die oben in erster Linie in Frage kamen.

Diesen Ausführungen möchte ich gern eine Stelle gewähren, da sie mir geeignet scheinen, die Wertschätzung der dort für die Analyse

1) Vgl. z. B. Thomae, Einleitung etc., S 4 ff., du Bois, Math. Ann. 7, S. 241, u. a. Eine grofse Zahl solcher Beispiele enthalten die Anmerkungen zu dem Pringsheim'schen Artikel II, A, 1 der Encyklopädie der math. Wiss.

2) Acta math. 7, S. 387.

3) Bull. des Scienc. (2) Bd 22, S. 278.

4) Die obige Überlegung bildet auch den Ausgangspunkt der mehrfach erwähnten Arbeit von Brodén im Journ. f. Math. Bd. 118, S. 1.

der Functionen zu Grunde gelegten Darstellungsmethoden zu erhöhen. Was übrigens diese Methoden mit der Benutzung der Functionsfolgen als ihre wesentliche Eigenschaft gemein haben, ist der Umstand, dafs immer nur eine abzählbare Menge von Vorschriften benutzt wird, und dies natürlich so, dafs eine endliche Menge solcher Vorschriften zur Erkennung der bezüglichen Gesetzmäfsigkeit im allgemeinen genügt, in den einfachsten Fällen sogar eine einzige[1]). Weiter auf die vorstehend skizzirten Probleme einzugehen, liegt jedoch aufserhalb des Rahmens dieses Berichts.

Die Darstellung von Functionen durch Reihen kommt hier zunächst in der Hinsicht ausführlicher in Betracht, dafs man mit ihnen Functionen bildet, die unendlich viele, selbst überall dicht liegende singuläre Eigenschaften haben (1). Hankel ist es bekanntlich, der diese Aufgabe zuerst in Angriff nahm, mit der ausgesprochenen Absicht, das von Riemann gegebene erste Beispiel zu verallgemeinern. Das von ihm zu diesem Behuf erfundene Princip, das den Namen des Princips der Verdichtung der Singularitäten trägt, hat einer Anregung von Weierstrafs zufolge durch Cantor eine Form erhalten, dafs es auf jede abzählbare Punktmenge anwendbar und überdies einwandsfrei ist. In neuerer Zeit ist das Princip von Brodén benutzt worden, um punktweise unstetige Nullfunctionen durch analytische Ausdrücke darzustellen, und zwar mit der Modification, dafs statt der Summenausdrücke gleichwertige Productausdrücke benutzt werden.

Eine zweite Frage, die ich hier behandle, betrifft die Punkte ungleichmäfsiger Convergenz einer Reihe, insbesondere ihre Verteilung in dem Fall, dafs die Reihe eine überall stetige Function darstellt (2). Auf diesem Gebiet waren mancherlei Controversen auszutragen, ehe man zu einwandfreien Resultaten gelangt ist. Die letzte Behandlung der Frage verdankt man W. F. Osgood (3); er hat auch die Integrirbarkeit einer derartigen Reihe geprüft und die vorher vorhandenen Irrtümer berichtigt (4). Die von ihm erreichten Resultate können als definitiv betrachtet werden. Die wesentliche Grundlage der Schlüsse besteht darin, dafs auch hier abgeschlossene nirgends dichte Mengen das Operationsobject bilden und damit die Untersuchung wesentlich erleichtern.

Auch der allgemeinste Fall einer Fundamentalreihe stetiger Functionen ist kürzlich Gegenstand erfolgreicher Behandlung gewesen. Seitdem der Begriff der ungleichmäfsigen Convergenz durch Stokes und Seidel eingeführt wurde, weifs man, dafs, wenn die durch eine unendliche Reihe dargestellte Function eine Unstetigkeit aufweist, der Unstetigkeitspunkt ein Punkt ungleichmäfsiger Con-

1) Vgl. hierzu auch Brodén, der sich allgemein mit der Menge derartiger Vorschriften beschäftigt. Acta Univ. Lund. 8, S. 1.

vergenz sein mufs. Bis vor kurzem beschränkte sich aber unsere weitere Kenntnis der Darstellung von unstetigen Functionen als Folgen stetiger oder auch unstetiger Functionen wesentlich auf Beispiele resp. auf gewisse Kunstgriffe allgemeinerer Tragweite. Ein Resultat allgemeineren Inhalts ist erst seit kurzem vorhanden (6). Man verdankt die ebenso eingehende wie weitausblickende Behandlung dieses Gebiets R. Baire, der hier durchaus neue Wege gegangen ist. Er hat die Frage in Untersuchung genommen, wie eine punktweise unstetige Function beschaffen sein mufs, um durch eine Folge stetiger oder ganzer rationaler Functionen darstellbar zu sein, und gelangt zu dem Resultat, dafs sie in Bezug auf eine jede perfecte Menge höchstens punktweise unstetig sein darf; umgekehrt ist sie aber alsdann auch immer durch eine solche Folge darstellbar. Die neuen Ideen, die ihn zu diesem Resultat geführt haben, haben es sogar ermöglicht, auch die Darstellung von total unstetigen willkürlichen Functionen durch Folgen und zwar mehrfache Folgen stetiger Functionen in Angriff zu nehmen (8).

Eine unendliche Reihe von Functionen läfst sich auch von dem Gesichtspunkt aus betrachten, dafs man die Punktmengen untersucht, an denen die Convergenz aufhört (9). Diese Mengen sind jedoch nicht abgeschlossen, und daher fehlt es hier noch an einfachen Resultaten. Eine sehr bemerkenswerte Reihengattung, bei der die Divergenzstellen überall dicht liegen, während die Reihe zugleich für eine überall dichte Menge convergirt, hat Borel angegeben (10). Im übrigen ist das hier bezeichnete Problem nur in der Theorie der trigonometrischen Reihen praktisch hervorgetreten. Ihrer habe ich daher ebenfalls noch kurz zu gedenken, naturgemäfs unter Beschränkung auf diejenigen Probleme, in welche die Theorie der Punktmengen hineinspielt[1]). Mit ihnen haben sich insbesondere Harnack und Hölder beschäftigt, insbesondere verdankt man Hölder eine exacte Erledigung des Falles, dafs unendlich viele Stellen auftreten, an denen die Reihe divergirt, während Harnack wesentlich die Stellen endlicher Oscillation der Reihe in Betracht gezogen hat (11).

1. Es seien

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots u_\nu(x),\ \cdots \tag{1}$$

Functionen im Intervall $a \leqq x \leqq b$, und es werde

$$s_\nu(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_\nu(x) \tag{2}$$

gesetzt, so dafs die Reihe

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \cdots s_\nu(x),\ \cdots \tag{3}$$

1) Eine historische Darstellung der Entwickelung der Theorie findet sich bekanntlich in der Dissertation von A. Sachse (Göttingen 1879) und Zeitschr. f. Math. 25, S. 231 (Ergänzungsband).

entsteht. Wenn diese Reihe, was den einfachsten Fall darstellt, für jedes $a \leq x \leq b$ convergirt, so soll sie eine Folge oder Fundamentalreihe von Functionen heifsen. Sie stellt dann eine im Intervall $a \cdots b$ eindeutige Function dar, die durch $s_\omega(x)$ bezeichnet werden soll. Die Functionen $u_\nu(x)$ resp. $s_\nu(x)$ können im übrigen ganz beliebig sein.

Statt einer Folge von Functionen $s_\nu(x)$, die durch Gleichung (2) definirt ist, kann man auch solche Folgen in Betracht ziehen, die als Producte einer unbegrenzt zunehmenden Zahl von Factoren $u_\nu(x)$ definirt sind, so dafs

$$p_\nu(x) = u_1(x) u_2(x) \cdots u_\nu(x)$$

ist und $\lim p_\nu(x) = p_\omega(x)$.

Die erste allgemeinere Aufgabe, die man hier stellen mag, ist diejenige, die Hankel[1]) durch das Princip der Verdichtung der Singularitäten gelöst hat. Diese Aufgabe fordert, Singularitäten irgend welcher Art an einer überall dichten Menge so zu häufen, dafs sie sich gegenseitig nicht stören. Wenn $\varphi(y)$ an der Stelle $y = 0$ ein singuläres Verhalten aufweist, so setzt Hankel

$$u_\nu(x) = A_\nu \varphi(\sin \nu\pi x), \quad s_\nu(x) = \sum_1^\nu A_\nu \varphi(\sin \nu\pi x)$$

und unterwirft die A_ν der Bedingung, dafs die bezügliche unendliche Reihe convergirt. Die so definirte Function $s_\omega(x)$ wird dann im allgemeinen an allen rationalen Stellen eine analoge Singularität besitzen, wie $\varphi(y)$ im Nullpunkt. Dieses sehr fruchtbare Princip ist später insbesondere von Dini[2]) näher erörtert und strenger formulirt worden.

An diesem Princip hängen aber, wie Cantor[3]) ausgeführt hat, drei wesentliche Mängel. Erstens ist die Punktmenge, auf die sich die Singularitäten erstrecken, nicht hinreichend beliebig; zweitens wird die Singularität, die an der Stelle $x = p : q$ auftritt, nicht aus einem einzelnen Glied der Reihe stammen, sondern aus unendlich vielen, und es bedarf daher in jedem Fall der Untersuchung, ob diese Singularitäten sich nicht etwa gegenseitig zerstören[4]); drittens legt aber auch die Einführung des Sinus der Function unnötig Schwankungen auf, die dem ihr zu erteilenden Verhalten durchaus fremd sind. Demgegenüber hat Cantor die Hankel'sche Methode auf nachstehende Weise verallgemeinert und zugleich vereinfacht.

1) Math. Ann. 20, S. 63.
2) Grundlagen, S. 157 ff. Vgl. auch Darboux, Ann. de l'Ec. norm. (2) 4, S. 92 ff. Vgl. auch die folgende Anmerkung.
3) Math. Ann. 19, S. 588.
4) Ph. Gilbert hat darauf hingewiesen, dafs dies wirklich eintreten kann. (Bull. de l'Ac. de Belg. (2) Bd. 23, S. 428.)

Es sei

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) = \{\xi_\nu\}$$

eine beliebige, abzählbare Menge von Punkten, ferner wieder $\varphi(y)$ eine Function, die an der Stelle $y = 0$ eine bestimmte Singularität besitzt; bildet man dann die Function

$$s_\omega(x) = \sum_1^\infty A_\nu \varphi(x - \xi_\nu),$$

in der die Coefficienten A_ν wieder die Convergenz, sowie eventuell andere Eigenschaften der Function bewirken sollen, so hat diese Function an allen Stellen ξ_ν die analoge Singularität, wie $\varphi(y)$ an der Nullstelle, und es ist auch klar, dafs in dieser Function die Singularitäten einander nicht stören, da ja an jeder Stelle ξ_ν nur eine Function singuläres Verhalten zeigt. Diese Methode besitzt übrigens auch den Vorzug gröfserer geometrischer Anschaulichkeit; sie lagert stets die gleichen Functionen $\varphi(x - \xi_\nu)$ übereinander, während sich die Superposition der Functionen $\varphi(\sin \nu\pi x)$, besonders wegen der ihnen anhaftenden Schwankungen, der Vorstellbarkeit mehr oder weniger entzieht. Mit dieser Methode sind Functionen besonderer Art in grofser Menge von verschiedenen Seiten construirt worden[1]).

Brodén[2]) hat kürzlich das Hankel-Cantor'sche Princip der Verdichtung in der Weise benutzt, dafs er unendliche Producte zur Darstellung verwendet, wie dies für complexe Functionen geläufig ist. Er hat nach dieser Methode punktweise unstetige Nullfunctionen dargestellt. Die Stammfunction, die er zu Grunde legt, ist die Function

$$\varphi(x) = x e^{x-1},$$

die zugleich mit x positiv, Null und negativ ist, und insbesondere einen gegebenen positiven Wert nur für einen Wert von x annimmt. Mit ihr combinirt er die von ihm erdachten und oben (S. 103) erörterten Zahlenmengen, die mit den Ziffern $l_1, l_2, l_3, \cdots$ gebildet sind. Er bildet nämlich das Product

$$f(x) = p_\omega(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\cos 2\pi L_\nu x),$$

wo wieder $L_\nu = l_1 l_2 \ldots l_\nu$ ist, und zeigt, dafs $f(x)$ eine Nullfunction ist, bei der die Verteilung der Unstetigkeitspunkte von den Werten der l_ν abhängt. Setzt man nämlich

$$L_\nu x = A + \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} + \frac{\varepsilon_{\nu+2}}{l_{\nu+1} \cdot l_{\nu+2}} + \cdots = A + \alpha_\nu$$
$$= B - \frac{\eta_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} - \frac{\eta_{\nu+2}}{l_{\nu+1} \cdot l_{\nu+2}} - \cdots = B - \beta_\nu,$$

1) Man vgl. z. B. Dini, Grundlagen, S. 157 ff.

2) Math. Ann. 51, S. 299. Vgl. auch Reiff, Böklen's math. Mitt. 3, S. 94.

wo also $B = A + 1$ ist, so gelten die Relationen

$$\frac{1+\varepsilon_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} > \alpha_\nu > \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{l_{\nu+1}}, \quad \frac{1+\eta_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} > \beta_\nu > \frac{\eta_{\nu+1}}{l_{\nu+1}},$$

und es hängt, wie leicht ersichtlich, der Wert von $f(x)$ von der kleineren der beiden Gröfsen α_ν und β_ν ab. Ist $X = \{x_\nu\}$ die Menge der durch endliche Ausdrücke darstellbaren Zahlen, so dafs wieder $C = X + X_g$ ist, so führen die Relationen für α_ν und β_ν zu folgenden Ergebnissen:

Es ist, welches auch die Werte von l_ν sein mögen, immer jede Stelle der abzählbaren Menge

$$X_1 = \left\{\frac{2\lambda - 1}{4L_\nu}\right\}$$

eine Nullstelle von $f(x)$. Ist ferner jedes $l_\nu \leqq g$, so sind auch alle Punkte von X_g Nullstellen, während die Unstetigkeitspunkte nur durch die Menge X_2 dargestellt werden, die Complementärmenge zu X_1 bezüglich X ist, so dafs also $X_1 + X_2 = X$ ist. Jede Menge K_ν^σ ist endlich. Ist dagegen $\lim l_\nu = \infty$, so erhält man eine Nullfunction, für die jedenfalls X_2 und aufserdem eine überall dichte Menge X_u der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ die Unstetigkeitsstellen bildet. Alsdann ist $\mathfrak{k}_\nu = \mathfrak{c}$.

Einfacher wird die Fragestellung, wenn man sich auf Functionen beschränkt, die stets positiv sind, was für die vorstehenden nicht zutrifft. Dann kann man direct mit den analog gebildeten Producten $\Pi \cos^2(2\pi L_\nu x)$ operiren.

2. Durch die Theorie der Punktmengen sind ganz wesentlich auch diejenigen Probleme geklärt worden, die die ungleichmäfsige Convergenz der Reihen betreffen. Sei jedes $u_\nu(x)$ und damit auch jedes $s_\nu(x)$ eine im Intervall $a \cdots b$ stetige Function. Wenn dann die durch sie bestimmte Function $s_\omega(x)$ nicht mehr für jedes x stetig ist, so beruht dies darauf, dafs jede Unstetigkeitsstelle von $s_\omega(x)$ ein Punkt ungleichmäfsiger Convergenz ist. Diese Erkenntnis geht bekanntlich auf Stokes[1]) und Seidel[2]) zurück. Es dauerte aber geraume Zeit, ehe man zu weiteren Resultaten auf diesem Gebiet gelangte, besonders wohl deshalb, weil es lange an typischen Beispielen für die hier vorhandenen Möglichkeiten fehlte. Seidel hat die Frage, ob sein Satz umkehrbar ist, ob also, wenn $s_\omega(x)$ stetig ist, die Reihe gleichmäfsig convergirt, ausdrücklich als eine offene bezeichnet[3]). Stolz[4]) bezeichnete den Satz 1875 als um-

1) Trans. of the Cambr. Math. Soc. 7, S. 583 (1847).
2) Abh. d. Münch. Ak. II, Bd. 7, S. 381 (1848).
3) Auch Heine teilt noch diese Meinung. (Journ. f. Math. 71, S. 353, 1870.)
4) Ber. d. Innsbr. naturw. Ges. 5, S. 31 (1875).

kehrbar; es wurden aber bald darauf von Darboux[1]) und du Bois-Reymond[2]) Beispiele construirt, die darthun, dafs dies irrig ist. Einfache Beispiele sind später auch von Cantor[3]) angegeben worden; wenn man von der analytischen Darstellungsform absieht, so kann, wie das folgende zeigen wird, die Construction solcher Beispiele in mannigfachster Weise ohne Mühe ausgeführt werden. Darboux gab übrigens auch ein Beispiel, in dem die Function $s_\omega(x)$ eine punktweise unstetige Function mit überall dicht liegenden Unstetigkeitsstellen ist[4]).

Das Darboux'sche Beispiel stellt aber auch die äufserste Grenze dessen vor, was hier möglich ist. Es besteht nämlich der Satz:

I. Sind alle $s_\nu(x)$ im Intervall $a \cdots b$ stetige Functionen, so ist die Function $s_\omega(x)$ eine höchstens punktweise unstetige Function.

Diesen Satz führt man nach dem Vorgang von R. Baire auf einen früher abgeleiteten Satz über Functionen zweier Variablen zurück (S. 142). Hierzu führt eine geometrische Darstellung, die übrigens in ihrer allgemeinen Form schon bei du Bois[5]) und Arzelà[6]) enthalten ist. Man denke sich eine Schar paralleler Geraden $h_1, h_2, h_3, \cdots h_\nu, \cdots$ mit den Gleichungen

$$y = y_1, \; y = y_2, \; \cdots \; y = y_\nu, \; \cdots,$$

die gegen die x-Axe convergiren, und bilde nun — und darin besteht der Baire'sche Kunstgriff — eine im ganzen Rechteck definirte Function $f(x, y)$ in der Weise, dafs sie auf $y = y_\nu$ den Wert $s_\nu(x)$ hat und sich von der Geraden h_ν zu $h_{\nu+1}$, d. h. von $s_\nu(x)$ zu $s_{\nu+1}(x)$ linear ändert. Dann hat $f(x, y)$ in dem ganzen Rechteck die Eigenschaft, stetig bezüglich y zu sein, und ist im ganzen Rechteck, höchstens mit Ausnahme der x-Axe, eine stetige Function von x. Es sind also die Voraussetzungen des genannten Satzes erfüllt, womit der Satz I bewiesen ist.

Aus ihm folgt nun auch ein Beweis des Satzes II von S. 148. Wird nämlich

$$\frac{f(x + h_\nu) - f(x)}{h_\nu} = f(x, h_\nu) = f_\nu(x)$$

gesetzt, und beachtet man, dafs für jeden Wert x eine bestimmte Ableitung existiren soll, so ist, welches auch die Werte h_ν sein mögen,

$$\lim f_\nu(x) = f_\omega(x) = f'(x),$$

was dem bezüglichen Satz entspricht.

1) Ann. de l'Ec. Norm. (2) 4, S. 77 (1875).
2) Abh. d. Münch. Ak. II, Bd. 12, 1, S. 120.
3) Math. Ann. 16, S. 269.
4) a. a. O., S. 80.
5) Journ. f. Math. 100, S. 332 (1887).
6) Rend. dell' Acc. di Bologna 1884, S. 79.

Man kann die vorstehenden Betrachtungen in der Richtung erweitern, dafs man die Functionen $u_\nu(x)$ resp. $s_\nu(x)$ nicht mehr als stetig annimmt, sondern insbesondere als punktweise unstetig. In dieser Hinsicht begnüge ich mich, den folgenden zuerst von Volterra[1]) ausgesprochenen Satz anzuführen:

II. Eine gleichmäfsig convergente Reihe punktweise unstetiger Functionen stellt ebenfalls eine punktweise unstetige Function dar.

Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich durch die Überlegung, dafs, wenn K_ν die der Function $u_\nu(x)$ entsprechende Menge von Punkten $\omega \geqq k_\nu$ ist, es nur eine endliche Zahl von Functionen $u_\nu(x)$ geben kann, bei denen $k_\nu > k$ ist, bei vorgegebenem k. Die Punkte $\omega \geqq k$ von $s_\omega(x)$ setzen sich also aus einer endlichen Zahl von Mengen K_ν zusammen und bilden daher ebenfalls eine nirgends dichte Menge. Dies gilt für jedes k, und damit ist der Satz bewiesen.

3. Es möge jetzt angenommen werden, dafs $s_\omega(x)$ eine im ganzen Intervall $a \cdots b$ stetige Function ist, so kann man fragen, welches die allgemeinste Verteilung der Punkte ungleichmäfsiger Convergenz sein kann. Diese Frage hat eine präcise Antwort kürzlich durch Osgood[2]) gefunden[3]).

Für die Darstellung ist es bequem, den Begriff der ungleichmäfsigen Convergenz zunächst an die Extremwerte der Functionen $s_\nu(x)$ zu knüpfen und aufserdem die Function

$$S_\nu(x) = s_\nu(x) - s_\omega(x)$$

einzuführen, die ebenfalls stetig ist und die Eigenschaft besitzt, dafs im ganzen Intervall $a \cdots b$

$$\lim S_\nu(x) = S_\omega(x) = 0$$

ist. Nun sei $a' \cdots b'$ irgend ein Intervall innerhalb $a \cdots b$, und

1) Giorn. di mat. 19, S. 79 (1881). Der Satz gilt übrigens nach Volterra auch, wenn die Reihe nur einfach gleichmäfsig convergirt, was ebenso bewiesen wird.

2) Am. Journ. of Math. 19, S. 155.

3) Auch Arzelà hat sich eingehend mit der Frage beschäftigt, wann $s_\omega(x)$ stetig ist (Rend. di Bologna 1883/84, S. 79). Sein Resultat, das auch seinen weiteren Untersuchungen zu Grunde liegt, verlangt die „streckenweise gleichmäfsige" Convergenz, und beruht auf folgender Annahme. Wenn zu jedem x das gröfste Intervall ϑ bestimmt wird, so dafs für alle ν von einem gewifsen ν an die Schwankung von $s_\nu(x)$ in diesem Intervall unterhalb σ liegt, so soll die mit Rücksicht auf alle Werte x betrachtete untere Grenze von ϑ nicht Null sein (a. a. O. S. 81). Dies ist jedoch irrig, und darauf beruhen auch die weiteren irrigen Schlüsse von Arzelà auf diesem Gebiet. Ein näheres Eingehen auf seine Begriffe und Sätze scheint daher nicht geboten zu sein. Vgl. auch S. 231.

ξ_ν ein Wert des Intervalls $a' \cdots b'$, in dem $S_\nu(x)$ ein Extremum besitzt, und es mögen die Punkte

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots \xi_\nu, \cdots$$

den Punkt ξ_ω als Grenzpunkt haben, und zwar so, dafs alle Punkte ξ_ν rechts von ξ_ω liegen. Sind dann

$$M_1, M_2, M_3, \cdots M_\nu, \cdots$$

die zugehörigen Extrema der Functionen $S_\nu(x)$, so ist ξ_ω ein Punkt rechtsseitiger gleichmäfsiger oder ungleichmäfsiger Convergenz, je nachdem diese Extrema gegen Null convergiren[1]) oder nicht, und zwar naturgemäfs für jede Folge $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu, \cdots$, die ξ_ω als Grenzpunkt besitzt. Ist dies nicht der Fall, so besitzen sie doch eine obere und untere Unbestimmtheitsgrenze M_r und N_r, und analog liegen die Dinge, wenn wir von solchen Extremwerten ξ_ν ausgehen, die sämtlich links von ihrem Grenzpunkt ξ_ω liegen. Wir erhalten dann zwei analoge Gröfsen M_l und N_l, und falls beide Null sind, ist ξ_ω ein Punkt linksseitiger gleichmäfsiger Convergenz.

Die hier eingeführten Gröfsen sind im wesentlichen identisch mit denen, die Osgood als Indices des Punktes ξ_ω bezeichnet[2]). Um auf dem hier skizzirten Wege alle Punkte ungleichmäfsiger Convergenz zu erhalten, genügt es, die Punktmengen

$$\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \cdots \Xi_\nu, \cdots$$

ins Auge zu fassen, wo $\Xi_\nu = \{\xi_\nu\}$ die Menge aller Extrema von $S_\nu(x)$ im Intervall $a \cdots b$ darstellt[3]), und die sämtlichen Grenzpunkte der von allen Ξ_ν gebildeten Menge $\{\Xi_\nu\}$, so sind in dieser Menge jedenfalls die Punkte ungleichmäfsiger Convergenz sämtlich enthalten.

Es thut der Allgemeinheit der Resultate keinen Abbruch, wenn wir für das folgende alle Extrema als Maxima annehmen oder aber nur die absoluten Beträge der Gröfsen M und N ins Auge fassen und deren gröfsten durch Ω bezeichnen. Falls nun $\Omega = k$ ist, soll k als Grad der ungleichmäfsigen Convergenz und ξ_ω als ein Punkt $\Omega = k$ oder als Punkt vom Grade k bezeichnet werden. Definiren wir dann noch eine Convergenzfunction $C(x)$ durch die Gleichung

$$C(x) = \Omega,$$

so dafs, falls x ein Punkt gleichmäfsiger Convergenz ist, $C(x) = 0$ zu setzen ist, so kann das Theorem, das diese Fragen beherrscht, einfach durch folgenden Satz ausgedrückt werden:

1) Dafs dies mit der gleichmäfsigen Convergenz gleichbedeutend ist, bemerkte gelegentlich G. Cantor (Math. Ann. 16, S. 113 u. 267).

2) a. a. O., S. 166. Bei Osgood hat jeder Punkt einen Index, hier braucht dies nicht der Fall zu sein, da ξ_ω nicht in jeden Punkt gleichmäfsiger Convergenz zu fallen braucht.

3) Hier bedeutet also $\{\xi_\nu\}$ eine endliche Menge.

III. Die Convergenzfunction ist eine punktweise unstetige Nullfunction[1]).

Den Beweis kann man im Anschlufs an den Gedankengang von Osgood folgendermafsen führen. Zunächst folgt aus der Definition der Punkte ungleichmäfsiger Convergenz, dafs alle Punkte $\Omega \geqq k$ notwendig eine abgeschlossene Menge C_k bilden. Es ist also nur noch zu zeigen, dafs diese Menge nirgends dicht ist. Hierzu hat man die folgende auf der Definition beruhende Eigenschaft der Punkte $\Omega = k$ zu benutzen. Ist ξ ein solcher Punkt, nehmen wir zur Fixirung der Begriffe ξ als Häufungspunkt von Maximumswerten an, und wird $k' < k$ gewählt, so giebt es stets für unbegrenzt viele Werte $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\lambda \cdots$ je ein nahe bei ξ liegendes Intervall $\vartheta_\lambda = \xi_\lambda' \cdots \xi_\lambda''$, so dafs für jeden Punkt ξ' dieses Intervalls (Fig. 6)

$$S_{\nu_\lambda}(\xi') > k'$$

Fig. 6.

ist[2]); zugleich müssen diese Intervalle mit wachsendem ν_λ gegen ξ und überdies ihre Breite gegen Null convergiren. Dagegen besteht für jeden Punkt x die Eigenschaft, dafs es keine Reihe wachsender Zahlen $\nu, \nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\lambda, \cdots$ geben kann, so dafs x sämtlichen Intervallen

$$\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_\lambda, \cdots,$$

die zu irgend welchen Punkten $\Omega \geqq k$ gehören mögen, zugleich angehörte, da sonst die Folge (3) für x nicht gegen Null convergirt.

1) Auf die Analogie zwischen der Verteilung der Punkte gleichmäfsiger und ungleichmäfsiger Convergenz und der Verteilung der Stetigkeitspunkte und Unstetigkeitspunkte wies bereits du Bois hin, Journ. f. Math. 100, S. 335. Er bezeichnet die Punkte $\Omega = 0$ als Stetigkeitspunkte der Convergenz, a. a. O. S. 336. Er setzt nämlich

$$s_\omega(x) - s_\nu(x) = \varrho_\nu(x) \cdot \Phi_\nu(x),$$

wo $\varrho_\nu(x)$ das Maximum von $s_\omega(x) - s_\nu(x)$ für jedes $\nu' \geq \nu$ ist, $|\Phi_\nu(x)| \leq 1$ ist und dem Wert 1 beliebig oft nahe kommen soll, und bezeichnet allgemein $\varrho_\nu(x)$ als den Stetigkeitsgrad der Convergenz. Wird dann $\varrho_\nu(x) = \varrho(\nu) \cdot \varrho_1(x)$ gesetzt, so ist die Convergenz gleichmäfsig, im Intervall $a \cdots b$, falls für jeden Wert dieses Intervalls $\varrho_1(x)$ endlich ist (S. 342). Die Festsetzungen stimmen der Sache nach mit denen des Textes überein.

Die von du Bois befolgte Methode ersetzt $s_\nu(x)$ durch eine Function zweier unbeschränkt veränderlicher Gröfsen x und $\varepsilon = 1/\nu$, die sogar auch für negative Werte ε betrachtet wird. Die hiergegen vorhandenen Bedenken habe ich schon erörtert (S. 199, Anm. 1). Übrigens ist diese Methode durchaus nicht identisch mit derjenigen von Baire (S. 233), der $s_\nu(x)$ in bestimmter und für die bezügliche Aufgabe zweckentsprechender Weise als Function zweier Veränderlichen ansieht, was natürlich eine ganz andere Auffassung ist.

2) In der Figur ist $\xi = 0$ der Punkt ungleichmäfsiger Convergenz.

Für jedes x giebt es daher ein gewisses ν, so dafs von diesem ν an $|S_\nu(x)| < \sigma$ ist, für beliebiges σ.

Nun sei τ' irgend ein Intervall auf $a \cdots b$, und in ihm ξ ein Punkt $\Omega \geqq k$, so giebt es sicher eine Zahl ν, so dafs das zu ξ gehörige Intervall ϑ_ν ebenfalls innerhalb τ' liegt. Im Intervall ϑ_ν sei alsdann ξ' ein Punkt $\Omega \geqq k$, so giebt es eine Zahl ν', so dafs das zu ξ' gehörige Intervall $\vartheta_{\nu'}$ innerhalb ϑ_ν liegt. Innerhalb $\vartheta_{\nu'}$ nimmt man dann den Punkt ξ'' aus der Menge der Punkte $\Omega \geqq k$ ebenfalls beliebig an. Fährt man so fort, so erhält man eine Reihe einander einschliefsender Intervalle

$$\vartheta_\nu, \; \vartheta_{\nu'}, \; \vartheta_{\nu''}, \; \cdots,$$

die mindestens einen Punkt x bestimmen, und für diesen Punkt x wäre

$$S_\nu(x) > k', \qquad S_{\nu'}(x) > k', \qquad S_{\nu''}(x) > k', \; \cdots,$$

was aber, wie wir noch eben bemerkten, unmöglich ist. Damit ist der Satz bewiesen. Als Folgerung ergiebt sich noch:

IV. Für jedes k bilden die Punkte $\Omega \geqq k$ eine nirgends dichte abgeschlossene Menge C_k, während die Punkte gleichmäfsiger Convergenz überall dicht liegen und eine Menge zweiter Kategorie bilden, die die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt.

Mit diesem Resultat ist man nun im stande, sich Functionen beliebiger ungleichmäfsiger Convergenz zu construiren. Man geht dazu von einer nirgends dichten Menge T aus und construirt für das Intervall δ_1 von $D = \{\delta_\nu\}$ eine Function $s_{1\omega}(x)$ mittels der Folge

$$s_{11}(x), \quad s_{12}(x), \cdots s_{1\nu}(x), \cdots$$

von der Art, dafs die Endpunkte von δ_1 Punkte ungleichmäfsiger Convergenz vom Grade $\Omega = k$ sind. Ebenso construirt man allgemein für δ_λ eine Function $s_{\lambda\omega}(x)$ mittels der Folge

$$s_{\lambda\lambda}(x), \quad s_{\lambda\lambda+1}(x), \cdots s_{\lambda\nu}(x), \cdots,$$

so dafs auch die Endpunkte von δ_λ Punkte $\Omega = k$ sind. Nunmehr setze man

$$s_1(x) = s_{11}(x), \quad s_2(x) = s_{12}(x) + s_{22}(x), \cdots$$
$$s_\nu(x) = s_{1\nu}(x) + s_{2\nu}(x) + \cdots + s_{\nu\nu}(x),$$

so ist leicht ersichtlich, dafs dies so geschehen kann, dafs jedes $s_\nu(x)$ eine stetige Function ist[1]). Zugleich hat die so bestimmte

---

1) Jedes $s_\nu(x)$ hat nur zwei Maxima der Gröfse k mehr als $s_{\nu-1}(x)$; darauf beruht die Behauptung. Ein einfaches geometrisch bestimmtes Beispiel ist das folgende. Über $\delta = \xi_l \cdots \xi_r$ errichte man ein gleichschenkliges Dreieck von der Höhe 1, so sei dies $s_1(x)$. Dies Dreieck ersetze man durch ein anderes der gleichen Höhe, dessen Spitze näher an

Function $s_\omega(x)$ alle Punkte von T zu Punkten $\Omega = k$. Beispiele dieser Art sind auch bei Osgood a. a. O. vorhanden, unter anderen auch solche, für die $\Omega = \infty$ ist.

4. Die wichtigste Anwendung, die Osgood von dem Satz macht, betrifft die gliedweise Integration. Beispiele dafür, dafs eine nicht gleichmäfsig convergente Reihe die gliedweise Integration nicht zuläfst, dafs also

$$\lim \int S_\nu(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int S_\omega(x)\,dx$$

nicht immer dasselbe Resultat ergeben, sind zuerst durch Darboux mitgeteilt worden[1]). In allen diesen Beispielen existirt ein Punkt $\Omega = \infty$. Es besteht nun die wichtige Thatsache, dafs in diesen Punkten die einzige Ursache der möglichen Verschiedenheit beider Grenzwerte zu sehen ist; mit anderen Worten, es gilt der Satz:

V. Eine nicht gleichmäfsig convergente Reihe, die eine stetige Function darstellt, gestattet die gliedweise Integration, falls die zugehörige Convergenzfunction überall endlich ist.

Der Beweis dieses Satzes, resp. der Gleichheit der beiden obigen Grenzwerte ergiebt sich nach Osgood folgendermafsen. Es werde k beliebig gewählt, und es sei wieder $D = \{\delta_\nu\}$ die zu C_k gehörige Intervallmenge, ferner sei $J(C_k) = \gamma$. Man bestimme nun zunächst wieder μ Intervalle δ_i, resp. innerhalb von ihnen die Intervalle δ_i' so, dafs

$$\delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_\mu' > \tau - \gamma - \varepsilon$$

ist, und denke sich irgend eine Teilung des Gesamtintervalles τ in kleine Teile τ_i, und zwar mögen der Einfachheit halber alle Endpunkte der μ Intervalle δ_i' den Teilpunkten zugehören. Werden dann diejenigen Intervalle τ_i, die aufserhalb der Intervalle δ_i' liegen, durch $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \cdots \tau_\varrho$ bezeichnet, so ist

$$\sum_1^\varrho \tau_i + \sum_1^\mu \delta_i' = \tau, \quad \gamma < \sum \tau_i < \gamma + \varepsilon.$$

Aus der Definition der Menge $\mathfrak{M}\{C_k\} = \{\xi\}$ folgt nun, dafs es für

---

ξ_l gerückt ist, und errichte über $\delta_1 = \xi_l' \cdots \xi_r'$ ein gleichschenkliges Dreieck, ebenfalls mit der Höhe 1, so stellen beide zusammen $s_2(x)$ dar. Läfst man die Spitze des ersten Dreiecks wieder näher an ξ_l rücken, die des zweiten sich ξ_l' nähern, und errichtet über δ_2 ein gleichschenkliges Dreieck der Höhe 1, so ist dies die Function $s_3(x)$ u. s. w.; und es hat $s_\omega(x)$ in jedem Punkt der zugehörigen Menge T einen Punkt $\Omega = 1$. Es ist auch nicht schwer, analoge Functionen durch analytische Vorschriften herzustellen.

1) Ann. de l' Ec. norm. (2) 4, S. 84 (1875).

jeden ihrer Punkte ξ notwendig eine erste Zahl λ giebt, so dafs von diesem λ an

$$|S_\lambda(\xi)| < \sigma$$

ist, bei beliebig gewähltem σ. Nun nehme man ν beliebig an, und es sei $C^{(\nu)} = \{\xi^{(\nu)}\}$ diejenige Teilmenge von $\{\xi\}$, so dafs für jeden Punkt $\xi^{(\nu)}$ vom Index ν an

$$|S_\nu(\xi^{(\nu)})| \leqq \sigma$$

ist. Ist dann τ_i eines der obigen λ Intervalle, und ist in ihm ein Punkt $\xi^{(\nu)}$ enthalten, so kann man, wie aus der Stetigkeit der Functionen $S_\nu(x)$ folgt, ein endliches Intervall τ' innerhalb τ_i wählen, so dafs für jeden Punkt x dieses Intervalls

$$|S_\nu(x)| \leq \sigma + \sigma' < k$$

ist, bei beliebig vorgeschriebenem σ'. Ist nun N die obere Grenze aller Functionswerte von $S_\nu(x)$, und N' die obere Grenze derjenigen, die auf den Intervallen δ_i' liegen, und wird noch $\Sigma\tau = \Sigma\tau' + \Sigma\tau''$ gesetzt, so folgt

$$\int S_\nu(x)\,dx \leqq N' \sum \delta_i' + (\sigma + \sigma') \sum \tau' + N \sum \tau''.$$

Falls nun ν unbegrenzt wächst, so convergirt $\Sigma\tau''$ nach Satz IV von S. 91 gegen Null, während N' zuletzt unterhalb k bleiben mufs. Da nun aber auch k beliebig klein gewählt werden kann, so ist damit der Satz bewiesen. Der Beweis zeigt sogar auch, dafs die Integrale gleichmäfsig gegen $\int S_\omega(x)\,dx$ convergiren; er beruht überdies wesentlich darauf, dafs die Menge C_k abgeschlossen ist.

Durch Umkehrung folgen hieraus analoge Sätze für die gliedweise Differentiation.

Bei der Wichtigkeit des Osgood'schen Satzes teile ich noch einen zweiten elementaren Beweis mit, der auf einem Theorem von Arzelà[1]) beruht, das seiner allgemeinen Nützlichkeit halber hier erwähnt zu werden verdient. Es mögen

$$\varDelta' = \{\delta'\}, \quad \varDelta'' = \{\delta''\}, \quad \cdots \varDelta^{(\nu)} = \{\delta^{(\nu)}\}$$

Intervallmengen sein, deren jede aus einer endlichen, übrigens auch unbegrenzt wachsenden Zahl getrennter Intervalle besteht, die sämtlich im Intervall $a \cdots b = \tau$ liegen, und zwar so, dafs jede Intervallsumme oberhalb einer Gröfse η liegt. Alsdann giebt es dem Satz von Arzelà zufolge mindestens einen Punkt x des Intervalls τ, der in unendlich vielen Intervallen der obigen Mengen enthalten ist. Wird nämlich ν so bestimmt, dafs $\nu\eta > \tau' > \tau$ ist, so wird es nach Bedeckung von τ mit den Intervallen der Mengen $\varDelta', \varDelta'', \cdots \varDelta^{(\nu)}$

1) Rend. di Linc. (4) 1, S. 637.

mindestens ein Intervall τ_1 endlicher Gröſse geben, das mindestens zwei Intervallen δ angehört. Man kann dann ν_1 so bestimmen, daſs nach weiterer Bedeckung von τ mit den Intervallen der Mengen $\Delta^{(\nu+1)}, \ldots \Delta^{(\nu_1)}$ mindestens ein Intervall τ_2 vorhanden ist, das in mindestens drei Intervallen δ liegt. So kann man weiter schlieſsen, und damit ist der Satz bewiesen. Hieraus folgt aber das Theorem unmittelbar. Ist nämlich jetzt $\Delta^{(\nu)}$ diejenige Intervallmenge, für die $S_\nu(x) > \sigma$ ist, und würde für irgend einen Wert von σ die Summe der Intervalle von $\Delta^{(\nu)}$ für unendlich viele Werte von ν oberhalb einer Gröſse η liegen, so gäbe es jetzt notwendig einen Punkt x, der in unendlich vielen Intervallen läge, und es würde daher die Relation $S_\nu(x) > \sigma$ für unendlich viele Werte von ν erfüllt sein, was unmöglich ist. Daher convergirt die Summe der Intervalle von $\Delta^{(\nu)}$ mit wachsendem ν gegen Null, welches auch der Wert von σ ist, woraus der Satz folgt.

5. Der hiermit bewiesene Satz ist vielfach Zielpunkt der Untersuchung gewesen. Bereits Kronecker[1]) hat sich über ihn gelegentlich geäuſsert, indem er ihm für den Fall Giltigkeit beilegte, daſs die Gesamtheit aller Mengen $\{C_k\}$ den Inhalt Null hat. Für diesen Fall ist der Satz sozusagen evident; einen Beweis hat später Hossenfelder[2]) gegeben, dessen Abhandlung eine Reihe zweckmäſsiger Beispiele enthält. Auch du Bois hat sich, wenn auch unbestimmt, zu dem Satz geäuſsert; es findet sich bei ihm die Bemerkung, daſs die Punkte $\Omega = 0$ überall dicht liegen müſsten, ohne daſs er jedoch den Sachverhalt vollständig erkannt hätte[3]). Am eingehendsten hat sich Arzelà[4]) mit dem Satz beschäftigt. Er suchte zunächst ganz allgemein die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs überhaupt $s_\omega(x)$ integrirbar ist, falls jedes $s_\nu(x)$ integrirbar ist, und glaubte sie darin zu finden, daſs einerseits die Menge der Punkte $\Omega \geqq k$ unausgedehnt ist, und andererseits auch die Menge der Punkte, die von einem bestimmten ν an für jedes $s_\nu(x)$ Punkte $\omega_\nu \geqq k$ sind. Er zeigte dann weiter, daſs, wenn eine Functionsfolge diese Eigenschaften hat, der Satz immer und nur dann besteht, wenn $s_\omega(x)$ eine stetige Function ist. Daſs diese Bedingung zu eng ist, ist durch den Osgood'schen Satz erwiesen[5]).

Ich muſs hier noch eines Irrtums erwähnen, der sich bei du Bois findet, und an dem man der Autorität des Namens wegen nicht ohne weiteres vorbeigehen darf. Du Bois hat a. a. O. ein

1) Ber. d. Berl. Ak. 1878, S. 54.
2) Programm Strafsburg in Westpreuſsen, 1891.
3) Ber. d. Berl. Ak. 1886, S. 241. Vgl. auch das folgende.
4) Rend. dell' Ac. dei Lincei (4) 1, S. 321, 532, 566. Vgl. Anm. 3 auf S. 225.
5) Arzelà hat sein Resultat später noch so präcisirt, daſs jedes Ω endlich sein müsse. Vgl. Rend. di Linc. (5) 6, S. 290.

Beispiel einer Function aufgestellt, bei der die Punkte $\Omega = \infty$ überall dicht liegen, was nach dem Satz III ausgeschlossen ist. Dieses Beispiel ist das folgende. Wird zunächst

$$\varphi_\nu(x) = \sum_\lambda \frac{1}{2^\lambda} \frac{\nu X_\lambda}{\nu^2 + X_\lambda^2}, \quad X_\lambda = \sin^2 \lambda \pi x$$

gesetzt, so ist $\varphi_\omega(x)$ eine Function, für die jeder rationale Punkt ein Punkt ungleichmäfsiger Convergenz ist, und zwar ist jede Menge C_k, wie leicht ersichtlich, endlich; für alle rationalen Zahlen der Form r/s hat Ω den nämlichen Wert, nämlich $1/2^s$.

Nun bildet du Bois weiter die Functionen

$$\psi_\nu(x) = \sum_\lambda \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{1 + \nu^2 X_\lambda^2}, \quad \chi_\nu(x) = \sum_\lambda \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{(1 + \nu^2 X_\lambda)^\lambda}$$

und zeigt, dafs auch die Differenz $\psi_\omega(x) - \chi_\omega(x)$ analoge Eigenschaften besitzt wie $\varphi_\nu(x)$; er erhält dies, indem er für rationale Punkte

$$x = \frac{r}{s} + \frac{\varrho}{s}$$

setzt und nun x an den rationalen Punkt r/s so heranrücken läfst, dafs

$$\sin^2 \pi \varrho = \gamma_1^2 \varepsilon^2$$

gesetzt wird, wo γ_1 eine endliche Gröfse ist. Insoweit sind die Betrachtungen von du Bois einwandsfrei. Er bildet nun weiter die Function

$$s_\nu(x) = \frac{\psi_\nu(x) - \chi_\nu(x)}{\sqrt{\varphi_\nu(x)}}$$

und behauptet, dafs diese Function an jeder rationalen Stelle einen Punkt $\Omega = \infty$ besitze. Er schliefst dies, indem er den Quotienten

$$\frac{\psi_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)} = \frac{U + V}{U_1 + V_1}$$

setzt und von ihm nachweist, dafs diese Zerlegung immer so möglich ist, dafs $U_1 > U$ ist, und $V : V_1$ endlich ist. Hieraus schliefst dann du Bois weiter, dafs auch die Quotienten

$$\frac{\psi_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)} \quad \text{und} \quad \frac{\psi_\nu(x) - \chi_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)}$$

niemals unendlich werden, und da ihre Zähler und Nenner einzeln für jedes x gegen Null convergiren, so gelte dies auch von $s_\nu(x)$. Dieser Schlufs würde aber in zwingender Form nur dann erlaubt sein, wenn die Gröfse $V : V_1$ stets unter einer endlichen Schranke bliebe, was sie jedoch nicht thut; ihre obere Grenze ist

vielmehr selbst unendlich. Hierin dürfte meines Erachtens der Irrtum des Beispiels enthalten sein.

6. Kann auf Grund der Osgood'schen Arbeit die Frage nach der Darstellung stetiger Functionen durch Fundamentalreihen stetiger Functionen als erledigt gelten, so hat R. Baire kürzlich das gleiche für die Darstellung punktweise unstetiger Functionen durch stetige geleistet. In dieser Richtung haben vorher so gut wie gar keine Vorarbeiten allgemeineren Charakters vorgelegen. Auf eine grofse Reihe von einzelnen Beispielen, in denen punktweise unstetige Functionen durch ungleichmäfsig convergente Reihen stetiger Functionen dargestellt werden, habe ich (S. 218) bereits hingewiesen. Eine allgemeinere Idee zur Bildung solcher Functionen benutzt Pringsheim[1]), indem er von Reihen ausgeht, die für einen gewissen Wert ξ der Variablen nur bedingt convergiren, und die Glieder der Reihen umordnet; es bleibt dann der Wert der Reihe überall erhalten, mit Ausnahme der Stelle ξ, an der eine hebbare Unstetigkeit entsteht. Für die Darstellung von Functionen mit einer abzählbaren Menge einfacher Sprünge hat O. Lebesgue[2]) eine einfache Methode angegeben. Er dehnt die Polygonapproximation (S. 218) auch auf diese Functionen aus, was ja ebenso zulässig ist wie bei den stetigen Functionen und auch hier zu den bezüglichen Polynomen führt, die gegen die Function convergiren. Der Vollständigkeit halber erwähne ich endlich eine kürzlich erschienene Arbeit von C. Severini[3]). Wenn die Gesamtmenge der Unstetigkeitspunkte der Function $f(x)$ unausgedehnt ist, so läfst sich mittels der von Weierstrafs benutzten Methode der Integraldarstellung unmittelbar zeigen, dafs man $f(x)$ längs der Intervalle $\delta_1', \delta_2', \cdots \delta_\nu'$ durch ein Polynom $G_\nu(x)$ approximiren kann, das $f(x)$ in diesen Intervallen beliebig nahe kommt. Wenn dann die Intervalle δ_ν' gegen δ_ν convergiren, so convergirt $G_\nu(x)$ gegen eine Function $G_\omega(x)$, die aber naturgemäfs nicht $f(x)$ zu sein braucht.

R. Baire's[4]) allgemeine Untersuchungen gehen von der schon oben erwähnten geometrischen Einkleidung aus, resp. von derjenigen Function $f(x, y)$, die für $y = y_\nu$ mit $s_\nu(x)$ übereinstimmt, für $y = y_{\nu+1}$ mit $s_{\nu+1}(x)$ und sich von y_ν zu $y_{\nu+1}$ linear ändert. Es ist also allgemein

$$f(x, y) = \frac{y_{\nu+1} - y}{y_{\nu+1} - y_\nu} s_\nu(x) + \frac{y_\nu - y}{y_{\nu+1} - y_\nu} s_{\nu+1}(x),$$

und die Aufgabe, die Baire sich stellt, geht nun darauf aus, eine

1) Math. Ann. 26, S. 167.

2) Vgl. Bull. des Sc. math. (2) 22, S. 278.

3) Rend. di Palermo, Bd. 14 (1900). Severini dehnt seine Untersuchungen dort auch auf Functionen von zwei Variablen aus.

4) Ann. di mat. (3) 3, S. 16 ff.

im ganzen Rechteck in Bezug auf x und y stetige Function $f(x, y)$ so zu bilden, dafs sie auf der x-Axe eine gegebene punktweise unstetige Function $g(x)$ darstellt. Läfst sich $f(x, y)$ in dieser Weise construiren, so existiren auch die gesuchten Functionen $s_\nu(x)$, für die $g(x)$ die Bedeutung der Function $s_\omega(x)$ besitzt. Falls sich für $g(x)$ auf diese Weise eine Fundamentalreihe stetiger Functionen $s_\nu(x)$ finden läfst, oder vielmehr, falls sich eine innerhalb des Rechtecks stetige Function $f(x, y)$ construiren läfst, die auf der x-Axe den Wert $g(x)$ hat, so soll $g(x)$ kurz als darstellbar im Intervall $\mathfrak{r} = a \cdots b$ bezeichnet werden. Alsdann gipfeln die Untersuchungen Baire's in folgendem Satz:

VI. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function $g(x)$ besteht darin, dafs es keine perfecte Menge giebt, in Bezug auf die die Function total unstetig ist[1]).

Der erste Teil des Satzes ist durch den Satz I bereits bewiesen, denn dieser Satz sagt aus, dafs $g(x)$ immer eine punktweise unstetige Function ist. Nun gelten aber, worauf immer wieder hingewiesen werden mufs, alle unsere Entwickelungen, die auf dem Stetigkeitsbegriff und auf dem Wesen der Fundamentalreihe beruhen, für die nirgends dichten perfecten Mengen in der gleichen Weise wie für das Continuum. Werden daher die stetigen Functionen $s_\nu(x)$ nur für eine Menge T ins Auge gefafst, also als Functionen $s_\nu(x, T)$, so kann auch $g(x)$ als Function $g(x, T)$ in T nur punktweise unstetig sein, woraus die Notwendigkeit der im Satz ausgesprochenen Bedingung erhellt.

7. Der zweite Teil des Satzes erfordert eine ausführliche und allmähliche Betrachtung.

Zunächst läfst sich leicht zeigen, dafs eine Function auf einem Intervall $a \cdots b$ darstellbar ist, wenn einer oder beide Endpunkte Unstetigkeitspunkte sind. Dies kann auf mannigfache Art geschehen; hier genüge es, eine einfache Methode zu wählen. Sei $aba'b'$ das

1) Es dürfte zweckmäfsig sein, die Bedeutung des Theorems zuvor durch ein einfaches Beispiel zu kennzeichnen Sei T eine perfecte Menge, und es möge $f(x) = 0$ sein in allen Punkten von T, sonst aber $f(x) = 1$. Alsdann kann man leicht Polygonzüge $s_\nu(x)$ zeichnen, die gegen die Function convergiren. Man wähle $s_1(x)$ so, dafs es über dem zu T gehörigen Intervall δ_1 durch ein gleichschenkliges Dreieck der Höhe 1 dargestellt wird, sonst aber Null ist. Dann möge $s_2(x)$ auf δ_1 durch zwei nebeneinanderstehende congruente gleichschenklige Dreiecke von der Höhe 1 dargestellt sein, auf δ_2 durch ein gleichschenkliges Dreieck der Höhe 1 und sonst Null sein u. s. w., so approximiren diese Polygonzüge gegen $f(x)$. Wird jetzt aber $f(x)$ so abgeändert, dafs die Function auch in T_g den Wert 1 hat und nur in T_l und T_r Null ist, so gelingt die Construction approximirender Polygonzüge nicht mehr: die Function ist jetzt nämlich total unstetig in T, während sie vorher in T constant war.

bezügliche Rechteck H (Fig. 7) und cc' eine zu aa' parallele Gerade. Alsdann bestimmen wir die Function $f(x, y)$ so, dafs auf aa' resp. bb'

$$f(a, y) = g(a), \quad f(b, y) = g(b)$$

ist, dafs sie auf einer zu aa' parallelen Geraden, die im Punkt q von ab beginnt und auf einer Diagonalen ac' resp. bc' endigt, linear verläuft und in q den Wert $g(q)$ annimmt, im übrigen aber in den Dreiecken $aa'c'$ und $bb'c'$ in beliebiger Weise stetig verläuft. Dann ist $f(x, y)$ innerhalb und auf dem Umfang des Rechtecks bis auf die Punkte a und b eine stetige Function, die auf $a \cdots b$ mit $g(x)$ übereinstimmt, und damit ist die Darstellbarkeit von $g(x)$ dargethan. Diese eine Function $f(x, y)$ führt nun aber sofort zu unendlich vielen. Es ist nämlich auch

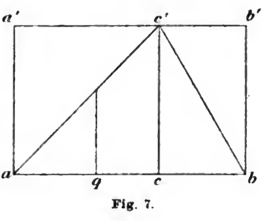


Fig. 7.

$$G(x, y) = f(x, y) + f_1(x, y)$$

eine solche Function, sobald $f_1(x, y)$ innerhalb und auf dem Umfang von H überall stetig und auf $a \cdots b$ Null ist. Es folgt hieraus noch, dafs man die Werte der zur Darstellung von $g(x)$ tauglichen Function auf aa' und bb' beliebig annehmen darf, falls sie nur in a und b mit $g(a)$ und $g(b)$ identisch sind. Wir bezeichnen irgend eine derartige Function von nun an durch $G(x, y)$.

Nun seien δ_1 und δ_2 zwei Intervalle, die ihren Endpunkt gemein haben, und es sei $g(x)$ sowohl auf δ_1, wie auch auf δ_2 darstellbar, so folgt das gleiche für das Gesamtintervall $\delta_1 + \delta_2$, und zwar unabhängig davon, ob in dem gemeinsamen Endpunkt eine einseitige oder beiderseitige Unstetigkeit vorhanden ist. Ebenso kann man von ν auf $\nu + 1$ schliefsen; es gilt aber auch der Schlufs von $\{\nu\}$ auf ω, resp. von $\{a_\nu\}$ auf a_ω. Wenn nämlich (Fig. 8) die Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots a_\nu, \cdots$ gegen a_ω convergiren, und wieder $a_1 a_1'$ und $a_\omega a_\omega'$ die zugehörigen Parallelen sind, so denke man sich eine beliebige Reihe gegen Null convergirender Strecken

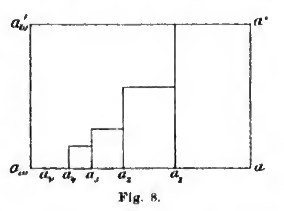


Fig. 8.

$$h_1 > h_2 > \cdots > h_\nu, \cdots,$$

errichte über $a_1 a_2$ ein Rechteck der Höhe h_1, ebenso über $a_2 a_3$ ein

solches der Höhe h_2 u. s. w. und bestimme in ihnen die Functionen $G_1(x, y)$, $G_2(x, y)$, $\cdots$ wie soeben angegeben und überdies so, dafs sie auf der gemeinsamen Seite zweier Rechtecke je denselben Wert haben. Sei nun wieder $G(x, y)$ die so definirte Gesamtfunction. In dem von diesen Rechtecken freien Teil von H kann man dann noch die Function $G(x, y)$ so definiren, dafs sie überall stetig nach y ist, auf jeder zur Grundlinie parallelen Geraden stetig nach x und auf der Geraden $a_\omega a_\omega'$ in a_ω den Wert $g(a_\omega)$ annimmt. Es hat also in der That $G(x, y)$ die verlangte Eigenschaft. Diese Methode überträgt sich ebenso auf Grenzpunkte höherer Ordnung, und es folgt zunächst:

VII. Ist die Function $g(x)$ auf jedem Intervall δ_ν einer Menge $D = \{\delta_\nu\}$ darstellbar, deren Endpunkte eine endliche oder abzählbar unendliche Punktmenge bestimmen, so ist $g(x)$ auch auf dem Gesamtintervall darstellbar.

Das hiermit benutzte Constructionsverfahren versagt, wenn die Unstetigkeitspunkte nicht in abzählbarer nirgends dichter Menge vorhanden sind; nichtsdestoweniger gilt der Satz aber auch dann. Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall, dafs die Unstetigkeitspunkte von $g(x)$ eine perfecte Menge T bilden. Den Bedingungen des Satzes VI gemäfs wollen wir dann zunächst die Annahme machen, dafs $g(x)$ eine in T stetige Function ist. Nun sei $l(x)$ diejenige streckenweise lineare Function, die in T mit $g(x)$ übereinstimmt, so dafs $g(x, T) = l(x, T)$ ist, so ist $l(x)$ im ganzen Intervall $a \cdots b = \tau$ stetig, und es ist

$$f(x) = g(x) - l(x)$$

eine in T stetige, auf τ punktweise unstetige Nullfunction, die in T überall den Wert Null hat. Die Aufgabe ist damit darauf zurückgeführt, die Darstellbarkeit für $f(x)$ nachzuweisen. Wird nämlich die zu $f(x)$ gesuchte Function mit $F(x, y)$ bezeichnet, und ist $L(x, y)$ die immer existirende Function, die zu $l(x)$ gehört, so ist

$$G(x, y) = F(x, y) + L(x, y)$$

eine Function, die der Aufgabe genügt.

Eine Function $F(x, y)$ kann aber leicht auf folgendem Wege gebildet werden. Sei $D = \{\delta_\nu\}$ die in τ liegende, der Gröfse nach geordnete Intervallmenge, und seien die Gröfsen h_ν bestimmt wie kurz zuvor, so errichte man über jedem Intervall δ_ν ein Rechteck H_ν von der Höhe h_ν und denke sich $f(x)$ in H_ν so dargestellt, dafs $F(x, y)$ auf dem Umfang mit Ausnahme der inneren Punkte von δ_ν^i Null ist. Wenn dann noch in allen Punkten des Rechtecks H, die nicht einem Rechteck H_ν angehören, $F(x, y) = 0$ gesetzt wird, so ist damit $F(x, y)$ eine Function, die in H überall stetig nach y und mit Ausnahme der Strecke τ auch stetig nach x ist und auf τ mit $f(x)$ übereinstimmt. Also folgt zunächst:

VIII. Ist die Function $f(x)$ in Bezug auf die perfecte Menge T stetig, und ist sie auf jedem zu T gehörigen Intervall δ_ν darstellbar, so ist sie auch auf dem Gesamtintervall τ darstellbar.

Um den Satz VI in seiner Vollständigkeit abzuleiten, bedarf es jetzt nur noch des folgenden Hilfssatzes, der ebenfalls auf Baire zurückgeht[1]). Hat die Function $f(x)$ für jeden inneren Punkt eines Intervalles τ die Eigenschaft, dafs $\omega < k$ ist, so läfst sich für jeden inneren Punkt

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

setzen, so dafs $f_1(x)$ stetig ist und $0 \leqq f_2(x) \leqq k$ ist. Auch dieser Satz besteht in analoger Weise für eine nur in T definirte Function $f(x, T)$.

Sei nunmehr $g(x)$ irgend eine punktweise unstetige Function, die den Bedingungen des Satzes VI genügt, so dafs sie für keine perfecte Menge total unstetig ist, und sei K die Menge der Punkte $\omega \geqq k$. Diese Menge kann einen perfecten Bestandteil $K^\Omega = T$ besitzen; alsdann ist $g(x, T)$ in T höchstens punktweise unstetig, und es sei K_1 die Menge der Punkte $\omega_T \geqq k$. Besitzt auch K_1 einen perfecten Bestandteil $K_1^\Omega = T_1$, so sei für $g(x, T_1)$ als Function in T_1 jetzt K_2 die Menge der Punkte $\omega_{T_1} \geqq k$. So können wir fortfahren, der Procefs führt aber, wie näher auf S. 142 entwickelt ist, nach einer höchstens abzählbaren Menge von Schritten zum Ende. Wir gelangen so zu den Mengen

$$K,\ T,\ K_1,\ T_1, \cdots\ K_\omega,\ T_\omega, \cdots\ K_\alpha,\ T_\alpha, \cdots\ K_\beta,$$

und zwar ist entweder K_β endlich resp. abzählbar, oder aber es ist, wenn K_β perfect ist, dem Satze VI gemäfs $g(x, K_\beta)$ eine in K_β stetige Function. Wir bezeichnen noch die zu T, $T_1, \cdots T_\omega, \cdots$ gehörenden Intervallmengen durch

$$D = \{\delta\}, \quad D_1 = \{\delta'\}, \cdots \quad D_\omega = \{\delta^{(\omega)}\}, \cdots.$$

Der Erfolg der weiteren Entwickelungen beruht nun im wesentlichen darauf, dafs man die Function $g(x)$ der Reihe nach durch die Functionen

$$g(x),\ g(x, T),\ g(x, T_1), \cdots g(x, T_\nu), \cdots g(x, T_\alpha), \cdots$$

ersetzt, wo jede dieser Functionen nur für diejenigen Werte von x in Frage kommt, die nicht einer der in den folgenden Functionen auftretenden Mengen T_ν angehören. Hierfür mögen folgende Andeutungen genügen.

Es soll zunächst gezeigt werden, dafs man

$$g(x) = g_1(x) + h_1(x)$$

1) a. a. O., S. 57.

so setzen kann, dafs $g_1(x)$ auf τ darstellbar ist und überall

$$0 \leqq h_1(x) \leqq k$$

ist. Dies erreicht man folgendermafsen. Sei δ_i ein Intervall von T, in dessen Innerem Punkte von K liegen, so dafs es durch diese Punkte in die Intervalle

$$\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \cdots \delta_{ik}, \cdots$$

zerfalle. Alsdann ist innerhalb jedes Intervalles δ_{ik} überall $\omega < k$, und man kann daher dem Hilfssatz zufolge $g(x)$ innerhalb δ_{ik} so zerlegen, dafs $g_1(x)$ stetig ist und $h_1(x)$ der obigen Relation genügt. Damit ist die Zerlegung von $g(x)$ für die inneren Punkte der Intervalle δ_{ik} bereits vorgeschrieben. Setzt man jetzt in den Endpunkten von δ_{ik} noch

$$g_1(x) = g(x), \quad h_1(x) = 0,$$

so ist die Zerlegung von $g(x)$ für alle inneren Punkte von δ_i ausgeführt und damit für alle Punkte der Complementärmenge von T, und es wird zugleich, welche Werte auch $g_1(x)$ in den Endpunkten von δ_i noch erhalten mag, $g_1(x)$ auf jedem Intervall δ_i nach Satz VII darstellbar sein.

Um nunmehr die noch ausstehende Zerlegung von $g(x)$ in den Punkten von T zu bewerkstelligen, betrachten wir weiter $g(x)$ als Function $g(x, T)$ in T, und es sei δ_i' ein solches Intervall von D_1, auf dem Punkte von K_1 vorhanden sein sollen. Dadurch zerfalle es in die Teilintervalle

$$\delta_{i1}', \delta_{i2}', \delta_{i3}', \cdots \delta_{ik}', \cdots,$$

so kann ein Intervall δ_{ik}' in seinem Innern noch eine Teilmenge U von T enthalten. Es ist aber für die Punkte von U der Annahme nach $\omega_T < k$, und wir können daher dem Hilfssatz gemäfs für diese Punkte den Wert von $g_1(x, T)$ so bestimmen, dafs $g_1(x, T)$ stetig in Bezug auf U ist, und $h_1(x, T)$ seiner Relation genügt. Setzt man nun wieder in den Endpunkten von δ_{ik}'

$$g_1(x, T) = g(x), \quad h_1(x, T) = 0,$$

so ist damit die verlangte Zerlegung von $g(x)$ innerhalb δ_i' so ausgeführt, dafs $g_1(x, T)$ und damit auch $g_1(x)$ auf δ_i' darstellbar wird[1]). Dies ergiebt sich ebenso wie oben, und wir haben damit die Zerlegung bereits für alle Punkte der Complementärmenge von T_1 durchgeführt.

In dieser Weise kann man nun aber fortfahren, bis man zur Menge K_β gelangt, und wie auch diese Menge beschaffen sein mag,

1) Es ist gleichgiltig, ob man $g_1(x)$ hier als Function in T betrachtet oder nicht; das wesentliche ist, dafs es nur auf diejenigen Werte ankommt, die die Function in den bezüglichen Punkten von T besitzt.

so läfst sich die analoge Zerlegung auch für sie ausführen; es ist ja, falls K_β perfect ist, $g(x, K_\beta)$ als Function in K_β eine stetige Function. Die verlangte Zerlegung ist damit für alle Punkte von τ so geleistet, dafs $g_1(x)$ darstellbar ist.

Nunmehr kann man mit $h_1(x)$ in derselben Weise verfahren. Für $h_1(x)$ ist jetzt überall $\omega_h \leqq k$, und man kann nun

$$h_1(x) = g_2(x) + h_2(x)$$

setzen, und es ist wesentlich, dafs man sogar erreichen kann, dafs

$$0 \leqq g_2(x) \leqq \frac{k}{2}, \quad 0 \leqq h_2(x) \leqq \frac{k}{2}$$

ist und $g_2(x)$ auf τ darstellbar ist[1]). So kann man fortfahren und gelangt schliefslich zu der Gleichung

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + \cdots g_\nu(x) + \cdots,$$

in der alle $g_\nu(x)$ darstellbar sind, und deren Reihe für jedes x gleichförmig convergirt. Analog existirt also eine Reihe

$$G(x, y) = G_1(x, y) + G_2(x, y) + \cdots G_\nu(x, y) + \cdots,$$

die ebenfalls gleichförmig convergirt. Mit der Existenz von $G(x, y)$ ist aber der Satz bewiesen.

Insbesondere folgt also, dafs alle die vielen Functionen, für die die Menge K für jedes k endlich ist (S. 136), darstellbar sind.

8. Die vorstehenden Entwickelungen haben Baire[2]) zu folgender weiteren Einteilung der unstetigen Functionen geführt. Rechnet man die stetigen Functionen in die Klasse 0, so kann man als erste Klasse der unstetigen Functionen diejenigen betrachten, die sich als Folgen stetiger Functionen darstellen lassen. Falls nun eine Folge von Functionen der Klasse 0 oder 1 nicht selbst eine Function dieser Klassen bestimmt, so soll die durch sie definirte Function als eine Function der Klasse 2 bezeichnet werden. Eine solche Function $F(x)$ läfst sich dann der Definition gemäfs als Doppelfolge stetiger Functionen darstellen, also

$$F(x) = \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu,\nu}(x),$$

wobei jedoch die Summation nicht beliebig ist, sondern so auszuführen, dafs erst über ν und dann über μ summirt wird. Ein einfaches Beispiel dieser Klasse bildet diejenige total unstetige Function, die für rationales x den Wert 1 hat und für irrationales gleich Null ist[3]). In dieser Weise kann man mit der Definition von

1) Dies beruht darauf, dafs die Gröfse k des Hilfssatzes beliebig ist.

2) a. a. O., S. 68.

3) Eine solche Darstellung durch eine Doppelreihe findet sich für ein einzelnes specielles Beispiel auch bei Lerch, Giorn. di mat. 26, S. 375.

Functionsklassen weitergehen und zu Functionen beliebiger endlicher und transfiniter Klasse gelangen; immer soll eine Function, die als Folge von Functionen der Klassen 0 bis ν definirt ist, ohne einer dieser Klassen anzugehören, eine Function der Klasse $\nu + 1$ darstellen.

Hiermit ist jedoch nicht etwa nur ein formales Programm entworfen. Vielmehr hat Baire auch bereits den Functionen der zweiten Klasse eine eingehende Untersuchung gewidmet. Er knüpft sie an die leicht ersichtliche Thatsache, dafs, wenn man die Werte einer Function der Klasse 1 für eine endliche Menge ändert, die Function eine solche der Klasse 1 bleibt, wenn man sie aber an einer abzählbaren Menge ändert, eine Function entsteht, die höchstens der Klasse 2 angehört. Dies führt wieder darauf, dafs man bei Functionen der Klasse 2 von gewissen abzählbaren Wertmengen absehen darf. Ist nämlich λ irgend ein Wert, den die Function im Intervall $\tau = a \cdots b$ besitzt, so giebt es für jedes λ eine Punktmenge $P_\lambda = \{x_\lambda\}$, so dafs $f(x_\lambda) \geqq \lambda$ ist. Diese Menge kann abzählbar sein, es giebt aber eine untere Grenze der Zahlen λ mit abzählbarer Menge P_λ, und diese sei g. Ebenso sei l die obere Grenze aller Zahlen μ, für die die zugehörige Punktmenge $P_\mu = \{x_\mu\}$ abzählbar ist, wo $f(x_\mu) \leqq \mu$ sein soll. Diese zunächst für ein Intervall definirten Zahlen kann man nun in bekannter Weise auf einen Punkt x übertragen, indem man sich Intervalle $\tau', \tau'', \tau''', \cdots$ denkt, die gegen den Punkt x convergiren. Sind $g', g'', g''', \cdots l', l'', l''', \cdots$ die eben definirten zugehörigen Gröfsen und g_1 und l_1 die bezüglichen Grenzen, so setze man

$$\omega_1(x) = g_1 - l_1 = k_1$$

und hat in dieser Gröfse ω_1 für die Functionen zweiter Klasse ein Analogon zu der bei Functionen erster Klasse vorhandenen Gröfse ω. Diese Analogie besteht in folgendem. Bei einer beliebigen punktweise unstetigen Function liegen die Punkte $\omega = 0$ überall dicht; insbesondere haben daher die Functionen der Klasse 1 die Eigenschaft, dafs für jede beliebige perfecte Menge T die Punkte $\omega_T = 0$ überall dicht liegen. Baire zeigt nun, dafs es, damit $f(x)$ eine Function der Klasse 2 ist, hinreichend ist, falls die Punkte $\omega_1 = 0$ für jede nirgends dichte perfecte Menge T überall dicht liegen. Eine notwendige Bedingung ist dies jedoch nicht[1]). Um zu notwendigen

Vgl. auch bei Pringsheim, Encykl. d. math. Wiss. II, A. 1, S. 7, Anm. 31. Die mir sonst bekannten analytischen Darstellungen total unstetiger Functionen benutzen nur einfache Folgen nicht stetiger Functionen; vgl. z. B. Hankel, Math. Ann. 20, S. 107.

1) Dies wird durch folgendes Beispiel bewiesen: Sei T eine nirgends dichte perfecte Menge, so setzt man in jedes Intervall δ_i wiederum eine perfecte Menge. So entsteht eine perfecte Menge T_1, in deren Intervalle wird wieder eine perfecte Menge gesetzt und so eine Menge T_2 gebildet.

Bedingungen zu gelangen, mufs man nicht allein von abzählbaren Mengen absehen, sondern auch von Mengen erster Kategorie (S. 108), die durch $\mathfrak{M}\{K_\nu\}$ gegeben sind, wo jedes K_ν eine nirgends dichte abgeschlossene Menge ist. Mit ihnen definirt man analog wie oben Zahlen ω_2, g_2, l_2, k_2 und gelangt schliefslich zu folgendem Satz:

IX. Bei jeder Function der zweiten Klasse liegen die Punkte $\omega_2 = 0$ in Bezug auf jede perfecte Menge überall dicht[1]).

Man kann fragen, ob und wie sich die Baire'schen Untersuchungen auf das Gebiet mehrerer Variablen übertragen lassen. Dies dürfte sich ohne besondere Schwierigkeit ausführen lassen, nachdem die Analyse der ebenen abgeschlossenen und perfecten Mengen vorhanden ist; auch dürften neue Gesichtspunkte principieller Natur kaum hervortreten; sind doch die Methoden, auf denen die Entwickelungen ruhen, von der Dimensionenzahl durchaus unabhängig[2]). Ferner hat Baire in allerjüngster Zeit begonnen, die Menge aller Functionen der oben genannten Klassen näher zu untersuchen. Hierzu dienen die auf S. 64 angegebenen, von ihm eingeführten Begriffe, die es ermöglichen, die Resultate der Punktmengen auf Mengen von Functionen zu übertragen. Beispielsweise kann man diejenige Functionsklasse als abgeschlossen bezeichnen[3]), die aus allen Functionen der sämtlichen Klassen

$$1, 2, 3, \ldots \omega, \ldots \alpha, \ldots$$

besteht. Sind nämlich

$$f\alpha, f\alpha_1, f\alpha_2, \ldots f\alpha_\nu, \ldots$$

irgend welche Functionen dieser Art, so definiren sie eine Function $f\alpha_\omega$, die man als Grenzelement der vorstehenden betrachten kann (S. 64), und die gemäfs der Natur der zweiten Zahlklasse stets der Gesamtheit aller dieser Functionen angehört.

Wir sind übrigens hiermit zu einer Fragestellung allgemeiner Art gelangt, nämlich zu der Frage, Mengen gegebener Functionen auf ihre Mächtigkeit und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Auf die

---

So kann man fortfahren und die Mengen T_ν die Strecke τ allmählich überall dicht erfüllen lassen. Sei $\mathfrak{M}\{T_\nu\} = P = \{x_p\}$, so definire man $f(x_p) = 1$, sonst aber $f(x) = 0$, so ist $f(x)$ eine Function zweiter Klasse, und man hat überall $g_1 = 1$, $k_1 = 0$, $\omega_1 = 1$, so dafs $f(x)$ die obige Bedingung nicht erfüllt, wohl aber diejenige des letzten Satzes.

1) a. a. O., S. 87. Der Satz findet sich in den Compt. rend. de l'Ac. de Paris, 126, S. 1621 zuerst ausgesprochen.

2) Auf Erwägungen ganz anderer Natur sich stützend hat kürzlich H. Lebesgue die Ausdehnbarkeit des Satzes auf den Raum ausgesprochen. (Compt. rend. de l'Ac. de Paris, Bd. 128, 1899.)

3) Compt. rend. de l'Ac. de Paris, Bd. 129, (1899).

Wichtigkeit dieser Frage ist bereits mehrfach hingewiesen worden[1]). Sie enthält das allgemeine Problem unter sich, Mengen von Curven und sonstigen geometrischen Gebilden zu untersuchen, das von Ascoli, Volterra und Arzelà bereits in Angriff genommen ist. Hierfür mufs ich auf den nächsten Abschnitt meines Berichts verweisen[2]).

9. Es möge nunmehr die Reihe der Functionen

$$s_1(x),\ s_2(x), \ldots\ s_\nu(x), \ldots$$

nicht mehr für jedes x eine Fundamentalreihe darstellen, also die Reihe $\Sigma u_\nu(x)$ nicht mehr für jedes x convergiren. Wir wollen auch dann noch die Reihe eine Folge oder Fundamentalreihe von Functionen nennen, falls die Punkte, an denen sie convergirt, eine überall dichte Menge bilden, wobei freilich die Natur dieser Menge noch zu untersuchen ist. Wenn die Reihe für einen Wert nicht convergirt, so kann dies entweder so geschehen, dafs die Gröfsen $s_\nu(x)$ mit wachsendem ν über alle Grenzen wachsen, oder dafs sie zwischen endlichen Grenzen oscilliren. Es giebt dann zwei Unbestimmtheitsgrenzen O und U für diese Oscillationen, und es soll, falls die Differenz $\Delta = O - U = k$ ist, diese Gröfse als das Divergenzmafs $\Delta = k$ im Punkte x bezeichnet werden. Diese Einführung stammt von Harnack[3]). Analog dazu soll ein Punkt x, in dem die Reihe divergirt, ein Punkt unendlicher Divergenz heifsen, oder auch ein Punkt $\Delta = \infty$. Man kann nun wieder fragen, wie die Punkte $\Delta \geqq k$ in einem Intervall verteilt sein können. Hierauf kann man zunächst nur antworten, dafs ihre Menge nicht abgeschlossen zu sein braucht.

Bezeichnen wir noch eine Reihe, bei der die Convergenzpunkte überall dicht liegen, als punktweise convergent, so gilt also der Satz:

X. Die Punkte $\Delta \geqq k$ einer punktweise convergenten Reihe brauchen eine abgeschlossene Menge nicht zu bilden.

Die Divergenzpunkte zeigen also in dieser Hinsicht ein analoges Verhalten wie die Werte der Ableitungen.

Diese Übereinstimmung ist übrigens nicht etwa eine nur formale; vielmehr haben wir es hier, wie aus dem folgenden erhellt, mit zwei verschiedenen Erscheinungsweisen der nämlichen Thatsache zu thun.

Um dies zu begründen, genügt es daran zu erinnern, dafs die früher über die Ableitungen stetiger Functionen entwickelten Eigenschaften ein typisches Beispiel des behaupteten Satzes liefern, zumal wenn man die in Cap. 4 benutzten Darstellungsmethoden im Sinne von S. 218 auffafst. Wir haben in Cap. 4 monotone stetige Functionen $y = f(x)$ kennen gelernt, für die an einer im Intervall $a \ldots b$ überall

1) Vgl. z. B. Borel, Leçons, S. 126 ff., sowie die Verhandl. d. Züricher math. Congresses, S. 201 ff.

2) Vgl. auch die Arbeit von Burali Forti in Math. Ann. 47, S. 20.

3) Math. Ann. 19, S. 251.

dichten Menge $f'(x) = 0$ war. Wir brauchen aber jetzt von der Function $y = f(x)$ nur zu der inversen, ebenfalls eindeutigen monotonen und stetigen Function $x = g(y)$ überzugehen und sehen sofort, dafs diese Function ein Beispiel liefert, in dem die Punkte $\Delta = \infty$ im Intervall $f(a) \ldots f(b)$ überall dicht liegen, ohne doch alle Punkte dieses Intervalls zu enthalten. Denken wir uns nämlich $f(x)$ durch die monotonen Polygonzüge

$$l_1, l_2, \ldots l_\nu, \ldots$$

approximirt, so stellen sie für $g(y)$ ebenfalls monotone Polygonzüge

$$m_1, m_2, \ldots m_\nu, \ldots$$

dar, die gegen $g(y)$ gleichmäfsig approximiren; sie bilden daher eine Functionsfolge, bei der die Punkte $\Delta = \infty$ eine überall dichte, aber nicht abgeschlossene Menge bilden[1]).

10. Den wichtigsten und interessantesten Beleg des Satzes bildet eine bemerkenswerte Gattung punktweise convergenter Reihen, die Borel[2]) betrachtet hat, und bei denen ebenfalls die Divergenzpunkte $\Delta = \infty$ überall dicht liegen[3]). Borel ist zu ihnen gelangt, indem er eine im complexen Gebiet vielfach erörterte Functionsklasse zunächst für reelle Variablen untersuchte, um sie auf diese Weise in ihrer einfachsten Form zu studiren.

Es sei $X = \{x_\nu\}$ eine im Intervall $a \ldots b = \mathfrak{r}$ überall dichte abzählbare geordnete Menge. Man wähle ΣA_ν als absolut convergente Reihe, bezeichne den Abstand eines Punktes x von x_ν durch r_ν und betrachte die Reihe

$$(4)\quad \sum \frac{A_\nu}{|x - x_\nu|} = \sum \frac{A_\nu}{r_\nu} = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \cdots + \frac{A_\nu}{r_\nu} + \cdots$$

Diese Reihe ist für jeden Punkt x_ν unendlich grofs. Es fragt sich nun weiter, wie sie sich für einen Punkt von X_g verhält, wo X_g wieder die Complementärmenge zu X ist. Ist x dieser Punkt, so kann die Reihe für x in der That convergiren, und zwar wird dies jedenfalls immer dann der Fall sein, wenn die A_ν der Bedingung genügen, dafs für hinreichend grofses ν stets

$$\frac{A_\nu}{r_\nu} < u_\nu$$

---

1) Ein ähnliches analytisch eingekleidetes Beispiel dieser Art giebt Brodén, Öfv. af Vet. Ak. Förhandl., Stockholm, Bd. 52, S. 763. Es ist zu vermuten, dafs die Punkte $\Delta = \infty$ für eine punktweise convergente Reihe, falls sie in einem Intervall überall dicht liegen, in ihm stets eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ bilden, was dem oben folgenden analog sein würde.

2) Compt. rend. de l'Ac. de Paris 118, S. 540 und Leçons, S. 62 ff.

3) Solche Reihen hat im Anschlufs an Riemann auch H. J. Smith betrachtet, Mess. of Math. (2) 11, S. 1.

ist, wo Σu_ν selbst eine convergente Reihe darstellt. Diese Bedingung ist aber auch wirklich realisirbar. Es ist dies, wie wir sehen werden, eine einfache Folge des oben (S. 93) angeführten Borel'schen Satzes, wie andererseits hier der eigentliche Zielpunkt dieses Satzes in die Erscheinung tritt.

Man setze nämlich die letzte Relation in die Form

$$r_\nu > \frac{A_\nu}{u_\nu} = v_\nu,$$

so besagt die Bedingung $r_\nu > v_\nu$, dafs x nicht dem Intervall $\varepsilon_\nu = x_\nu - v_\nu \cdots x_\nu + v_\nu$ angehört. Wenn man nun die ε_ν so bestimmen kann, dafs $\Sigma\varepsilon_\nu < \tau$ ist, so bestimmen die Intervalle ε_ν eine Borel'sche Menge (S. 110), nämlich eine Intervallmenge $D = \{\delta_\nu\}$ und eine zugehörige Menge T, und es ist unmittelbar klar, dafs für jeden Punkt von T die Reihe (4) immer dann convergirt, wenn auch die Reihe Σv_ν convergirt. Ja es wird sich sogar durch geeignete Wahl der Gröfsen v_ν erreichen lassen, dafs $\Sigma\delta_\nu$ beliebig klein wird und damit der Inhalt der zugehörigen abgeschlossenen Menge T dem Wert τ beliebig nahe kommt. Da nämlich mit Σu_ν auch $\Sigma g u_\nu$ eine convergente Reihe ist für jede endliche Gröfse g, so bleiben alle unsere Schlüsse bestehen, wenn man v_ν durch $v_\nu : g$ ersetzt. Dadurch kann aber $\Sigma\delta_\nu$ beliebig klein gemacht werden, und es kann daher die Summengröfse der Intervalle, für die die Convergenz nicht behauptet werden kann, beliebig heruntergedrückt werden. Nimmt man insbesondere eine Reihe unbegrenzt wachsender Zahlen

$$g < g_1 < g_2 < \cdots < g_\nu \cdots$$

beliebig an, so werden die zugehörigen Mengen

$$T,\ T_1,\ T_2,\ \ldots\ T_\nu,\ \ldots$$

das Intervall τ allmählich überall dicht bedecken und in ihrer Complementärmenge eine Menge M zweiter Kategorie bestimmen, und man gelangt so zu folgendem bemerkenswerten Resultat:

XI. Falls sich bei gegebener convergenter Reihe ΣA_ν die Gröfsen u_ν und v_ν so wählen lassen, dafs Σu_ν und Σv_ν ebenfalls convergirt, so convergirt die Reihe (4) sicher überall mit Ausnahme einer Menge M der zweiten Kategorie und der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$[1]).

Aus der Definition dieser Punktmenge M folgt jedoch nicht unmittelbar, dafs sie aus lauter Punkten $\Delta = \infty$ bestehen mufs.

Das bisherige Resultat ist zunächst noch hypothetischer Natur, es läfst sich aber leicht in ein wirkliches Resultat verwandeln.

1) Der analoge Satz im complexen Gebiet ist wichtig für die Frage, ob eine Gebietsgrenze, auf der unendlich viele überall dichte singuläre Punkte liegen, eine natürliche Grenze ist oder nicht.

Man hat dazu zu fragen, wie die Reihe ΣA_ν beschaffen sein mufs, damit zwei convergente Reihen Σu_ν und Σv_ν der vorbestimmten Art existiren. Zu dem Zweck geht Borel von der Relation

$$\sqrt{A_\nu} = \sqrt{u_\nu v_\nu} \leq \frac{u_\nu + v_\nu}{2}$$

aus, die zeigt, dafs die Convergenz von Σu_ν und Σv_ν diejenige von $\Sigma \sqrt{A_\nu}$ nach sich zieht; umgekehrt aber, falls $\Sigma \sqrt{A_\nu}$ convergirt, genügt es,

$$u_\nu = v_\nu = \sqrt{A_\nu}$$

zu setzen, um zwei Reihen der verlangten Beschaffenheit zu besitzen. Also folgt:

XII. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Reihen Σu_ν und Σv_ν ist die Convergenz von $\Sigma \sqrt{A_\nu}$.

Die vorstehenden Sätze lassen sich einerseits so verallgemeinern, dafs man

$$\sum \frac{A_\nu}{r_\nu} \text{ durch } \sum \frac{A_\nu}{r_\nu^{m_\nu}}$$

ersetzt, unter der Voraussetzung, dafs alle $m_\nu < N$ bleiben, oder auch so, dafs man sie auf die Ebene und den Raum C_μ überträgt. Dies gilt immer, falls nur die Menge $P = \{p_\nu\}$, die statt der Menge $X = \{x_\nu\}$ eintritt, abzählbar bleibt; man braucht ja r_ν nur entsprechend zu interpretiren. Hier tritt dann, wie leicht ersichtlich, an die Stelle der Reihe Σv_ν die Reihe Σv_ν^2 resp. allgemein die Reihe Σv_ν^μ. Der Inhalt von T läfst sich ebenso wählen, wie oben.

Borel fügt noch die leicht ersichtliche Bemerkung hinzu, dafs die Reihe für alle Punkte derselben Menge T gleichmäfsig convergent ist, da ja für sie eine und dieselbe Menge Σv_ν die Vergleichsreihe abgiebt[1]). In der Ebene kann es alsdann auch Scharen von Curven geben, deren sämtliche Punkte einer Menge T_λ angehören, und auf denen die Reihe ebenfalls noch gleichmäfsig convergirt. Die Möglichkeit solcher Curven für nirgends dichte Mengen T ist leicht beweisbar[2]).

11. Harnack hat den Begriff des Divergenzmafses für die Zwecke der trigonometrischen Reihe eingeführt; diese Einführung bildet

1) Mit wachsendem λ sinkt natürlich der Grad dieser Convergenz unter jede Gröfse.

2) Das nähere im vierten Abschnitt. Ein ähnliches Resultat enthält der von Cantor gelegentlich gegebene Nachweis, dafs eine stetige Bewegung im Raum auch dann noch möglich ist, falls man aus ihm eine überall dichte abzählbare Menge ausscheidet. (Math. Ann. 20, S. 121.)

aber bereits das Ende der Betrachtungen, die diese Reihe in den letzten Jahrzehnten zum Gegenstand gehabt haben, und bei denen die Theorie der Punktmengen eine Rolle spielt. Nachdem man den Begriff der ungleichmäfsigen Convergenz kennen gelernt hatte, stellte sich die Notwendigkeit ein, die ganze Theorie, insoweit sie vorher auf die gliedweise Integration gegründet war, neu zu bearbeiten, und vor allem die beiden Hauptsätze, den der eindeutigen Darstellung und den, der den Coefficienten die Fourier'sche Integralform beilegt, in möglichst weitem Umfang sicherzustellen. Dies ist zugleich das Problem, das die historische Veranlassung zur Ausgestaltung der Mengenlehre geworden ist. Bei der Annahme, dafs die Convergenz an einer unendlichen Menge von Punkten aufhört, hat Cantor seine ersten Definitionen und Sätze über Punktmengen mitgeteilt. Hier dürfte ihre eigentliche Quelle, sowie auch bereits der Ursprung der später entwickelten transfiniten Begriffsbildungen zu erblicken sein[1]). Über die hiermit verbundenen Fragen möge daher noch in Kürze berichtet werden.

Die neue Behandlungsweise der trigonometrischen Reihe knüpft bekanntlich an Heine[2]) an, der zuerst auf die Mängel der Methode der gliedweisen Integration hinwies und das Bedürfnis nach neuen Beweisen hervorhob. Zielpunkt dieser Beweise ist einerseits die Eindeutigkeit der Darstellung, andererseits der Satz, der den Coefficienten die Fourier'sche Form sichert. Die Eindeutigkeit der Darstellung ruht auf zwei wichtigen Sätzen, von denen der eine auf Cantor, der andere auf H. A. Schwarz zurückgeht. Der Satz Cantor's besagt[3]), dafs, wenn die Reihe

$$f(x) = \sum (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

für alle Werte x innerhalb eines Intervalls $a \cdots b$ convergirt, $\lim a_\nu = 0$ und $\lim b_\nu = 0$ ist. Wenn es nun eine zweite trigonometrische Reihe gäbe, mit anderen Coefficienten a_ν und b_ν, die innerhalb $a \cdots b$ dieselbe Function $f(x)$ darstellt, so würde die Differenz eine Function $f_1(x)$ sein, die überall Null ist. Für diese Function $f_1(x)$ bestehen nun aber die von Riemann für jedes derartige $f(x)$ abgeleiteten grundlegenden Formeln. Wird also die aus der Reihe $f_1(x)$ durch zweimalige gliedweise Integration hervorgehende Function mit $F_1(x)$ bezeichnet, so ist gemäfs der einen von ihnen

1) Übrigens hat schon Dirichlet gelegentlich von der Möglichkeit gesprochen, dafs eine durch eine Fourier'sche Reihe darstellbare Function unendlich viele, nirgends dichte Unstetigkeiten haben könne. Lipschitz hat diesen Fall näher untersucht unter der Annahme, dafs die bezügliche Menge eine endliche Zahl von Grenzpunkten besitzt, was ja vom heutigen Standpunkt aus als zu eng bezeichnet werden mufs.

2) Journ. f. Math. 71, S. 353 ff.

3) Journ. f. Math. 72, S. 130 u. 139; vgl. auch 73, S. 294.

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F_1(x+\varepsilon) - 2F_1(x) + F_1(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = f_1(x) = 0.$$

Hier setzt der Satz von Schwarz[1]) ein. Er besagt, dafs eine jede stetige Function $F_1(x)$, für die, wie für die obige, der bezügliche Grenzwert für alle Punkte eines Intervalls Null ist, in diesem Intervall eine lineare Function ist. Aus diesem Satz in Verbindung mit demjenigen Cantor's kann alsdann die Eindeutigkeit der Darstellung leicht geschlossen werden.

Das Vorstehende gilt, wenn die Reihe für alle Punkte innerhalb eines Intervalls convergirt. Die Leistung von Heine besteht nun wesentlich darin, dafs er zuerst eine endliche Zahl von Ausnahmepunkten $\Delta > 0$ ins Auge fafste, in denen die Convergenz der Reihe aufhört. Die Function $F_1(x)$ des Schwarz'schen Satzes ist alsdann in jedem bezüglichen Teilintervall von $a \cdots b$ eine lineare Function, und da für sie im ganzen Intervall gemäfs einer zweiten Riemann'schen Formel

$$\lim \frac{F_1(x+\varepsilon) - 2F_1(x) + F_1(x-\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

ist, so ist sie, wie bereits im Satz IX von Cap. 4 bewiesen ist, im ganzen Intervall linear. Dies ist das von Heine abgeleitete Resultat. Das gleiche gilt dem eben citirten Satze gemäfs aber auch dann, wenn die Punkte $\Delta > 0$ eine beliebige abzählbare und abgeschlossene Menge bestimmen. Dieses Theorem ist es, das Cantor im Anschlufs an den Satz Heine's für die bis dahin von ihm geschaffenen Punktmengen zuerst ausgesprochen hat[2]); es ist überdies unabhängig von den Werten von Δ. Diesem Theorem kommt, wie bereits früher hervorgehoben wurde, die historische Bedeutung zu, die Mengenlehre gefordert und begründet zu haben. Mit ihm war zum ersten Mal die bis dahin vorhandene, sehr unbestimmte Vorstellung über die Verteilung unendlicher Punktmengen durch eine präcise Begriffsbestimmung ersetzt[3]).

Das allgemeinste, in dieser Hinsicht für die Theorie der trigonometrischen Reihen erreichbare Resultat wurde übrigens erst von Harnack[4]) ausgesprochen. Der Harnack'sche Satz ist eine Verallgemeinerung des erstgenannten Cantor'schen Satzes und kann folgendermafsen ausgesprochen werden:

XIII. Wenn bei einer trigonometrischen Reihe die Punkte

---

1) Der Satz wurde von Cantor mitgeteilt, a. a. O., S. 138.

2) Math. Ann. 5, S. 130.

3) Die obigen Sätze lassen sich auf analog gebaute Reihen (Kugelfunctionen u. s. w.) übertragen; vgl. Dini, Ann. di mat. (2) 6, S. 112, Ascoli, ebda. (2) 7, S. 258, C. Neumann, Math. Ann. 22, S. 400, sowie Arzelà, Mem. di Bologna (5) 4, S. 373.

4) Math. Ann. 19, S. 251.

$\Delta \geqq k$ für jedes k eine nirgends dichte Menge L bilden, so ist $\lim a_\nu = 0$ und $\lim b_\nu = 0$.

Der Beweis folgt durchaus demjenigen, den Cantor für den von ihm herrührenden einfacheren Satz gegeben hat. Man wähle $4k < \sigma' < \sigma$ und betrachte die zu k gehörige Menge L. Ist x ein innerer Punkt eines zu ihr gehörigen punktfreien Intervalls δ, so giebt es um x ein innerhalb δ liegendes Intervall $\delta' = x - \varepsilon \cdots x + \varepsilon$, und es sei $x' = x + \varepsilon'$ ein innerer Punkt dieses Intervalls. Alsdann ist x' ein Punkt $\Delta < k$, und es folgt aus der Definition der Unbestimmtheitsgrenzen, dafs von einem gewissen ν an

$$|a_\nu \cos \nu x' + b_\nu \sin \nu x'| < k$$

bleibt. Wird x' durch $x + \varepsilon'$ resp. $x - \varepsilon'$ ersetzt, so folgt hieraus, dafs auch

$$|a_\nu \cos 2\nu\varepsilon'| < \sigma' \quad \text{und} \quad |b_\nu \sin 2\nu\varepsilon'| < \sigma'$$

ist. Wäre nun $\lim |a_\nu| > 0$, so gäbe es ins Unbegrenzte wachsende Zahlen

$$\nu', \nu'', \nu''', \ldots,$$

so dafs alle Coefficienten $a_{\nu'}, a_{\nu''}, a_{\nu'''}, \ldots$ dem absoluten Betrage nach oberhalb einer Gröfse σ blieben. Der weitere Schlufs beruht nun darauf, dafs man alsdann unter den Gröfsen $\nu', \nu'', \nu''', \ldots$ wieder eine unbegrenzte Teilreihe $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ und zu ihr einen Wert $\varepsilon_1 < \varepsilon$ bestimmen kann, so dafs, wie auch ε beschaffen ist,

$$\sin 2\nu_1\varepsilon_1 > \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \sin 2\nu_2\varepsilon_1 > \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \sin 2\nu_3\varepsilon_1 > \frac{\sigma'}{\sigma} \cdots$$

ist, was gegen die vorstehende Ungleichung verstofsen würde. Da dies nun für jedes beliebige σ bestehen bleibt, so mufs $\lim a_\nu = 0$ sein, und ebenso folgt $\lim b_\nu = 0$[1]).

Aus dem Satz von Harnack fliefst noch die Folgerung, dafs, wenn eine trigonometrische Reihe für eine überall dichte Menge convergirt und nicht $\lim a_\nu = 0$ und $\lim b_\nu = 0$ ist, es stets einen endlichen Wert k giebt, so dafs auch die Punkte $\Delta \geqq k$ überall dicht liegen. Eine Reihe, für die dies zutrifft, ist z. B. die in Riemann's Schrift am Ende genannte Reihe $\Sigma \sin \nu! x\pi$.

In dem Fall, dafs man es mit einer beliebigen trigonometrischen Reihe zu thun hat, sind weitere Resultate nicht bekannt geworden. Um zu solchen zu gelangen, mufs man annehmen, dafs die Reihe eine integrirbare Function $f(x)$ darstellt. Alsdann haben, wie durch

1) Dieser Satz läfst sich übrigens auch aus dem früher erwähnten allgemeinen Theorem von C. Arzelà folgern. Der Unterschied ist der, dafs bei der eben angegebenen Ableitung ein Wert ε_1 direct construirt wird, während im Theorem von Arzelà nur die allgemeine Existenz eines solchen Wertes gefolgert wird.

du Bois und O. Hölder in eingehender Weise begründet worden ist, die Coefficienten immer die bekannte Fourier'sche Integralform. Ist daher $f(x)$ eine solche im Intervall $-\pi \cdots \pi$ integrirbare Function, und ersetzt man in der Reihe die Coefficienten durch die mit der Function $f(x)$ gebildeten Integralformeln, so stellt diese Reihe die Function $f(x)$ in dem Sinn dar, dafs sie an allen Convergenzstellen, an denen $f(x)$ stetig ist, den Functionswert von $f(x)$ liefert und an allen eigentlichen Sprungstellen den bekannten Mittelwert. Ein weitergehendes Resultat giebt Hölder[1]; er zeigt, dafs an einer Convergenzstelle stets ein gewisser aus Integralwerten gebildeter Grenzwert existirt, der dem Wert der Reihe gleich ist. Wie sich jedoch diese Reihe an einem Punkt $\Delta > 0$ verhält, darüber habe ich ein präcises Resultat bisher nicht gefunden. Es dürfte jedenfalls zu vermuten sein, dafs die durch die Reihe definirte Function stets eine möglichst stetige Function $\varphi(x)$ ist. Die Frage aber, ob an jedem Punkt $\Delta = k$ diese Function einen Unstetigkeitspunkt $\omega = k$ besitzt, glaube ich in diesem allgemeinen Umfang verneinen zu müssen[2].

Den vorstehend erwähnten Satz, der den Coefficienten die Fourier'sche Integralform sichert, hat du Bois[3] zunächst für den Fall abgeleitet, dafs $f(x)$ überall endlich ist, er hat aber auch bereits die Möglichkeit erörtert, dafs Unendlichkeitspunkte in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Die allgemeinste Erledigung des letztgenannten Falles verdankt man jedoch erst Hölder[4]. Wie er gezeigt hat, so haben, wenn die Punkte $\Delta = \infty$ eine abzählbare und abgeschlossene nirgends dichte Menge Q bestimmen, die Coefficienten immer dann die Fourier'sche Form, wenn $f(x)$ selbst ein uneigentliches Integral besitzt, und auch die andern in die Coefficientenwerte eingehenden uneigentlichen Integrale einen Sinn haben.

Da in diesem Bericht gezeigt ist, dafs die wesentlichen Eigenschaften des Integralbegriffs auf die uneigentlichen Integrale immer dann übertragbar sind, wenn die Intervalle der Menge D eine abzählbare Menge Q bestimmen, so bedarf das Resultat Hölder's kaum einer näheren Begründung. Insbesondere bleiben ja der Fundamentalsatz der Integralrechnung und die Sätze von Schwarz und du Bois, die angeben, wann eine Function eine lineare Function ist, für die hier in Frage stehenden uneigentlichen Integrale ebenso in Kraft, wie für die eigentlichen. Diese Sätze bilden aber die Grundlage, um einerseits die Eindeutigkeit der Coefficienten und andererseits

---

1) Math. Ann. 24, S. 208.

2) Vgl. auch Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, übersetzt von Harnack, S. 368.

3) Abh. d. Ak. d. Wiss. München, Bd. 12, S. 120 ff.

4) Math. Ann. 24, S. 181.

ihre Darstellbarkeit durch die Fourier'schen Integralformeln zu erschliefsen. Allerdings wenn diese Integralformeln einen wirklichen Sinn haben sollen, so ist naturgemäfs noch erforderlich, dafs die sämtlichen in diese Integrale eingehenden Functionen

$$f(x) \sin \nu x \quad \text{und} \quad f(x) \cos \nu x$$

ebenfalls uneigentliche Integrale besitzen.

Bei Gelegenheit dieser Untersuchung war es übrigens, dafs Hölder zu dem Resultat gelangte, dafs jedenfalls die uneigentlichen Integrale erster Art, bei denen also die Menge K_∞ abzählbar ist, dem Fundamentalsatz der Integralrechnung genügen.

Endlich möchte ich darauf hinweisen, dafs die Abzählbarkeit der vorstehenden Menge Q auch wirklich die äufserste Grenze der hier zulässigen Annahmen darstellt. Die Erörterungen von Capitel 4 zeigen nämlich, dafs die Sätze, in denen wir die Grundlage der Schlüsse zu erblicken haben, nicht mehr bestehen, falls Q eine perfecte Menge ist. Weder gilt dann der Satz V noch auch der Satz IX dieses Capitels. Gerade mit Rücksicht hierauf habe ich geglaubt den Untersuchungen von Capitel 4 einen breiteren Spielraum einräumen zu sollen.

Auf die hier noch nicht berührte Frage, wann eine gegebene stetige Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, denke ich im vierten Abschnitt des Berichts näher eingehen zu können.

Register.

Hervorgegangen aus dem seit Jahren empfundenen Bedürfnisse nach einem engeren wissenschaftlichen und persönlichen Zusammenschlufs der Fachgenossen, hat sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gebildet mit der Aufgabe: „in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem kollegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten".

Dementsprechend bringen die Jahresberichte u. a. über die geschäftlichen Angelegenheiten und über die auf den Jahresversammlungen gehaltenen Vorträge Berichte, ferner alljährlich ein Verzeichnis der Mitglieder mit genauer Adressenangabe, Nekrologe über die verstorbenen Mitglieder mit beigefügten Porträts und enthalten aufserdem gröfsere Referate über einzelne Zweige der gesamten mathematischen Wissenschaften. Diese Referate, welche den gegenwärtigen Stand unserer bez. Kenntnisse in historisch-kritischer Darstellung zusammenfassen, sind von anerkanntem wissenschaftlichen Werte; sie bieten jedem die Möglichkeit, einen Einblick in die geistigen Bestrebungen der Gegenwart zu gewinnen, wie ihn auch derjenige besitzen sollte, der durch seinen Beruf mehr oder weniger an der selbstthätigen Fortbildung der Wissenschaft gehindert ist.

In den bisher erschienenen Bänden [I. 1892. ℳ 7.60; II. 1893. ℳ 4.50; III. 1894. ℳ 16.—; IV. 1897. ℳ 16.—; V. 1897/98. ℳ 7.20; VI. 1899. ℳ 8.—; VII. 1899. ℳ 12.80] kamen folgende gröfsere Referate zum Abdruck:

I: **W. Frz. Meyer**: Die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. 1892.

II: **Fr. Kötter**: Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. 1893.

III: **A. Brill** und **M. Noether**: Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. 1894.

III: **L. Henneberg**: Über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. 1894.

IV: **D. Hilbert**: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. 1897.

V: **E. Kötter**: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. 1898.

VI: **G. Bohlmann**: Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. 1899.

S. Finsterwalder: 1) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. 1899. 2) Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation. 1899.

VII: **E. Czuber**: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. 1899.

VIII: **A. Schoenflies**: Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 1900.

IX. **K. Heun**: Über die kinetischen Probleme der wissenschaftl. Technik. 1900.

In Vorbereitung für die nächsten Bände befinden sich:

R. Haussner: Numerische Auflösung von Gleichungen.

A. Kneser: Bericht über die Variationsrechnung.

E. Kötter: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. Teil II.

G. Kowalewski, G. Scheffers, F. Schur: Referate über die Arbeitsgebiete von Sophus Lie.

R. Mehmke: Bericht über die graphischen Methoden.

Müller-Breslau: Über die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Bauconstructionen.

L. Schlesinger: Über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

A. Schoenflies: Über Curven- und Punktmannigfaltigkeiten. II.

P. Stäckel: Über die allgemeine Dynamik.

E. Steinitz: Bericht über die Theorie der endlichen Gruppen.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. gegen 500 Mitglieder. Diese erhalten obige Publikation bei direktem Bezuge von der Mathematiker-Vereinigung zu einem Vorzugspreise. Anmeldungen zur Mitgliedschaft nimmt Prof. Dr. **A. Gutzmer** in Jena, Wildstrafse 2, entgegen. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Neunter Band.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1900,
die auf der Versammlung in Aachen gehaltenen Vorträge,

sowie:

Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik.

Bericht von Karl Heun in Berlin.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

K. Hensel
in Berlin.

A. Gutzmer
in Jena.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1901.

Inhalt.

Erstes Heft.

I. Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Die auf der Jahresversammlung zu Aachen gehaltenen Vorträge.

Zweites Heft.

III. Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Neunter Band. Erstes Heft.

Enthaltend:

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

K. Hensel in Berlin. **A. Gutzmer** in Jena.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1901.

Ausgegeben am 12. März 1901.

Die auf der Versammlung in Aachen gehaltenen Vorträge:

Chronik

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Bericht über die Jahresversammlung zu Aachen

am 16. bis 23. September 1900.

An der Jahresversammlung, welche in Gemeinschaft mit der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in der alten Kaiserstadt Aachen vom 16. bis 23. September tagte, nahmen etwa 40 Mitglieder teil, darunter mehrere des Auslandes. Als erster Einführender der Abteilung für Mathematik der Naturforscherversammlung begrüfste zunächst Herr Jürgens die Erschienenen, darauf hiefs der diesjährige Vorsitzende der Vereinigung, Herr Hilbert, die Mitglieder der letzteren noch besonders willkommen. Dieser bezeichnete es als den vornehmsten Zweck der Vereinigung und deren Versammlungen, die Teilnehmer vor Einseitigkeit zu schützen; der Mathematiker neige dazu, seine Auffassungen und seine Methoden für die wichtigsten und allein zutreffenden zu halten, und vor diesem Fehler werde er am besten durch den persönlichen Verkehr mit zahlreichen Fachgenossen bewahrt.

Das Programm war diesmal nicht so umfangreich wie in den letzten Jahren, es konnte daher die Tagesordnung erledigt werden, ohne die Vortragsdauer zu beschränken; auch kam dies dem persönlichen Verkehr der Fachgenossen unter einander zu Gute. Zum guten Gelingen der Versammlung trugen wesentlich die treffliche Organisation der Naturforscherversammlung und die ausgezeichnete Gastfreundschaft der Aachener Collegen bei.

Liste der gehaltenen Vorträge:

1. F. Klein (Göttingen): Über die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit besonderer Rücksicht auf den Band IV derselben (Mechanik).
2. A. Kneser (Berlin): Über die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der Variationsrechnung.
3. G. Mittag-Leffler (Stockholm): Analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.
4. R. Fricke (Braunschweig): Zur Theorie der Poincaré'schen Reihen.

5. E. Steinitz (Charlottenburg): Zur Theorie der Abel'schen Gruppen.
6. Franz Meyer (Königsberg i. Pr.): Singuläre bilineare Formen und Relationen zwischen Unterdeterminanten.
7. Franz Meyer (Königsberg i. Pr.): Über geometrische Sätze von der Natur des Pascal'schen Satzes.
8. E. Kötter (Aachen): Bestimmung der Oberfläche zweiter Ordnung, welche neun gegebene Punkte enthält.
9. P. H. Schoute (Groningen): Ein besonderer Bündel von dreidimensionalen Räumen zweiter Ordnung im Raume von vier Dimensionen.
10. A. Wangerin (Halle a. S.): Bestimmung von Flächen constanten Krümmungsmaſses.
11. A. Wangerin (Halle a. S.): Beweis eines Satzes über Krümmungslinien.
12. H. Minkowski (Zürich): Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen.
13. P. Stäckel (Kiel): Zur Theorie der geodätischen Linien.
14. W. Wirtinger (Innsbruck): Geodätische Linien und Poncelet'sche Polygone.
15. E. Jürgens (Aachen): Numerische Berechnung von Determinanten.
16. H. v. Mangoldt (Aachen): Eine Aufgabe der kaufmännischen Arithmetik.

Mit Ausnahme des unter 1. genannten Vortrages, der seines allgemeineren Interesses wegen in die gemeinschaftliche Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe der Naturforscherversammlung verlegt worden war, wurden die Vorträge in Fachsitzungen gehalten, zu denen zum Teil verwandte Abteilungen eingeladen waren. Die eingehende Discussion, zu welcher der Vortrag 1. Veranlassung gab, fand gleichfalls in einer Fachsitzung statt. Der Vortrag 2. gab eine Übersicht über einzelne Teile und Fragen des ausführlichen Berichtes über die Entwickelung der Variationsrechnung, welcher in absehbarer Zeit in dem Jahresbericht zur Veröffentlichung gelangen wird.

Über die Vorgänge seit Erstattung des letzten Berichtes und über die Verhandlungen auf der Jahresversammlung möge Folgendes bemerkt werden:

Auf dem II. Internationalen Mathematikercongress, der vom 6. bis 12. August in Paris tagte, war die Vereinigung durch den gegenwärtigen Vorsitzenden, Herrn Hilbert, vertreten, der auch in Aachen einen Bericht über den Verlauf des Congresses erstattete. Nach den in Paris gefaſsten Beschlüssen wird der nächste internationale Congress im Jahre 1904 in Deutschland stattfinden; mit der Vorbereitung

desselben und der Wahl von Ort und Zeit wurde die Deutsche Mathematiker-Vereinigung beauftragt. Um die Vorbereitungen rechtzeitig in die Wege leiten zu können und einen würdigen Verlauf des Congresses zu sichern, beschlofs die Aachener Versammlung, dafs der Vorstand für das Jahr 1902 ein in den Grundzügen festes Programm des Congresses ausarbeiten und der Jahresversammlung 1902 vorlegen solle.

Die Frage der Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen, über welche im vorigen Jahre verhandelt wurde, im Hinblick auf einen Congrefs, den die französische Regierung für dieses Jahr plante, ist vertagt worden. Es wurde auf der diesjährigen Versammlung in Aachen jedoch mitgeteilt, dafs von nautischer Seite Versuche mit Instrumenten angestellt werden, die mit „neuer Teilung“ (Decimalteilung des Quadranten) versehen sind.

Über die gröfseren Berichte, welche in Aussicht genommen sind, können folgende Mitteilungen gemacht werden:

Der Bericht über die Entwickelung des Unterrichtsbetriebes, besonders in der angewandten Mathematik, an den einzelnen Universitäten, der im vorigen Jahre ins Auge gefafst wurde, ist von Herrn P. Stäckel übernommen worden, der ihn voraussichtlich in der nächsten Jahresversammlung erstatten wird.

Der Bericht über die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Bauconstructionen, den Herr Müller-Breslau bearbeiten will, mufste besonderer Umstände wegen auf das nächste Jahr verschoben werden.

In nahe Aussicht gestellt sind ferner die Berichte der Herren: Stäckel über allgemeine Dynamik, Haufsner über numerische Auflösung von Gleichungen, Steinitz über die Theorie der endlichen Gruppen, Mehmke über die graphischen Methoden, Schlesinger über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen, sowie die Referate über die Arbeitsgebiete und Entdeckungen von Sophus Lie.

Der Bericht über die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der Variationsrechnung des Herrn Kneser wird, wie schon oben bemerkt, in einem der nächsten Bände des Jahresberichts erscheinen.

Wie auf der vorjährigen Versammlung der Wunsch nach einem Bericht über die mathematische Seite der internationalen mitteleuropäischen Gradmessung hervortrat, so wurden diesmal besonders

zusammenhängende Referate über mathematische Physik, Astronomie u. ä. als wünschenswert bezeichnet. Der Vorstand wird bemüht sein, geeignete Bearbeiter zu finden und den sehr dankenswerten Anregungen Folge zu geben.

Einen Bericht über die Integration der partiellen Differentialgleichungen der Physik durch Reihen und Integrale, die nach fluctuirenden Functionen fortschreiten, hat Herr H. Burkhardt der Vereinigung angeboten; der Vorstand wie die Aachener Versammlung haben dieses Anerbieten gern und mit Dank angenommen. Der Bericht wird im Jahresbericht X erscheinen.

Die Referate der Herren Schoenflies und Heun konnten noch bis zur Versammlung in Aachen fertiggestellt werden. Teils um dies zu ermöglichen, teils um die einzelnen Bände nicht gar zu verschieden an Umfang ausfallen zu lassen, wurde das Referat des Herrn Heun im 2. Heft des Jahresberichtes IX veröffentlicht.

Nach den in Aachen gefafsten Beschlüssen wird die nächste Jahresversammlung im September 1901 zu Hamburg stattfinden, und zwar, wie üblich, in Gemeinschaft mit der Abteilung für Mathematik und Astronomie der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte. Dieselbe verspricht schon jetzt ein interessantes Programm: hoffentlich wird sie von Mitgliedern und Gästen des In- und Auslandes recht zahlreich besucht!

Geschäftliche Mitteilungen.

1. Die Geschäftssitzung der Vereinigung fand unter Leitung des Vorsitzenden, Herrn D. Hilbert, am 20. September 1900 statt. Aus dem vorläufigen Bericht des Schrift- und Kassenführers ergab sich eine erfreuliche Zunahme der Mitgliederzahl und eine stete Hebung der Vermögenslage der Vereinigung. Der von den Revisoren geprüfte Kassenbericht folgt unten.

2. Die Drucklegung der Jahresberichte ist gut vorangeschritten: es konnte, wie schon oben bemerkt wurde, über den Abschlufs des Jahresberichts VIII und des Heftes 2 von Band IX berichtet werden, während die Schlufslieferung von Band V der Vollendung nahe ist.

3. Im Laufe des verstrichenen Jahres hat der Tod unter den Mitgliedern der Vereinigung wieder reiche Ernte gehalten; es schieden dahin: Reinhold Hoppe-Berlin, R. H. Hoppe-Chemnitz, Küpper-Prag, Wiltheifs-Halle a. S., Zelbr-Brünn.

Der gegenwärtige Jahresbericht enthält zu Ehren des Gedächtnisses dieser Mitglieder, sowie des im vorigen Jahre verstorbenen K. Bobek Nachrufe, deren Verfassern hiermit der beste Dank des Vorstandes abgestattet sei. Für Küpper war der Kürze der Zeit wegen ein Nekrolog nicht mehr zu beschaffen; es soll seiner im nächsten Bande ausführlicher gedacht werden.

Ihren Austritt aus der Vereinigung zeigten drei Mitglieder an, ein Mitglied wurde aus der Liste gestrichen.

4. Zu Kassenrevisoren wurden die Herren J. Thomae und G. Frege zu Jena ernannt. An Stelle der Herren K. Hensel und M. Noether, welche Ende 1900 ausscheiden, wurden die Herren R. Mehmke und Franz Meyer in den Vorstand gewählt. Herr Minkowski, welcher zunächst für das Jahr 1900 cooptirt worden war, wurde bis Ende 1902 zum Vorstandsmitgliede gewählt.

Der Vorstand besteht hiernach für das Jahr 1901 aus folgenden Mitgliedern:

D. Hilbert (1901), A. Gutzmer (1901), W. Dyck (1902), H. Minkowski (1902), R. Mehmke (1903), Franz Meyer (1903); durch die zugefügten Zahlen wird das Jahr bezeichnet, mit dessen Vollendung der Betreffende turnusgemäfs aus dem Vorstande ausscheidet.

Die Wahlen innerhalb des Vorstandes führten zu folgendem Ergebnis: es wurden für das Jahr 1901 gewählt:

Zum Vorsitzenden: Herr Walther Dyck in München,
„ Schrift- und Kassenführer: Herr A. Gutzmer in Jena,
zur Redactionscommission für den Jahresbericht X: Herr A. Gutzmer und Herr R. Mehmke.

Kassenbericht.

Nach dem Stande vom 31. December 1900.

Einnahmen.	M	₰	Ausgaben.	M	₰
Kassenbestand am 1. Januar 1900	838	50	Verschiedenes (Papier, Utensilien etc.) .	10	75
Jahresbeiträge der Mitglieder:			Drucksachen	32	95
1 Beitrag f. 1895; 271 Beiträge f. 1900;			Schreibhülfe	3	00
2 Beiträge „ 1896; 38½ „ „ 1901;			Postporti	121	70
15 „ „ 1897; 7 „ „ 1902;			Honorar für Referate in Band VIII . .	521	25
71 „ „ 1898; 3 „ „ 1903;			„ „ „ „ „ IX . . .	248	75
128 „ „ 1899; 3 „ „ 1904.			Angekauft:		
Insgesamt 539½ Beiträge je 2 M	1079	00	2500 M 3% Reichsanleihe à 85,70% .	2153	85
42 Ablösungen der Jahresbeiträge	1260	00	1000 M „ „ à 88,00% .	892	05
Honorar für Jahresbericht VIII, Heft 1 u. 2	926	25	Ausgaben	3979	30
„ „ „ IX, Heft 2	243	75	Hierzu Barbestand	600	70
1 Jahr Zinsen von 6500 M 3% Reichsanleihe	195	00			
½ „ „ „ 2500 M „ „	37	50			
Summe	4580	00	Summe	4580	00

Vermögensbestand: nom. 10000 M 3% Reichsanleihe, Ankaufswert: M 9237,05.
Barer Kassenbestand . . . . „ 600,70.

A. Gutzmer, als Kassenführer.
J. Thomae, G. Frege, als Revisoren.

Statuten

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891, gefafsten Beschlüssen.)

§ 1.

Zweck der Vereinigung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung stellt sich die Aufgabe, in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem collegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten.

§ 2.

Jahres-Versammlung.

Die Vereinigung hält alljährlich eine Versammlung ab, in Gemeinschaft mit der „I. Abteilung für Mathematik und Astronomie der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte".

§ 3.

Vorstand der Vereinigung.

In der Jahresversammlung wählen die dort anwesenden Mitglieder der Vereinigung einen Vorstand von sechs Mitgliedern. Derselbe darf sich nötigenfalls durch Cooptation auf sechs ergänzen.

Die Wahl der Vorstandsmitglieder geschieht je auf drei Jahre.

Dabei scheiden alljährlich zwei Mitglieder aus und werden durch Neuwahl ersetzt. Das Ausscheiden geschieht in der Reihenfolge des Eintritts. Die Ausscheidenden können erst nach zwei Jahren wieder gewählt werden; nur der Schriftführer (§ 5) ist sofort wieder wählbar. Der Amtsantritt fällt auf den 1. Januar.

§ 4.

Aufgaben des Vorstandes. Jahresbericht.

Der Vorstand ist beauftragt mit der Vertretung der gesamten Interessen der Vereinigung.

Im einzelnen hat er die Aufgabe, die Jahresversammlung vorzubereiten durch Aufstellung eines ausführlichen Programmes, in welches womöglich Referate über die Entwicklung einzelner Gebiete der Wissenschaft aufzunehmen sind.

Weiter veröffentlicht der Vorstand den Jahresbericht der Vereinigung über den wissenschaftlichen Teil der Verhandlungen. Derselbe ist den Mitgliedern zu ermäfsigtem Preise zugänglich zu machen; die Liste der Mitglieder und die Jahresrechnung sind ihm beizudrucken.

§ 5.

Geschäftsführung im Vorstande.

Der Vorstand wählt jährlich aus seiner Mitte:

a) den Vorsitzenden, in jährlichem obligatorischen Wechsel. Derselbe leitet die Sitzungen des Vorstandes und die geschäftlichen Sitzungen der Vereinigung;

b) den Schriftführer, gleichzeitig mit der Führung der Kasse und des Archivs der Vereinigung beauftragt;

c) die engere Commission für die Redaction des Jahresberichtes.

§ 6.

Mitgliedschaft.

Die Mitgliedschaft zur Vereinigung wird erworben durch Anmeldung bei dem Schriftführer. Mit ihr ist die Verpflichtung zur Zahlung eines Jahresbeitrages von zwei Mark für das laufende Kalenderjahr verbunden. Der jährliche Beitrag kann durch eine einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

Geschäftsordnung

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891, gefafsten Beschlüssen.)

§ 1.

Die Redaction des „Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" übernimmt der Vorstand, welcher mit der speciellen Ausführung die in § 5 der Statuten erwähnte engere Commission beauftragt.

Alle auf den Jahresbericht bezüglichen Zusendungen sind an den Schriftführer der Vereinigung zu richten.

§ 2.

Im Jahresberichte sind zu unterscheiden:

a) die Mitteilungen über die in der Jahresversammlung gehaltenen Specialvorträge;

b) die gröfseren wissenschaftlichen Referate.

a) Die ersteren dürfen den Raum von zwei Druckseiten für einen Vortrag nicht überschreiten; sie sind noch auf der Jahresversammlung selbst der Redactionscommission einzuhändigen.

b) Der Umfang der wissenschaftlichen Referate ist innerhalb der mit dem Verleger einzuhaltenden Verträge nicht beschränkt. Für die Einsendung der Manuscripte dieser Referate wird ein Zeitraum von sechs Wochen nach Schlufs der Versammlung festgesetzt.

§ 3.

Das vom Verleger für die Publication des Berichtes gezahlte Honorar fliefst in die Kasse der Vereinigung. Die wissenschaftlichen Referate (§ 2b) werden den betreffenden Berichterstattern gemäfs dem vom Verleger pro Bogen gezahlten Betrage honorirt. Jeder Referent und ebenso die Autoren der übrigen Mitteilungen erhalten aufserdem 25 Separatabzüge ihres Berichtes. Weitere Separatabzüge können sich dieselben auf ihre Kosten, nach Vereinbarung mit dem Verleger, machen lassen.

Mitglieder-Verzeichnis

nach dem Stande vom 1. Januar 1901.

(Im Interesse eines genauen Mitglieder-Verzeichnisses bitten wir, von jeder Änderung der Adresse dem Schriftführer, z. Z. Prof. Gutzmer in Jena, Wildstr. 2, Mitteilung machen zu wollen.)

Abkürzungen: *H.R.* = Hofrat, *G.H.R.* = Geheimer Hofrat, *R.R.* = Regierungsrat, *G.R.R.* = Geheimer Regierungsrat, *G.R.* = Geheimerat.

Jahr des Eintritts

1893. Abbe, Cleveland, Meteorological Instit., Washington, D.C., U.S.A.
1899. Abbe, Ernst, Professor an der Universität, Jena, Carl Zeifs-Platz 7.
1899. Abraham, Max, Privatdocent an der Universität, Göttingen, Friedländerweg 7.
1894. Ackermann-Teubner, Alfred, Verlagsbuchhändler, in Firma B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.
1893. Adami, Fr., Gymnasialprofessor, Hof.
1898. Ahrens, W., Lehrer a. d. Baugewerkschule, Magdeburg, Badestr. 1.
1900. Albeggiani, Michele, Professor am R. Istituto Tecnico, Palermo, Salita Banditore 4.
1899. Aley, R. J., Professor an der Indiana-Universität, Bloomington, Ind., U. S. A.
1897. Ambronn, L., Professor an der Universität, Göttingen, Sternwarte.
10\. 1893. Amthor, A., Hannover, Königstr. 40.
1891. Archenhold, F. S., Director der Treptow-Sternwarte bei Berlin.
1891. Bacharach, J., Professor a. d. Industriesch., Nürnberg, Rollnerstr. 41.
1899. Bachmann, P., Professor, Weimar, Carl Alexander-Allee 2.
1897. Bäcklund, A. V., Professor an der Universität, Lund (Schweden).
1897. Baker, H. F., Fellow und Lecturer am St. John's College, Cambridge (England).
1900. Balser, Ludwig, Oberlehrer an der Oberrealschule, Darmstadt.
1899. Barthels, K. L., Professor, Privatgel., Bonn, Hofgarten-Auguststr. 9.
1900. Bauch, F., Reallehrer, Hamburg, Höltystr. 10.
1891. Bauer, G., *G.R.*, Professor a. d. Universität, München, Georgenstr. 9.
20\. 1897. Baur, L., Director der Grofsh. Realschule, Heppenheim a. d. B., Privatdocent a. d. Techn. Hochschule, Darmstadt; Heppenheim a. d. B.
1893. Bauschinger, J., Professor a. d. Univers., Berlin SW., Lindenstr. 91.
1891. Beck, A., Professor, Zürich I, Schanzenberg 7.
1897. Beke, E., Professor, Privatdocent an der Universität, Budapest, Szentkirályi 1.
1897. Beman, W. W., Professor an der Universität, Ann Arbor, Mich., U. S. A., East Kingsley Street 61.

Jahr des Eintritts

1899. Bernstein, Felix, Cand. math., Halle a. S., Mühlweg 5.
1896. Biermann, O., Professor an der Technischen Hochschule, Brünn (Mähren), Falkensteinergasse 5.
1891. Binder, W., Professor an der Fachschule für Maschinenwesen, Wiener-Neustadt.
1893. Bjerknes, C. A., Professor a. d. Univers., Christiania. Grönne Gade 6.
1894. Blaschke, E., Privatdocent an der Universität, Wien I, Judenplatz 4.
30. 1897. Blümcke, Ad., Gymnasialprofessor, Nürnberg, Glockenhofstr. 32.
1900. Blumenthal, Otto, Göttingen.
1900. Bôcher, Maxime, Professor an der Harvard University, Cambridge, Mass., U. S. A.
1893. Bock, A, Reallehrer an der Realschule, Passau, Neumarkt.
1891. Böger, R., Professor an der Realschule, Hamburg, Hohe Weide 6.
1899. Boehm, Karl, Privatdocent a. d. Univers., Heidelberg, Theaterstr. 9.
1897. Börsch, A., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam, Saarmunderstr. 15.
1897. Böttcher, J. E., Professor, Rector des Realgymnasiums, Leipzig, Zeitzerstr. 10.
1895. Bohlmann, G., Professor a. d. Universität, Göttingen, Bertheaustr. 1.
1899. Bohnert, F., Oberlehrer, Hamburg, Moltkestr. 55.
40. 1899. Bois, H. du, Professor a. d. Univers., Berlin NW, Schiffbauerdamm 21.
1891. Boltzmann, L., *G.H.R.*, Professor a. d. Univers., Leipzig, Leplaystr. 9.
1892. Bolza, O., Professor an der Universität, Chicago Ill., Woodlawn avenue 5810.
1891. Braunmühl, A. v., Professor an der Technischen Hochschule, München, Schellingstr. 53.
1897. Brendel, M., Professor an der Universität, Göttingen, Bühlstr. 42.
1897. Bretschneider, W., Professor an der Friedrich-Eugen-Realschule, Docent a. d. Technischen Hochschule, Stuttgart, Senefelderstr. 68.
1891. Brill, A. v., Professor an der Universität, Tübingen, Hechingerstr. 14.
1897. Brix, W., Berlin W., Friedrich Wilhelm-Strafse 9.
1893. Brückner, Max, Oberlehrer am Gymnasium, Bautzen, Paulistr. 32.
1891. Brunn, H., Privatdocent an der Universität, Bibliothekar an der Technischen Hochschule, München, Giselastr. 27.
50. 1891. Bruns, H., *G.H.R.*, Professor a. d. Universität, Leipzig, Sternwarte.
1900. Bullard, Warren G., Professor an der Universität, Syracuse, N. Y., U. S. A., Comstock Avenue 712.
1899. Burger, Robert, Professor an der Oberrealschule, Freiburg i. B., Glümerstr. 23.
1891. Burkhardt, H., Professor an der Universität, Zürich V, Kreuzplatz 1.
1891. Burmester, L., Professor an der Technischen Hochschule, München, Barerstr. 69.
1891. Busche, E., Oberlehrer an der Hansaschule, Bergedorf bei Hamburg, Am Baum 51.
1900. Cajori, Florian, Professor am Colorado College, Colorado Springs, Colorado, U. S. A.
1891. Cantor, Georg, Professor a. d. Universität, Halle a. S., Händelstr. 13.
1891. Cantor, Moritz, *H.R.*, Professor an der Universität, Heidelberg, Gaisbergstr. 15.

Jahr des Eintritts

1897. Cardinaal, J., Professor an der Technischen Hochschule, Delft (Holland), Orangeplantage 35.

60. 1900. Caspary, F., Professor, Charlottenburg, Joachimsthalerstr. 43.

1900. Certo, Luigi, Professor am R. Liceo Umberto, Palermo, Via Salvatore Meccio 1.

1900. Chaux, A. de la, Oberlehrer am Gymnasium, Stade.

1897. Cranz, C., Professor an der Oberrealschule und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Johannesstr. 17.

1897. Crawley, E. S., Professor a. d. Univers., Philadelphia, Pa., U. S. A.

1898. Crayen, Wilhelm, Verlagsbuchhändler (G. J. Göschen'sche Verlagshandlung), Leipzig, Johannisgasse 6.

1897. Cremona, L., Professor an der R. Scuola d'applicazione per gl' ingegneri, Rom, Piazza S. Pietro in Vincoli 5.

1899. Curtze, Max, Professor, Thorn.

1892. Czuber, E., Professor an der Technischen Hochschule, Wien III, Neulinggasse 3.

1893. Dalwigk, F. v., Privatdocent a. d. Univers., Marburg, Barfüfserthor 4.

70. 1891. Dantscher v. Kollesberg, V., Professor an der Universität, Graz, Rechbauerstr. 29.

1892. Dedekind, R., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 87.

1900. Dehn, A., Oberlehrer a. Gymnas., Neubrandenburg, Friedlandstr. 28.

1900. Dehn, Max, Assistent an der Technischen Hochschule, Karlsruhe.

1898. Denizot, A., Technischer Hülfsarbeiter an der Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission, Charlottenburg, Charlottenburger Ufer 9.

1893. Dickstein, S., Professor, Warschau, Marzalkowskastr. 117.

1891. Dingeldey, F., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 13.

1896. Dobriner, H., Oberlehrer am Philantropin, Frankfurt a. M., Eiserne Hand 18.

1891. Döhlemann, K., Privatdocent an der Universität, München, Von der Tann-Strafse 23.

1891. Doergens, R., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin NW., Spenerstr. 2.

80. 1897 Doležal, E., Professor an der Bergakademie, Leoben (Steiermark).

1898. Domsch, P. R., Lehrer an den Techn. Staatslehranstalten, Chemnitz.

1899. Drygalski, Erich v., Professor an der Universität, Berlin W., Kurfürstenstr. 40.

1891. Dyck, W., Director der Technischen Hochschule, München, Hildegardstr. 1½.

1891. Dziobek, O., Professor an der Artillerieschule, Berlin; Charlottenburg, Berlinerstr. 55.

1891. Eberhard, V., Professor a. d. Universität, Halle a. S., Jägerplatz 7.

1899. Edalji, Jamshedji, Professor am Gujarat College, Ahmedabad, Indien.

1897. Ellemann, Fr., Lehrer am Landes-Seminar, Cöthen, Franzstr. 25b.

1899. Eneström, Gustaf, Bibliothekar an der Königl. Bibliothek, Stockholm, Brahegatan, 43.

1891. Engel, Friedrich, Professor a. d. Universität, Leipzig, Südplatz 11.

Jahr des Eintritts

90. 1900. Epstein, Paul, Oberlehrer an der Kaiserl. Technischen Schule, Strafsburg i. E., Sternwartstr. 10.

1893. Escherich, G. v., Professor an der Universität, Wien IX, Dietrichsteingasse 5.

1892. Färber, C., Oberlehrer an der Luisenstädtischen Oberrealschule, Berlin SO., Fichtestr. 30.

1897. Fehr, H., Professor an der Universität, Genf, Rue Gevray 19.

1893. Fiedler, Ernst, Professor an der Kantonschule, Zürich-Hottingen, Englisches Viertel 57.

1897. Fiedler, Wilhelm, Professor a. Polytechn., Zürich, Klosbachstr. 79.

1892. Finger, J., Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV, Alleegasse 35.

1891. Finsterwalder, S., Professor an der Technischen Hochschule, München, Leopoldstr. 51.

1897. Fischer, Karl, Hülfsarbeiter im Bureau des Kgl. Ausschusses zur Untersuchung der Hochwasserverhältnisse, Friedenau bei Berlin, Beckerstr. 10.

1893. Fischer, Karl, Privatdocent an der Technischen Hochschule, München, Theresienstr. 43.

100. 1899. Fisher, George Egbert, Professor an der Universität, Philadelphia Pa.

1896. Flatt, R., Privatdocent an der Universität, Basel, Margaretenstr. 77.

1897. Föppl, A., Professor an der Technischen Hochschule, München, Rambergstr. 2.

1891. Franz, J., Professor an der Universität, Breslau.

1897. Frege, G., Professor an der Universität, Jena, Forstweg 29.

1891. Fricke, R., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 17.

1896. Friesendorff, Th., Oberlehrer an den reformirten Kirchen-Schulen, Assistent am Institut der Wegebauingenieure, St. Petersburg, Gr. Podjatscheskaja 23.

1891. Frobenius, G., Professor an der Universität, Berlin; Charlottenburg, Leibnizstr. 70.

1891. Fuchs, L., Professor an der Universität, Berlin W., Rankestr. 14.

1891. Fuhrmann, A., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Circusstr. 39.

110. 1897. Galdeano, Zoel G. de, Professor an der Universität, Zaragoza (Spanien), Cóso 99.

1900. Gale, Arthur Sullivan, Yale Universität, New Haven, Conn. U. S. A.

1900. Gauthier-Villars, Verlagsbuchhändler, Paris, Quai des Grands-Augustins 55.

1897. Geer, P. van, Professor an der Universität, Leiden (Holland), Rapenburg 81.

1894. Gegenbauer, L., Professor a. d. Universität, Wien IX, Frankstr. 1.

1897. Gerbaldi, F., Professor an der Universität, Palermo, Via Gaetano Daita 11.

1895. Godt, W., Oberlehrer am Katharineum, Lübeck, Geninerstr. 29.

1899. Görges, H., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden.

1892. Götting, E., Oberlehrer am Gymnasium, Göttingen, Burgstr. 52.

Jahr des Eintritts

1900. Goettler, Johann, Reallehrer und Privatdocent an der Universität, München, Holzstr. 6.

120. 1891. Gordan, P., Professor an der Universität, Erlangen, Goethestr. 5.

1891. Graefe, F., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Kiesstr. 131.

1895. Graf, J. H., Professor an der Universität, Bern, Wylerstr. 10.

1899. Graham, W. P., Professor a. d. Univers., Syracuse, N. Y., U. S. A.

1891. Grafsmann, Hermann, Privatdocent an der Universität, Halle a. S., Bergstr. 2.

1893. Greenhill, A. G., Professor am Artillery College Woolwich, London W. C. 10 New Inn, Strand.

1901. Greiner, Richard, Lehramtspraktikant, Mannheim, F. Z. 26b.

1892. Grübler, M., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Sedanstr. 18.

1900. Grünwald, Josef, Assistent an der Technischen Hochschule, Wien IV, Belvederegasse 21.

1891. Günther, S., Professor an der Technischen Hochschule, München, Akademiestr. 5.

130. 1899. Guldberg, Alf, Privatdocent an der Universität, Christiania (Norwegen), Tostrupsgade 9.

1891. Gundelfinger, S., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 37.

1900. Guradze, Hans, Breslau, Telegrafenstr. 5.

1891. Gutzmer, A., Professor an der Universität, Jena, Wildstr. 2.

1897. Gysel, Julius, Director des Kantons-Gymnasiums, Schaffhausen, Tannergäfschen 13.

1893. Haas, K., Gymnasialprofessor, Wien VI, Matrosengasse 8.

1897. Haberland, M., Professor an der Realschule, Neustrelitz.

1897. Haebler, Th., Professor an der Fürstenschule, Grimma i. S.

1897. Haenlein, J., Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium, Berlin NW., Spenerstr. 34.

1891. Haentzschel, E., Oberlehrer am Köllnischen Gymnasium und Docent an der Technischen Hochschule, Berlin W., Gleditschstr. 43.

140. 1895. Hagen, J., Professor und Director der Sternwarte am Georgetown College, Washington D. C., U. S. A.

1897. Halsted, George Bruce, Professor an der Universität, Austin, Texas, U. S. A., Guadalupe Street 2407.

1891. Hamburger, M., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin NW., Karlstr. 28.

1896. Hancock, H., Professor an der Universität, Cincinnati, U. S. A.

1892. Hartwig, E., Director der Sternwarte, Bamberg.

1899. Hatzidakis, Nicolas, Athen, rue Héraclite 3.

1891. Hauck, Guido, *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Bülowstr. 6.

1896. Hausdorff, F., Privatdocent a. d. Universität, Leipzig, Leibnizstr. 4.

1896. Haufsner, R., Professor an der Universität, Giefsen, Frankfurterstrafse 11.

1899. Hawkes, H. E., Instructor am Yale College, New Haven, Conn., U. S. A., Edgewood Avenue 391.

Jahr des Eintritts

150. 1901. Hayashi, T., Professor der Mathematik, Matsuyama Chūgakkō, Iyo, Japan.

1892. Hecht, Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Erlenstegen 58.

1891. Heffter, L., Professor an der Universität, Bonn, Goethestr. 17.

1891. Helm, G., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Winckelmannstr. 27.

1891. Helmert, F. R., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Berlin; Director des Geodätischen Instituts, Potsdam.

1891. Henneberg, L., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Hochstr. 58.

1893. Henneke, Professor am Gymnasium, Preufsisch-Friedland.

1893. Henrici, O., Professor am City and Guilds of London Institute, London W., Notting Hill, Clarendon Road 34.

1891. Hensel, K., Professor a. d. Univers., Berlin W., Kurfürstendamm 36.

1899. Herberich, G., Reallehrer, München, Theresienstr. 38.

160. 1891. Hermes, J., Professor am Gymnasium, Lingen a. d. Ems.

1897. Hermes, O., Professor an der Artillerieschule, Berlin; Steglitz, Lindenstr. 35.

1891. Hertzer, H, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Frobenstr. 14.

1900. Herzog, Josef, Ingenieur, Budapest, Elisabetplatz 1.

1891. Hefs, E., Professor an der Universität, Marburg, Barfüfserthor 5.

1891. Hettner, G., Professor an der Technischen Hochschule und an der Universität, Berlin W., Kaiserin Augusta-Str. 58.

1895. Heun, K, Professor an der ersten Realschule, Berlin SW., Mittenwalderstrafse 17.

1898. Heymann, Woldemar, Professor an der Königl. Gewerbe-Akademie, Chemnitz, Kaiserplatz 19.

1899. Heyse, Martin, Cand. math., Halle a. S., Neumarktstr. 8.

1891. Hilbert, D., Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Strafse 29.

170. 1897. Hirsch, A., Professor, Privatdocent am Polytechnicum, Zürich, Casinostr. 3.

1900. Hočevar, Franz, Professor an der Technischen Hochschule, Graz, Beethovenstr. 5.

1891. Hölder, O., Professor a. d. Univers., Leipzig, Kaiser Wilhelm-Str. 15.

1892. Hollaender, E., Oberlehrer am Dom-Gymnasium, Verden (Hann.).

1897. Holzmüller, G., Professor, Director a. D., Hagen i. W.

1899. Hoppe, Edm., Professor, Hamburg, Ritterstr. 153.

1891. Horn, J., Professor an der Bergakademie, Clausthal i. H., Marktstr.

1893. Hofsfeld, C., Oberlehrer am Gymnasium, Eisenach, Fahrzeugstr. 5.

1900. Hovestadt, H., Professor am Realgymn., Münster i. W., Hochstr. 5.

1891. Hurwitz, A., Professor am Polytechnicum, Zürich, Falkengasse 15.

180. 1895. Hurwitz, J., Privatdocent a. d. Universität, Basel, Allschwilerstr. 3.

1900. Jaccottet, Charles, Lehrer, Lausanne.

1900. Jacobsthal, Walther, Strafsburg i. E., Steinstr. 4.

1891. Järisch, P., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg-Eilbeck, Papenstrafse 56.

Jahr des Eintritts

1893. **Jahnke**, E., Oberlehrer an der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule, Berlin W. 15, Pariserstr. 55.
1901. **Jirgensen**, N., Kopenhagen N., Sortedamsgade 7.
1896. **Jolles**, St., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Halensee bei Berlin, Humboldtstr. 2.
1893. **Joukovsky**, N., Professor an der Universität, Moskau.
1891. **Jürgens**, E., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Ludwigsallee 79.
1891. **Junker**, F., Professor am Realgymnasium, Ulm.
190. 1900. **Kagan**, B., Privatdocent an der Universität, Odessa.
1899. **Kawalki**, W., Oberlehrer, Halle a. S., Franckestr. 1.
1892. **Keck**, L., Professor am Gymnasium, Nürnberg.
1892. **Kepinski, Stanislaus**, Professor an der Technischen Hochschule, Lemberg.
1892. **Kerschensteiner, Georg**, Stadtschulrat, München, Möhlstr. 39.
1891. **Kiepert**, L., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Herrenhäuser Kirchweg 20.
1899. **Kikuchi**, D., Professor, Rector d. Kaiserl. Universität, Tokyo (Japan).
1900. **Killermann, Anton**, Reallehrer, München, Forstenriederstr. 18.
1891. **Killing**, W., Professor a. d. Akademie, Münster i. W., Gartenstr. 63.
1898. **Kirsch**, E. G., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
200. 1893. **Kleiber**, J., Hauptlehrer a. d. Handelsschule, München, Herrenstr. 7.
1891. **Klein, Felix**, *G.R.R.*, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Strafse 3.
1891. **Klein, Georg**, Rector d. Realgymnasiums, München, Ludwigstr. 14.
1897. **Klug**, L., Professor an der Universität, Klausenburg (Ungarn).
1900. **Kluyver**, J. C., Professor an der Universität, Leiden (Holland).
1892. **Kneser**, A., Professor a. d. Bergakademie, Berlin W., Schaperstr. 30.
1900. **Knoblauch, Emil**, Oberlehrer am städt. Realgymnasium, Witten (Ruhr), Wilhelmstr. 24.
1892. **Knoblauch**, J., Professor a. d. Universität, Berlin W., Karlsbad 12.
1897. **Kobald**, E., Professor an der Bergakademie, Leoben (Steiermark).
1900. **Koch, Helge von**, Privatdocent an der Universität, Stockholm-Djursholm.
210. 1898. **Koch, Karl**, Reallehrer, Weissenburg a. S.
1891. **Köhler**, C., Professor a. d. Universität, Heidelberg, Treitschkestr. 3.
1899. **Kölmel, Fritz**, Professor am Realgymnasium, Baden-Baden, Maria Victoria-Str. 3.
1893. **König**, J., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest, Vámházkörút 5.
1891. **Koenigsberger**, L., *G.R.*, Professor an der Universität, Heidelberg, Kaiserstr. 2a.
1891. **Köpcke**, A., Oberlehrer an der Realschule, Ottensen, Holländische Reihe 4.
1891. **Kötter, Ernst**, Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstrafse 49.
1891. **Kötter, Fritz**, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin S. Annenstr. 1.

Jahr des Eintritts

1891. Kohn, Gustav, Professor a. d. Universität, Wien I, Schottenring 15.
1898. Kollert, J. A., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz, Weststr. 14.
220. 1900. Kollros, Louis, Professor am Gymnasium, La Chaux-de-Fonds, (Schweiz), St. Pierre 16.
1897. Kortum, H., Professor a. d. Universität, Bonn, Meckenheimerstr. 136.
1891. Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg.
1899. Kowalewski, Gerhard, Privatdocent an der Universität, Leipzig, Johannisallee 2.
1891. Kraft, F., Privatdocent an der Universität, Zürich IV, Zweierstr. 38.
1900. Kraus, J., Oberlehrer a. d. Oberrealschule, Darmstadt, Liebigstr. 49.
1891. Krause, M., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Kaitzerstr. 12.
1891. Krazer, A., Professor a. d. Univers., Strafsburg i. E., Vogesenstr. 10.
1897. Kreutz, H., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 103.
1897. Krüger, L., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam; Grofs-Lichterfelde, Mommsenstr. 10.
230. 1900. Kučera, Otto, Professor am Realgymnasium und Lehrer an der Universität, Agram, Gundulićgasse 51.
1895. Kühne, H., Oberlehrer an den Maschinenbauschulen, Dortmund, Markt 8.
1893. Kürschak, J., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest II, Albrechtstr. 14.
1892. Kullrich, Oberlehrer an der Hohenzollernschule, Schöneberg bei Berlin, Erdmannstr. 11.
1895. Kutta, W., Assistent an der Technischen Hochschule, München, Zieblandstr. 33.
1897. Lacombe, M., Professor am Polytechnicum, Zürich, Wenibergstr. 18.
1891. Lampe, E., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W., Kurfürstenstr. 139.
1899. Landau, Edmund, Berlin NW., Sommerstr. 2.
1894. Landsberg, G., Professor a. d. Universität, Heidelberg, Sandgasse 5.
1896. Laugel, L., Châlet des Bruyères, Golfe Juan, Alpes Maritimes.
240. 1898. Leesekamp, E. A., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
1897. Leitzmann, H., Privatgelehrter, Halle-Giebichenstein, Ziethenstr. 28.
1891. Lerch, M., Professor an der Universität, Freiburg (Schweiz).
1898. Levi-Civita, T., Professor an der Universität, Padua (Italien), Via S. Gaetano 3394.
1897. Liebmann, H., Privatdocent a. d. Universität, Leipzig, Mühlgasse 8.
1896. Lilienthal, R. v., Professor a. d. Akad., Münster i. W., Erphostr. 16.
1900. Lindelöf, Ernst, Docent an der Universität, Helsingfors, Boulevardsgatan 12.
1893. Lindemann, F., Professor an der Universität, München, Franz Joseph-Str. 12.
1898. Linsenbarth, H., Oberlehrer an der ersten Realschule, Berlin N., Lothringerstr. 76.
1892. Lipschitz, R., *G.R.R.*, Professor a. d. Univers., Bonn, Königstr. 34.
250. 1897. Loewy, A., Privatdocent a. d. Univers., Freiburg i. B., Thurnseestr. 4.

Jahr des Eintritts

1891. London, Franz, Professor a. d. Universität, Breslau, Moritzstr. 33.
1898. Lorenz, Franz, Professor an der Königl. Gewerbe-Akademie, Chemnitz, Reichsstr. 33.
1897. Lorenz, Hans, Professor an der Universität, Göttingen, Nicolausbergerweg 21a.
1896. Lorey, W., Oberlehrer am Realgymnasium, Remscheid.
1896. Loria, G., Professor an der Universität, Genua, Passo Caffaro 1.
1899. Lovett, E. O., Professor an der Princeton Universität, Herausgeber des Bulletin of the American Mathematical Society, Princeton, New Jersey, U. S. A.
1899. Ludwig, Walther, Breslau, Zwingerplatz 6—7.
1891. Lüroth, J., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Freiburg i. B., Mozartstr. 10.
1900. Lukat, Max, Oberlehrer am Progymnasium, Viersen (Rheinland), Schulstr. 14.
260. 1897. Mackay, John S., Edinburgh, Northumberland Street 69.
1899. Maier, Max, Pfarrer in Schaufling bei Deggendorf (Bayern).
1894. Mandl, M., Professor a. d. Landes-Oberrealschule, Profsnitz in Mähren.
1891. Mangoldt, H. v., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Vaelserstr. 148.
1898. Mansion, Paul, Professor an der Universität, Gent (Belgien), Quai des Dominicains 6.
1900. Marco, Georg, Secretär des Wiener Schachclubs und Redacteur der Wiener Schachzeitung, Wien I, Schottengasse 7.
1898. Marcuse, A., Privatdocent an der Universität, Berlin W., Matthäikirchstr. 12.
1899. Martin, Artemas; Washington NW., D. C., U. S. A., Columbia Street 1534.
1897. Marxsen, S., Göttingen, Wiesenstr. 3a.
1897. Maschke, H., Professor an der Universität, Chicago Ill., Woodlawn Avenue 5549.
270. 1891. Maurer, L., Professor an der Universität, Tübingen, Uhlandstr. 22.
1891. Mayer, A., Professor an der Universität, Leipzig, Rofsplatz 14.
1899. Mehling, Alwin, Reallehrer, Fürth, Julienstr. 8.
1891. Mehmke, R., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Weissenburgstr. 29.
1897. Metzler, W., Professor an der Universität, Syracuse, N. Y., U. S. A.
1900. Mewes, H., Oberlehrer an der Grofsen Stadtschule, Wismar, Am Schilde 6.
1898. Meyer, Eugen, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin.
1891. Meyer, Franz, Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.
1891. Meyer, Georg, Oberlehrer an der Realschule, Bremen, Georgstr. 56.
1891. Meyer, Gustav Ferdinand, Professor, München, Amalienstr. 80, 3.
280. 1900. Miller, G. A., Instructor a. d. Cornell Universität, Ithaca, N. Y., U. S. A.
1891. Minkowski, H., Professor am Polytechnicum, Zürich, Mittelstr. 12.
1898. Mittag-Leffler, G., Professor a. d. Univers., Stockholm, Djursholm.
1899. Molien, Th., Docent an der Universität, Dorpat.
1900. Molk, Jules, Professor an der Universität, Nancy.

Jahr des Eintritts

1896. Moore, E. H., Professor an der Universität, Chicago Ill., U. S. A.
1896. Müller, Emil, Professor an der Kgl. Baugewerkschule und Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr., Dohnastr. 4.
1891. Müller, Felix, Professor, Oberloschwitz b. Dresden, Heinrichstr. 12.
1900. Müller, Hans, Cand. math., Göttingen, Düstrer Eichenweg 20.
1891. Müller, Reinhold, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hagenstr. 2.
290. 1892. Müller, Richard, Oberlehrer am Kaiser Wilhelms-Realgymnasium und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin S., Blücherstr. 35.
1898. Muth, P., Privatgelehrter, Osthofen (Rheinhessen), Wormserstr. 23.
1897. Naetsch, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Dresden; Blasewitz bei Dresden, Strieseneratr. 5.
1898. Nagaoka, H., Professor an der Universität, Tokyo (Japan).
1897. Nath, M., Oberlehrer a. Luisen-Gymn., Berlin NW., Gerhardstr. 8.
1891. Netto, E., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Gieſsen, Süd-Anlage 13.
1893. Neuberg, J., Professor an der Universität, Lüttich, Rue Sclessin 6.
1891. Neumann, Carl, Professor a. d. Univers., Leipzig, Querstr. 10—12.
1899. Neumann, Ernst, Privatdocent an der Universität, Halle a. S., Weidenplan 6.
1900. Nielsen, Niels, Privatdocent an der Universität, Kopenhagen N., Nörrebrogade 57.
300. 1900. Niklas, P., wissenschaftlicher Hülfslehrer am Gymnasium, Rastenburg, Ostpreuſsen.
1891. Noether, M., Professor a. d. Univers., Erlangen, Nürnbergerstr. 32.
1899. Nordmann, Professor a. Realgymnasium, Halberstadt, Gleimstr. 17.
1897. Oettingen, A. v., Professor a. d. Universität, Leipzig, Mozartstr. 1.
1900. Opitz, Hans R. G., Oberlehrer am Königstädtischen Realgymnasium, Berlin NW., Schleswiger Ufer 6.
1899. Osgood, W. F., Professor an der Harvard Universität, Cambridge, Mass., U. S. A.
1891. Papperitz, E., Oberbergrat, Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S., Weisbachstr. 5.
1891. Pasch, M., *G.H.R.*, Professor a. d. Universität, Gieſsen, Alicestr. 31.
1891. Pelz, C., *R.R.*, Professor an der böhmischen Technischen Hochschule, Prag, Jensteingasse 1776.
1891. Peschka, G. A. V., *R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Wien III, Jacquingasse 2.
310. 1892. Pick, G., Professor an der deutschen Universität, Prag, Kgl. Weinberge 754.
1897. Pierpont, James, Professor an der Yale Universität, New Haven, Conn. U. S. A., Mansfieldstreet 42.
1897. Pietzker, Friedrich, Professor am Gymnasium, Nordhausen.
1891. Piltz, A., Jena, Kirchplatz 5.
1898. Planck, M., Professor a. d. Universität, Berlin W., Achenbachstr. 1.
1891. Pochhammer, L., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 59.
1892. Pockels, F., Professor an der Universität, Heidelberg.

Jahr des Eintritts

1895. Pokrowsky, P., Professor an der Universität, Kiew.
1891. Pringsheim, A., Professor a. d. Universität, München, Arcisstr. 12.
1899. Protopapadaki, Pierre, Ingenieur, Athen, Rue Valaoritès 15.
320. 1897. Prümm, E., Assistent an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Bismarckstr. 2.
1891. Prym, F., Professor a. d. Univers., Würzburg, Schweinfurterstr. 3¼.
1900. Ptaszycki, J., Professor an der Universität, St. Petersburg, Nadiezdinska 11, log. 20.
1899. Pund, O., Oberlehrer, Altona, Heinrichstr. 1.
1897. Raaij, W. H. L. Janssen van, Haarlem (Holland).
1893. Rados, G., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest VII, Csengery-Gasse 1.
1896. Rausenberger, O., Professor an der Musterschule, Frankfurt a. M., Heisterstr. 8.
1893. Recknagel, G., Rector des Realgymnasiums, Augsburg.
1894. Reich, Karl, Professor am K. K. Technologischen Gewerbe-Museum, Docent a. d. Technischen Hochsch., Wien IX, Michelbeurngasse 2,
1891. Reinhardt, C., Professor a. d. Fürstenschule, Meifsen, Freiheit 16.
330. 1893. Réthy, M., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest, Soroksárer Gasse 18.
1891. Reuschle, C., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Lerchenstr. 5.
1891. Reye, Th., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Dietrichstaden 6.
1899. Ricci, Gregorio, Professor an der Universität, Padua (Italien).
1891. Richarz, F., Professor an der Universität, Greifswald.
1892. Richter, Oberlehrer am Gymnasium, Quedlinburg, Kaiserstr. 38.
1891. Riecke, E., *G.R.R.*, Professor a. d. Univers., Göttingen, Bühlstr. 22.
1897. Rinecker, Gymnasialprofessor, Regensburg.
1891. Ritter, A., *G.R.R.*, Professor, Lüneburg, Obere Schrangenstr. 18.
1891. Rodenberg, C., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstr. 6.
340. 1899. Roe, E. D. Jr., Professor an der Universität, Syracuse N. Y., Anna Street 105.
1891. Rogel, F., Ingenieur, Docent am Technicum, Mittweida, Zschirnerplatz 13.
1891. Rohn, K., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Liebigstr. 18.
1891. Rosanes, J., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Breslau, Schweidnitzer Stadtgraben 16 b.
1891. Rosenow, H., Director d. neunten Realschule, Berlin N., Badstr. 22.
1899. Rost, Georg, Assistent am mathematischen Seminar der Universität, Würzburg, Mergentheimerstr. 6.
1901. Rothrock, David Andrew, Professor an der Indiana-Universität, Bloomington, Ind., U. S. A.
1892. Rudel, K., Profess. a. d. Industriesch., Nürnberg, L. Feuerbachstr. 13.
1891. Rudio, F., Professor am Polytechnicum, Zürich, Feldeggstr. 64.
1891. Runge, C., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Kirchrode bei Hannover, Körnerstr. 19a.

Jahr des Eintritts

350\. 1891. Saalschütz, L., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Tragheimer Pulverstr. 49.
1900\. Schafheitlin, Paul, Oberlehrer am Sophien-Realgymnasium, Berlin W., Schaperstr. 17.
1899\. Schaper, Hans v., Lehrer a. d. Seefahrtsch., Bremen, Am Wall 193.
1892\. Scheffers, G., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Saalbaustr. 85.
1891\. Scheibner, W., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Leipzig, Schletterstr. 8.
1891\. Schell, W., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Kriegstr. 52.
1899\. Scheller, Arthur, Assistent der Sternwarte, Hamburg.
1893\. Schendel, L., Professor, Halensee bei Berlin, Kronprinzendamm 3.
1891\. Schilling, C., Director der Navigationsschule, Bremen, Neustadt-Wall 1.
1893\. Schilling, F., Professor a. d. Univers., Göttingen, Hainholzweg 46.
360\. 1891. Schlegel, V., Professor an der Königl. höheren Maschinenbauschule, Hagen i. W., Volmestr. 62.
1892\. Schleiermacher, L., Professor an der forstlichen Hochschule, Aschaffenburg, Grünewaldstr. 19.
1900\. Schlepps, Fritz, Oberleutnant im Fufsartillerie-Regiment von Hindersin, Neufahrwasser.
1891\. Schlesinger, L., Professor an der Universität, Klausenburg (Ungarn), Sámzaly utcza 104.
1891\. Schlömilch, O., *G.R.*, Dresden, Liebigstr. 14.
1901\. Schmidt, Adolf, Professor am Gymnasium Ernestinum, Gotha, Herrenwiesenweg 3.
1894\. Schmidt, Franz, Baumeister, Budapest V, Rudolfsquai 8.
1891\. Schmidt, M., Professor an der Technischen Hochschule, München, Hefsstr. 32.
1891\. Schoenflies, A., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Tragheimer Pulverstr. 28—29.
1893\. Scholz, P. G., Professor am Friedrichs-Realgymnasium, Berlin; Steglitz, Fichtestr. 34.
370\. 1899. Schorer, Karl, Gymnasiallehrer, Weifsenburg am Sand, Mittelfranken.
1897\. Schorr, R., Observator der Sternwarte, Hamburg.
1897\. Schotten, H., Director der städtischen Oberrealschule, Halle a. S. Sophienstr. 37.
1891\. Schottky, F., Professor a. d. Univers., Marburg, Barfüfserthor 14.
1900\. Schoute, P. H., Professor an der Universität, Groningen (Holland).
1899\. Schrader, C., *R.R.*, Berlin NW., Calvinstr. 6.
1891\. Schröder, E., *H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Gottesauerstr. 9.
1899\. Schröder, Johannes, Oberlehrer an der Oberrealschule, Hamburg, Finkenau 9.
1901\. Schröder, Richard, Oberlehrer a. d. Realsch., Cassel, Wörthstr. 12.
1892\. Schröder, Th., Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Sulzbacherstr. 7.

Jahr des Eintritts

380. 1891. Schubert, H., Professor am Johanneum, Hamburg, Domstr. 8.
1896. Schülke, A., Professor am Gymnasium, Osterode i. Ostpr.
1892. Schultz, E., Oberlehrer am Realgymnas., Stettin, Poelitzerstr. 9.
1891. Schumacher, H., Profess. a. d. Kadettenanst., München, Elvirastr. 1.
1891. Schumacher, Robert, Reallehrer an der Realschule, Augsburg, Bismarckstr. 11.
1891. Schur, F., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Linkenheimerstr. 15.
1892. Schur, W., Professor an der Universität und Director der Sternwarte, Göttingen, Geismarchaussee 11.
1894. Schwarz, H. A., Professor an der Universität, Berlin; Villencolonie Grunewald, Humboldtstr. 33.
1896. Schwatt, J., Professor an der Universität, Philadelphia Pa., U. S. A.
1891. Schwering, K., Professor, Director des Gymnasiums, Trier.
390. 1898. Scott, Charlotte Angas, Professor am College, Bryn Mawr, Pa.
1891. Seeliger, H., Professor an der Universität, Director der Sternwarte, München-Bogenhausen.
1897. Segre, C., Professor an der Universität, Turin (Italien), Corso Vittorio Emanuele 85.
1896. Selivanoff, D., Professor am Technologischen Institut und Privatdocent an der Universität, St. Petersburg, Fontanka 116, log. 16.
1897. Selling, E., Professor an der Universität, Würzburg, Maistr. 4.
1891. Servus, H., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Spandauerstr. 9.
1893. Sidler, G., Professor an der Universität, Bern, Christoffelgasse 4.
1891. Siebert, A., Oberlehrer des Kadettencorps, Grofs-Lichterfelde, Potsdamerstr. 61.
1892. Sievert, H., Professor am Gymnasium, Bayreuth.
1891. Simon, Max, Professor am Lyceum, Strafsburg i. E., Lessingstr. 5.
400. 1897. Sintzow, D., Professor an der höheren Bergschule, Ekaterinoslaw (Rufsland).
1897. Smith, David Eugene, Professor, Brockport, N. Y., U. S. A.
1901. Smith, O. A., Stud. mag., Kopenhagen C, St. Annagade 47.
1900. Smith, Percey F., Professor an der Sheffield Scientific School of Yale University, New Haven, Conn., U. S. A.
1900. Sobotka, J., Professor an der tschech. Technischen Hochschule, Brünn (Mähren), Eichhorngasse 45.
1899. Sommer, Julius, Privatdocent an der Universität, Göttingen, Wöhlerstr. 10.
1895. Sommerfeld, A., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstr. 13.
1897. Sonin, N., Professor, Mitglied der Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg.
1893. Souslow, G., Professor an der Universität, Kiew.
1900. Spitz, Arnold, Versicherungsmathematiker, Wien II, Lilienbrungasse 18.
410. 1891. Sprung, A., Professor am Meteorologischen Institut, Potsdam.
1891. Stäckel, Paul, Professor a. d. Universität, Kiel, Hohenbergstr. 13.

Jahr des Eintritts

1891. Stahl, H., Professor an der Universität, Tübingen, Neckarhalde 14.
1898. Stammer, Wilhelm, Professor, Düsseldorf, Hohenzollernstr. 9.
1891. Staude, O., Professor an der Univers., Rostock, St. Georg-Str. 38.
1897. Steinitz, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Uhlandstr. 187.
1897. Stephanos, Kyparissos, Professor an der Universität, Athen, Rue de Solon 20.
1894. Sterneck, R. v., Privatdocent an der Universität, Wien VIII, Josefstädterstr. 30.
1891. Stickelberger, L., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Baslerstr. 38.
1891. Stolz, O., Professor an der Universität, Innsbruck, Anichstr. 34.
420. 1897. Strafsmann, H. W., Oberlehrer an der 3. städt. Realschule, Berlin SW., Dessauerstr. 36.
1900. Straubel, Rudolf, Professor a. d. Univers., Jena, Beethovenstr. 2.
1897. Studnička, F. J., *H.R.*, Professor an der böhmischen Universität, Prag, Schwarze Gasse 6.
1891. Study, E., Professor an der Universität, Greifswald, Brinksstr. 4.
1900. Sturm, Ambros, Professor am Obergymnasium, Seitenstetten, Nieder-Österreich.
1891. Sturm, R., Professor an der Universität, Breslau, Fränkelplatz 9.
1898. Suták, Josef, Gymnasialprofessor und Privatdocent an der Universität, Budapest IV., Városházter 4.
1894. Tauber, A., Privatdoc. a. d. Univers., Wien VI, Gumpendorferstr. 63.
1891. Thomae, J., *G.H.R.,* Professor a. d. Univers., Jena, Kasernenstr. 9.
1897. Timerding, E., Privatdocent an der Universität, Strafsburg i. E., Fischartstr. 4.
430. 1897. Toeplitz, E., Professor am Johannes-Gymnasium, Breslau, Ohlauer-Stadtgraben 3.
1893. Tötössy, B. v., Professor an der Techn. Hochschule, Budapest.
1899. Umlauf, Karl, Oberlehrer an der Dreikönigsschule, Dresden-Neustadt, Schillerstr. 40.
1897. Vahlen, K. Th., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr., Mittel-Tragheim 27.
1891. Valentin, G., Oberbibliothekar der Kgl. Bibliothek, Berlin W., Burggrafenstr. 6.
1898. Vályi, J., Professor an der Universität, Klausenburg (Ungarn).
1893. Veronese, G., Professor an der Universität, Padua.
1898. Vieth, Joh. v., Oberlehrer am Königl. Gymnasium, Dresden-Neustadt, Arndtstr. 6.
1893. Vogel, P., Professor an der Artillerie- und Ingenieurschule, München, Linprunnstr. 63.
1892. Voigt, W., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Göttingen, Grüner Weg 1.
440. 1891. Von der Mühll, K., Profess. a. d. Univers., Basel, Bäumleingasse 15.
1891. Vofs, A., Professor an der Universität, Würzburg, Sanderglacis 31.
1900. Vries, H. de, Lehrer an der 1. Oberrealschule von Amsterdam, Haarlem (Holland), Kennemerplein 7.
1898. Vries, Jan de, Professor an der Universität, Utrecht (Holland).

Jahr des Eintritts

1892. Wälsch, E., Professor an der Technischen Hochschule, Brünn.
1895. Wallenberg, G., Oberlehrer an der neunten Realschule, Berlin N., Brunnenstr. 120.
1898. Walter, Alois, Professor an der Staats-Oberrealschule, Graz, Grazbachgasse 15.
1900. Walter, Theodor, Director der Grofsh. Realschule, Bingen a. Rh.
1891. Wangerin, A., Professor a. d. Univers., Halle a. S., Reichardtstr. 2.
1893. Wassiljef, Alexander, Professor an der Universität, Kasan.
450. 1895. Weber, E. v., Privatdocent a. d. Univers., München, Alexanderstr. 1.
1891. Weber, Heinrich, Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Goethestr. 27.
1897. Weber, M., kgl. Regierungsbauführer, Assistent an der Technischen Hochschule, Hannover, Baumstr. 19.
1900. Webster, Arthur G., Professor an der Clark University, Worcester, Mass., U. S. A.
1900. Weder, Otto, Lehrer an der II. Realschule, Leipzig, Hospitalstr. 23.
1891. Weiler, A., Professor an der Universität, Zürich-Hottingen, Neptunstrafse 4.
1891. Weingarten, J., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin; Charlottenburg, Grolmanstr. 57.
1891. Weinmeister, J. Ph., Professor an der Forstakademie, Tharandt.
1894. Weiss, W., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Prag II, Dittrichgasse 1773.
1898. Wellstein, J., Privatdocent an der Universität, Strafsburg i. E., Fischartstr 10.
460. 1891. Weltzien, C., Professor an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule, Berlin; Zehlendorf, Prinz Handjery-Str. 3.
1898. Wend, H. O., Lehrer an den Techn. Staatslehranstalten, Chemnitz.
1899. Wendler, A., Gymnasiallehrer, Windsbach, Hauptstr. 25.
1897. Wernicke, A., Oberrealschuldirector, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hintern Brüdern 30.
1900. Westlund, Jacob, Instructor an der Purdue-Universität, La Fayette, Ind., U. S. A., Vine Street 219.
1897. Westphal, A., Professor, Abteilungsvorsteher am kgl. Geodätischen Institut, Potsdam.
1897. White, H., Professor an der Universität, Evanston, Ill., U. S. A.
1898. Wiechert, Emil, Professor an der Universität, Göttingen, Weender Chaussee 15.
1900. Wieleitner, H., Gymnasiallehrer, Speyer, Ludwigstr. 33.
1897. Wien, Willy, Professor an der Universität, Würzburg.
470. 1891. Wiener, H., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 28.
1900. Willgrod, H., Oberlehrer der öff. Handelslehranstalt, Chemnitz, Kaiserstr. 21.
1891. Wirtinger, W., Professor a. d. Univers., Innsbruck, Museumstr. 19.
1893. Witting, A., Oberlehrer am Gymnasium, Dresden-Strehlen, Waterloostr. 13.
1891. Wölffing, E., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Hackländerstr. 38.

Jahr des Eintritts

1891. Wolf, M., Professor an der Universität, Director an der Sternwarte, Heidelberg.
1900. Wolf, Wilhelm, Professor a. Realgymn., Leipzig, Stephanstr. 22.
1897. Wolfskehl, P., Privatgelehrter, Darmstadt, Karlstr. 84.
1899. Young, W. H., formerly fellow of Peterhouse and lecturer in Mathematics, Cambridge, England.
1893. Zahradnik, Karl, Professor an der tschechischen Technischen Hochschule, Brünn (Mähren).
480. 1899. Zermelo, E., Privatdocent a. d. Univers., Göttingen, Rosdorferweg 7.
1893. Zindler, K., Professor an der Universität, Innsbruck.
1892. Ziwet, A., Professor an der Universität, Ann Arbor, Mich., U. S. A.
1892. Zorawski, C. v., Professor an der Universität, Krakau.
1894. Zsigmondy, Karl, Privatdocent an der Universität, Wien I, Schmerlingplatz 2.
1891. Züge, Professor am Gymnasium, Wilhelmshaven, Roonstr. 29.

1899. Allgemeine Bibliothek d. Grofsherz. Techn. Hochschule zu Darmstadt.
1899. Bibliothek der Technischen Hochschule zu Karlsruhe.
1897. Bibliothek der Kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu St. Petersburg.
1898. Dorotheenstädtisches Realgymnas., Berlin NW., Georgenstr. 30—31.
490. 1897. Mathematisches Institut der Technischen Hochschule, München.
1897. Mathematischer Verein der Universität, Berlin NW., Dorotheenstr. 5.
1896. Mathematischer Verein der Universität, Göttingen.
1899. Mathematischer Verein der Universität, Halle a. S.
1900. Mathematischer Verein der Universität, München.
1897. Kaiserliche Universitäts- und Landesbibliothek, Strafsburg i. E.
1900. Kgl. Oeffentl. Bibliothek, Stuttgart, Neckarstr. 8.
1895. Universitäts-Bibliothek zu Utrecht.

1901. Rudolf, Karl, Ingenieur, Bochum, Kortumstr. 21.

Zum Gedächtnis.

Karl Bobek*).

Am 15. December 1899 wurde Professor Karl Bobek plötzlich dahingerafft. Im kräftigsten Mannesalter, mitten aus reicher wissenschaftlicher und Lehrthätigkeit schied er.

Geboren am 25. Februar 1855 zu Lhotka in Böhmen wuchs der Knabe in den ärmlichsten Verhältnissen auf. Durch ungewöhnliche Intelligenz unter seinen Altersgenossen auffallend, kam er nach beendeter Volksschule an die Realschule in der Nikolandergasse in Prag. Hier erregte sein ausgesprochenes mathematisches Talent sehr bald die Aufmerksamkeit des ausgezeichneten mathematischen Pädagogen Franz Weyr (des Vaters der bekannten österreichischen Mathematiker Emil und Eduard Weyr). Er absolvirte die Realschule mit ungewöhnlicher Auszeichnung als Primus in allen Klassen, was um so höher anzuschlagen ist, als er während der ganzen Zeit nicht blofs für die eigene Erhaltung, sondern auch durch die Sorge für seine Angehörigen genötigt war, alle schulfreien Tagesstunden gänzlich zu Privatunterricht zu verwenden. Im October 1875 bezog er die deutsche technische Hochschule zu Prag. In den folgenden Jahren studirte er an dieser Hochschule und an der Prager Universität Mathematik und Physik unter Küpper, Lieblein, Durège, Lippich u. a. Im Jahre 1879, kaum von dem bosnischen Occupationsfeldzuge zurückgekehrt, welchen er als Sanitätsofficier mitgemacht hatte, legte er die Lehramtsprüfung in Mathematik und darstellender Geometrie mit ausgezeichnetem Erfolge ab. Im October desselben Jahres wurde er Assistent an der Lehrkanzel für darstellende Geometrie des Professor Küpper. Mit Ausnahme eines einjährigen Aufenthaltes (1881/2) an der Uni-

*) Nach einem in der Sitzung der deutschen mathem. Gesellschaft in Prag am 20. Decbr. 1899 von G. Pick gehaltenen, in den „Monatsheften f. Math. u. Phys. XI" veröffentlichten Nachruf hier von W. Weiss in erweiterter Gestalt mitgeteilt.

versität in Leipzig, und eines halbjährigen (Sommer 1883) in Paris, verblieb er in dieser Stellung bis zum Jahre 1886. Im Jahre 1883 hatte er sich an der deutschen technischen Hochschule für Mathematik habilitirt. Im Jahre 1885 wurde er auf Grund der Dissertation: „Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene“ und der mit Auszeichnung abgelegten Rigorosen an der Universität Erlangen zum Doctor philosophiae promovirt. Als Privatdocent wirkte er bis zum Jahre 1893, in welchem seine Berufung als aufserordentlicher Professor der Mathematik an die deutsche Universität in Prag erfolgte. Vorher noch war er vom Ministerium des Innern zum wissenschaftlichen Beirat der neu errichteten Arbeiter-Unfallsversicherungsanstalt für das Königreich Böhmen ernannt worden, um deren Organisation er sich hervorragende Verdienste erwarb.



Dr Karl Bobek

Für die Richtung der ersten wissenschaftlichen Arbeiten Bobek's war der Einflufs Küpper's bestimmend. Sie bewegen sich durchwegs auf constructiv-geometrischem Gebiete und enthalten sehr beachtenswerte Resultate betreffend Curven dritter und vierter Ordnung, Flächen dritter Ordnung und Regelflächen, als deren Quelle ihm ausschliefslich die geometrische Erzeugung dieser Gebilde dient. Alle damals noch bei vielen, namentlich auch österreichischen, Geometern beliebten weniger sicheren Schlufsweisen (Correspondenz- und Abzählungsbetrachtungen) vermied er so mit sicherem Instincte. Man wird dies um so höher anrechnen, als er damals die neueren grundlegenden Anschauungen, welche durch Riemann's Entdeckungen an-

gebahnt, durch Brill und Noether in geometrischer Richtung ausgebildet worden waren, schlechterdings nicht kannte.

Es ist schon hieraus deutlich, welche Bereicherung, ja geradezu Umwälzung seines geometrischen Denkens das im Klein'schen Seminar in Leipzig verbrachte Jahr herbeigeführt haben mufs. In der That hatte er, von dort zurückgekehrt, die Freude, seinen genialen, aber der modernen Entwickelung der Mathematik fremd gewordenen Lehrer und Freund Küpper in diese neuen und tiefen geometrischen Methoden einzuführen, und eine Reihe zum Teil gemeinsamer, zum Teil wenigstens in stetem wissenschaftlichen Verkehr entstandener Arbeiten sind die Frucht dieses wissenschaftlichen Verhältnisses.

Von den hierher gehörigen Arbeiten Bobek's sei zuerst diejenige „Über projective Erzeugung von Curven" (Math. Ann. XXV) erwähnt. Sie enthält eine Kritik bezw. Präcisirung der Chasles'schen Sätze über die Verteilung der Basispunkte der erzeugenden Büschel auf der erzeugten Curve. Sodann eine Reihe von Aufsätzen über hyperelliptische Curven in den Wiener Berichten, welche in einer Arbeit im 29. Bd. der Math. Ann. zusammengefafst sind. Von den darin enthaltenen zahlreichen Resultaten sind besonders bemerkenswert: der Satz, dafs die Ordnung einer hyperelliptischen Curve vom Geschlechte p nicht kleiner als $p+2$ sein kann, und dafs bei der Minimalordnung $p+2$ ein p-facher Punkt auftreten mufs; die Benützung der Enveloppe der Verbindungsgeraden der $G_2^{(1)}$ (einer rationalen Curve $(n-p-1)^{\text{ter}}$ Klasse) zur Erzeugung der Grundcurve, sowie zur analytischen Darstellung derselben und ihrer adjungirten φ-Curven, insbesondere für $n=p+3$, und gewisse specielle hyperelliptische C_{2p}^{p} *). Ferner gehört hierher die Arbeit „Über Dreischaarcurven" (Wr. Ber., Bd. 98), in welcher in Analogie mit den hyperelliptischen Curven solche mit einer $G_3^{(1)}$ behandelt werden. Es wird gezeigt, dafs eine $G_3^{(1)}$ nur für $p>4$ auftreten kann, und dann immer nur eine, und dafs für solche Curven die Adjungirten $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung die Grundlage der Untersuchung zu bilden haben. Schliefslich die Arbeiten in den Wiener Berichten: „Über das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumcurven gegebener Ordnung" (Bd. 93), „Über das Maximalgeschlecht der windschiefen Flächen gegebener Ordnung" (Bd. 96), „Über Raumcurven m^{ter} Ordnung mit $(m-2)$-fachen Secanten" (Bd. 95), von deren reichem Inhalt angeführt sein möge: der Satz,

*) Man vergl. das ausführliche Referat v. Hrn. Hurwitz in den Fortschritten der Mathematik, Jahrg. 1887.

dafs das Geschlecht einer Regelfläche n^{ter} Ordnung höchstens gleich dem Maximalgeschlecht einer Raumcurve n^{ter} Ordnung werden kann, und die Ermittelung des Maximums des Geschlechts einer in einer linearen Congruenz enthaltenen Regelfläche.

In loserem Zusammenhang mit diesen Arbeiten steht ein aus derselben Zeit stammender Aufsatz: „Über Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Zwei etc." (Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 53), in welchem auf Grund kanonischer Gleichungsformen die Systeme der vierfach berührenden Kegelschnitte und der Doppeltangenten untersucht werden.

In den letzten Jahren wandte sich Bobek wieder der Theorie der Flächen dritter Ordnung zu. Es entstanden die Arbeiten: „Die Invarianten der allgemeinen Flächen dritter Ordnung" (Wr. Ber., Bd. 103), „Über die Invarianten der Fläche dritter Ordnung" (Monatshefte für Math. u. Phys., Bd. 8), „Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen I, II" (ebenda Bd. 10). Im Gegensatze zu seiner früheren auf constructiver Grundlage, sowie auf Continuitätsbetrachtungen fufsenden Beschäftigung mit Flächen dritter Ordnung (Vergl. „Zur Classification der Flächen dritter Ordnung" Wr. Ber., Bd. 96) leiten ihn jetzt invarianten-theoretische und gruppen-theoretische Gesichtspunkte. Er zeigt an der allgemeinen Fläche selbst ein System von Doppelverhältnissen, welches als volles System (irrationaler) Invarianten der Fläche aufgefafst werden kann. Andererseits zählt er die möglichen Specialisirungen von Flächen dritter Ordnung vollständig auf, welche durch das Auftreten von Collineationen des Gebildes in sich charakterisirt werden.

Zwei Lehrbücher „Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen" und „Einleitung in die projective Geometrie der Ebene", eine Frucht der an der technischen Hochschule gehaltenen Vorlesungen, leiten zur Würdigung seiner Lehrthätigkeit über. Schon als Assistent hatte er wegen der grofsen Hörerzahl der technischen Hochschule eine umfassende unterrichtliche Thätigkeit in den Constructionsübungen zur darstellenden Geometrie zu leisten. Hier entwickelte sich seine geradezu verblüffende Sicherheit und Gewandtheit im Durchblicken der complicirtesten geometrischen Constructionsbeziehungen, sowie die aufserordentliche technische Gewandtheit und der vollendete Geschmack bei der zeichnerischen Darstellung, wodurch seine Zeichnungen geradezu zu kleinen Kunstblättern wurden.

Seine Lehrthätigkeit als Privatdocent war leider nach Ablauf seiner Assistentenzeit durch Existenzsorgen gehemmt. Nichts-

destoweniger hat er damals über die verschiedensten Teile der Mathematik Vorlesungen gehalten, dabei stets neue Gebiete sich zu eigen machend, wovon hier nur seine Vorlesungen über Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung als Zeugnis angeführt sein mögen.

Sehr umfassend war seine unterrichtliche Thätigkeit als Professor an der deutschen Universität: sie erstreckte sich über fast alle Gebiete der höheren und Elementarmathematik. Vor allem aber wird ihre Wirkung zu einer bleibenden durch den von ihm an dieser Universität eingeführten Unterricht in der darstellenden Geometrie, durch welchen er einem seit lange gefühlten Bedürfnisse entgegengekommen ist. —

Der Grundzug des Charakters des allzu früh Geschiedenen war eine ungewöhnliche Energie. Diese und seine reiche Begabung allein erhielten seine Widerstandskraft in schwerem Lebenskampfe ungebrochen und liefsen ihn manche unverdiente Zurücksetzung leichter verwinden. Sie waren zugleich die Quelle seiner aufserordentlichen wissenschaftlichen Anpassungsfähigkeit. Bobek besafs umfassende Kenntnisse auf den heterogensten Gebieten der reinen und angewandten Mathematik, und die fast beispiellose Leichtigkeit und Schnelligkeit, mit welcher er sich neuer Gebiete zu bemächtigen wufste, erregte oft das Erstaunen und die Bewunderung seiner Freunde. Er war ein Mann des raschen Entschlusses und der raschen Durchführung in wissenschaftlichen Dingen, wie im Leben. So war auch sein Wesen geradezu und konnte hiedurch bei ferner Stehenden hie und da Anstofs erregen. Seine Freunde aber, denen er selbst stets treu anhing, haben gerade darin einen seiner Vorzüge erblickt. Trotz drückender materieller Sorgen bis weit in sein Mannesalter hinein wufste er sich Heiterkeit des Gemüts zu bewahren und war frei von Menschenhafs. Reiches Glück wurde ihm erst in den letzten Jahren und zwar in seiner jungen Ehe zu teil, wie er selbst so oft seinen Freunden gegenüber mit Rührung zum Ausdruck gebracht hat. So war ihm nach einem Leben voll Entbehrungen und schwerer Kämpfe ein allzu kurzer Sonnenblick gegönnt.

Verzeichnis der wissenschaftlichen Publicationen Bobek's.

In den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

1. Über ebene rationale Curven vierter Ordnung. Bd. 79, Abt. II. 1879.
2. Über metrische Beziehungen, die in einer Congruenz linearer Complexe stattfinden. Bd. 83, Abt. II. 1881.

3. Über Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte. (Mitteilung I, II) Bd. 90, Abt. II. 1884.
4. Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene. (Mitteilung I, II, III) Bd. 91, Abt. II. 1885 (Dissertation Erlangen).
5. Über das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumcurven gegebener Ordnung. Bd. 93, Abt. II. 1885.
6. Über das verallgemeinerte Correspondenzprincip. Bd. 93, Abt. II. 1886.
7. Über hyperelliptische Curven. (Mitteilung I, II, III) Bd. 93, 94, 95, Abt. II. 1886.
8. Über Raumcurven m^{ter} Ordnung mit $(m-2)$fachen Secanten. Bd. 95, Abt. II. 1887.
9. Über das Maximalgeschlecht von windschiefen Flächen gegebener Ordnung. Bd. 96, Abt. II. 1887.
10. Zur Classification der Flächen dritter Ordnung. Bd. 96, Abt. II. 1887.
11. Über die Steiner'schen Mittelpunktcurven. (Mitteilung I, II, III) Bd. 98, Abt. II. 1888, 1889.
12. Über Dreischaarcurven. Bd. 98, Abt. IIa. 1889.
13. Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. Bd. 103, Abt. IIa 1894.

In den Denkschriften der math.-naturw. Klasse der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

1. Über Curven vierter Ordnung vom Geschlechte zwei; ihre Systeme von berührenden Kegelschnitten und Doppeltangenten. Bd. 53. 1887.

In den mathematischen Annalen:

1. Über projective Erzeugung von Curven. Bd. 25. 1885.
2. Über hyperelliptische Curven. Bd. 29. 1887.

In den Sitzungsberichten und Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

1. Über die Krümmungsmittelpunkte der Curven, welche die Punkte einer Ebene bei einer unendlich kleinen Verschiebung derselben in ihr beschreiben. Berichte, Jahrg. 1880.
2. Über Construction von Flächen zweiter Ordnung aus imaginären Bestimmungsstücken. Berichte, Jahrg. 1882.
3. Über involutorische Cremona-Transformationen der 14ten u. 11ten Ordnung und hyperelliptische Curven $3n+1^{ter}$ und $3n+2^{ter}$ Ordnung (Anhang zu einem Aufsatze des Herrn Küpper). Abhandlungen, VII. Folge, Bd. 1. 1885.

In den Monatsheften für Mathematik und Physik in Wien:

1. Die Brennpunktcurve des Kegelschnittsbüschels. Bd. 3. 1892.
2. Über die Invarianten der Fläche dritter Ordnung. Bd. 8. 1898.
3. Über Flächen dritter Ordnung, welche Collineationen in sich zulassen. (Abhandlung I, II) Bd. 10. 1899.

Sonstige Publicationen:

1. Remarque sur la ligne de striction de l'hyperboloïde. (Bulletin de la Société Mathématique de France, XI.) 1883.

2. Zur Theorie des Kegelschnittbüschels. (Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Prag.) 1892.

Lehrbücher:

1. Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen. (Leipzig, Teubner 1884.)
2. Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene. (Leipzig, Teubner 1889.)

Reinhold Hoppe*).

Von **E. Lampe** in Berlin.

Am 7. Juni dieses Jahres (1900) verschied in seiner Wohnung zu Berlin Prof. Dr. Reinhold Hoppe, den Jahren nach wohl das älteste der Mitglieder der Physikalischen Gesellschaft. Vierzig Jahre hat er der letzteren angehört; für zweiundzwanzig Jahresberichte der Fortschritte der Physik, die Jahre 1863 bis 1884 umfassend, hat er als Mitarbeiter Referate geliefert, zuerst über Aeromechanik, Licht und Wärme, sodann aber vom XXII. Bande an über Festigkeit und Elasticität. In den Sitzungen hat er wohl kaum je das Wort ergriffen; gleichwohl bekundete er sein lebhaftes Interesse an den Verhandlungen durch sein regelmäfsiges Erscheinen zu den Sitzungsabenden. Als es ihm in seinem höheren Alter schwerer wurde, den Vorträgen zu folgen, beschränkte er seine Anwesenheit mehr und mehr auf die letzte Viertelstunde, um sich denen anzuschliefsen, welche bei den Nachsitzungen in freier Unterhaltung wissenschaftliche Gegenstände erörterten. Zuletzt kam er nur noch zu diesen geselligen Zusammenkünften, sowie zu den Stiftungsfesten, meistens ein schweigsamer Gast, aber zuweilen doch plötzlich und lebendig in die Unterhaltung eingreifend.

Ernst Reinhold (Reginhald) Eduard Hoppe wurde zu Naumburg an der Saale am 18. November 1816 geboren als Sohn des Dompredigers Ernst August Dankegott Hoppe und seiner Ehefrau Friederike Wilhelmine, geb. Nitzsch, der Schwester des Theologen Karl Immanuel Nitzsch; er gehörte also von väterlicher und von mütterlicher Seite her bekannten und hoch geachteten Ge-

---

*) Dieser Nachruf bildet einen Abdruck aus den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft II. Jahrgang Nr. 13. Das ausführliche Verzeichnis der Schriften von R. Hoppe hat der Verfasser für den Jahresbericht besonders zusammengestellt. Das beigegebene Bildnis hat der Neffe des Verstorbenen zur Verfügung gestellt. [Red. Comm.]

lehrtenfamilien an. Unter den elf grofs gezogenen Kindern des Pfarrhauses war er das sechste, von den vier Brüdern der dritte. Sein um vier Jahre älterer Bruder Karl war der Gründer der bekannten Maschinenbauanstalt und Eisengiefserei zu Berlin; der um zwei Jahre ältere Bruder Ernst war Oberförster, und der um neun Jahre jüngere Bruder Felix Hoppe-Seyler Chemiker und Physiologe, Professor an der Universität Strafsburg. Zweimal wechselte die Familie noch ihren Wohnsitz; bald nach der Geburt des kleinen Reinhold zum Superintendenten in Freiburg an der Unstrut befördert, siedelte der Vater nach dieser Stadt über, später, am Anfange der dreifsiger Jahre, in gleicher Stellung nach Eisleben. Dort starb jedoch bald nach dem Einzuge in die neue Stadt die Mutter (19. Febr. 1832), einige Jahre darauf der Vater (10. Oct. 1835); mit neunzehn Jahren war Reinhold also des Vaters und der Mutter beraubt. Zuerst auf dem Gymnasium in Eisleben vorgebildet, genofs er später der Wohlthat des Unterrichtes auf der Landesschule Pforta, und zuletzt besuchte er das Gymnasium in Greifswald, wo seine an den dortigen Superintendenten und Prof. Karl Vogt vermählte Schwester Laura lebte. Mit dem Zeugnis der Reife des Greifswalder Gymnasiums vom 30. August 1838 versehen, bezog der 22-jährige Abiturient zunächst die Universität Kiel auf zwei Semester; die beiden folgenden Semester studirte er in Greifswald, die letzten drei in Berlin, wo er am 24. März 1842 sein Abgangszeugnis nahm. Die Neigung zur Beschäftigung mit der Mathematik soll bei ihm früh durch seinen älteren Bruder



Reinh. Hoppe

Karl geweckt sein, der ihn schon in seinem zehnten Lebensjahre in die Geheimnisse der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung einweihte.

Nach der Beendigung der Studienzeit wandte sich Reinhold Hoppe der Lehrthätigkeit zu. Das Probejahr erledigte er am Gymnasium zu Greifswald von Michaelis 1842 bis 1843. Von Ostern 1846 bis Michaelis 1849 nahm er eine Stelle als Lehrer in der Erziehungsanstalt zu Keilhau an, in welcher die Fröbel'schen Grundsätze der Erziehung zur Anwendung gebracht wurden. Von Michaelis 1849 bis 1853 versuchte er sich als Lehrer am Köllnischen Realgymnasium zu Berlin, das zu jener Zeit unter dem Director August in hoher Blüte stand. Während dieser Zeit erwarb er sich an der Universität zu Halle den Doctorhut am 25. November 1850. Da seiner Unterrichtsarbeit der wünschenswerte Erfolg nicht entsprach, aufserdem seine Forschernatur nach einer freieren Thätigkeit drängte, habilitirte er sich 1853 als Privatdocent für Mathematik an der Berliner Universität. Noch einmal vertauschte er den Hörsaal der Universität mit den Klassen eines Gymnasiums, als er von Ostern 1858 bis 1859 eine Lehrstelle am Gymnasium zu Glogau übernahm. Aber auch dieses Mal versagte seine Natur gegenüber den Ansprüchen der Schule, und so kehrte er denn 1859 an die Berliner Universität zurück und gehörte ihr von da an ohne Unterbrechung als Privatdocent bis zu seinem Tode am 7. Juni 1900 an. Schon bei seiner Habilitation im Jahre 1853 hatte er sich um die Lehrbefugnis für Philosophie beworben, ohne sie aber zu erlangen. Ein zweites Gesuch vom Jahre 1870 hatte keinen besseren Erfolg; seinem im Jahre 1871 erneuten Antrage wurde dann endlich auf energische Befürwortung von Trendelenburg Folge gegeben. Den Charakter als Professor erhielt er 1870. — Nach dem Tode Grunert's 1872 wurde ihm die Redaction des Archivs der Mathematik und Physik anvertraut, eine Thätigkeit, die ihm hohe Befriedigung gewährte, weil dadurch seine Existenz in mehr als einer Beziehung einen Halt gewann, und weil er damit die Gelegenheit erhielt, in einer seiner Natur zusagenden Art durch Öffnung des reichen Schatzes seines Wissens nach aufsen zu wirken. Die Pflichten dieser Schriftleitung hat er bis zu seinem Tode im Alter von $83\frac{1}{2}$ Jahren treu erfüllt. Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala gehörte er als ordentliches Mitglied an. Dies sind die Daten für den Gang seines Lebens.

Die wissenschaftliche Production des Verschiedenen, die sich über einen Zeitraum von 55 Jahren erstreckt, ist eine überaus

reiche und vielseitige gewesen. Er war eben nicht ein einseitiger Mathematiker, sondern sein Geist umspannte neben allen Gebieten der Mathematik die Physik, die Philosophie, die Sprachforschung und suchte Erholung in der Ausübung der Musik; endlich versenkte er sich als echter Sohn eines evangelischen Pfarrhauses philosophisch in die letzten Fragen der Beziehungen des Menschen zu Gott. Was alle seine Schriften kennzeichnet, ist die Selbständigkeit und Ehrlichkeit seines Denkens; überall leuchtet ein abgeschlossenes, fertiges Wesen hervor, das in sich Genüge gefunden hat. Mag der Leser sich auch nicht mit ihm in Übereinstimmung befinden, so nötigt der tiefe Ernst, mit dem alle Fragen behandelt sind, Achtung vor einem Geiste ab, der nach langer und unablässiger Gedankenarbeit eine in sich ruhige und befriedigte Klarheit errungen hat und im Besitze einer nicht mehr zu erschütternden Überzeugung eine oft schneidende Kritik übt.

Gehen wir zunächst auf die mathematischen Schriften ein, so erregt die bloſse Anzahl derselben Bewunderung. Im Archiv der Mathematik hat Hoppe rund 200 Originalartikel veröffentlicht; dazu treten etwa 50 mathematische Aufsätze in anderen Zeitschriften, ferner vier selbständig erschienene Arbeiten. Wenn man auch aus den Veröffentlichungen im Archiv viele kleinere Notizen aussondert, die augenscheinlich häufig zur Füllung eines Heftes geschrieben sind und den Vorlesungsheften entnommen sein mögen, so bleiben immer noch genug übrig, deren Inhalt in der einen oder anderen Hinsicht beachtungswert, ja bedeutend ist, und auch jene kleineren Artikel tragen in vielen Wendungen das Gepräge eines ursprünglich schaffenden Geistes. Allerdings ist, besonders in der späteren Zeit, nicht immer hinreichend darauf Rücksicht genommen, ob die nämlichen Gedanken nicht auch schon von anderen Forschern oder gar vom Schreiber selbst ausgesprochen waren. Bei den Arbeiten, die dem höheren Alter Hoppe's angehören, liegt es nahe, eine Entschuldigung für ein derartiges Verfahren in zunehmender Gedächtnisschwäche zu suchen; doch dürfte der tiefere Grund anderswo liegen. Nachdem er bis gegen sein vierzigstes Lebensjahr hin gearbeitet hatte, um einen festen Standpunkt in seinen wissenschaftlichen Anschauungen zu gewinnen, beschränkte er sich von dieser Zeit an im wesentlichen darauf, seine eigenen Forschungen anzustellen, und er berücksichtigte dabei kaum noch die groſsen Entdeckungen, die in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts von anderen Forschern gemacht wurden. Hauptsächlich durch das Studium der Arbeiten Jacobi's herangebildet, blieb er

auf diesem Boden stehen, und sogar der ihm sehr wohlgesinnte Dirichlet machte ihm bezüglich einer seiner Arbeiten über Hydrodynamik schon 1853 den Vorwurf, der Verfasser besitze keine vollständige Kenntnis von den zahlreichen in der letzten Zeit über die Integration der Laplace'schen Differentialgleichung unternommenen Arbeiten. Indem er sich so früh schon in seine Gedanken einspann, bewahrheitete er den vom alten Goethe zur Abwehr geschriebenen Ausspruch: „Eilt aber die Raupe sich einzuspinnen, Nicht kann sie mehr Blättern Geschmack abgewinnen.“ Als Einsiedler der Wissenschaft lebend, kümmerte er sich um die Vorgänge auf dem Gebiete seiner Hauptwissenschaft zuletzt so wenig, dafs ihm die Namen mancher der berühmtesten zeitgenössischen Mathematiker ganz fremd blieben.

Die ersten Untersuchungen Hoppe's beziehen sich auf die Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten und sind unter diesem Titel in einem Buche 1845 von dem damals neunundzwanzigjährigen jungen Mathematiker veröffentlicht worden. Sowohl im Journal für die reine und angewandte Mathematik als auch in den Mathematischen Annalen hat er unter demselben Titel zur Ergänzung kleinere Aufsätze erscheinen lassen. Noch heute gilt jenes Buch als eine wertvolle und tüchtige Monographie über den Gegenstand. Mit dieser Veröffentlichung begann Hoppe also die Reihe seiner Arbeiten aus dem Gebiete der Infinitesimalrechnung sowie der Differentialgleichungen, von denen bei seiner Habilitation in Berlin schon einige gedruckt vorlagen. Auf Dirichlet hatten diese Erstlingsarbeiten von Hoppe einen günstigen Eindruck gemacht; er erkannte mehrere gute Gedanken in ihnen an, die zum Teil mit Geschick und nicht ohne Eleganz durchgeführt wären, und selbst in der oben erwähnten, minder gelungenen Arbeit über Hydrodynamik erblickte er die Hand eines in den Methoden der Analysis geübten Gelehrten.

Mit den Grundlagen der Differential- und der Integralrechnung beschäftigen sich mehrere Aufsätze der Jahre 1871 bis 1873. Als die beiden Fundamentalsätze bezeichnet er die Aussagen: „Unendlich klein *ist* eine Variable, wenn sie beliebig klein werden kann. Zwei Constanten, die von einer Variable unendlich wenig differiren, sind einander gleich.“ Hiermit hofft er, wie in einem Selbstreferate ausgesprochen wird, die Jahrhunderte lang schwebende Frage über die Möglichkeit einer exacten Bestimmung des Unendlichen zum Abschlufs gebracht zu haben. Eine zusammenfassende Darstellung des ersten Teiles der Infinitesimalrechnung lieferte er in dem „Lehr-

buch der Differentialrechnung und der Reihentheorie" (1865), das, wie alle Erzeugnisse der Hoppe'schen Muse, knapp geschrieben ist, sich daher zur Einführung für bequeme Anfänger nicht recht eignet und aus diesem Grunde nicht die Verbreitung gefunden hat, welche es verdient.

Von den übrigen, hierher gehörigen Abhandlungen wollen wir noch den instructiven Aufsatz nennen: „Erste Sätze von den bestimmten Integralen, unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt" (1877). Ferner sei aus denjenigen Artikeln, welche den Differentialgleichungen gewidmet sind, eine Notiz im Journal für Mathematik, Bd. 58 (1861), erwähnt betreffs einer gewissen partiellen Differentialgleichung, die von Herrn Fuchs in demselben Bande mit Benutzung eines Poisson'schen Resultates behandelt war. Hoppe zeigte, dafs die betreffende Abhandlung Poisson's gerade für den benutzten Fall einen Fehler enthielt, der deshalb in die Fuchs'sche Arbeit eingegangen war; nach einem Verfahren, das den Irrtum Poisson's vermied, entwickelte er dann die richtige Lösung.

Wenn wir uns mit der vorstehenden kurzen Besprechung einzelner Untersuchungen Hoppe's aus der Analysis begnügen müssen, so wollen wir doch hinzufügen, dafs er gelegentlich auch Fragen aus der Algebra, der Zahlentheorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelte und sich mit speciellen Functionen, wie der Gammafunction und den elliptischen Transcendenten, beschäftigte. An dieser Stelle müssen wir auch der separat erschienenen Tafel zur dreifsigstelligen logarithmischen Rechnung vom Jahre 1876 gedenken.

Wenden wir uns nun zur Geometrie, zu demjenigen Gebiete, dem Hoppe in seinen Forschungen wohl den gröfsten Platz eingeräumt hat. Sowohl die analytische Geometrie im allgemeinen, als auch besonders derjenige Teil, den man jetzt als Differentialgeometrie bezeichnet, sind bevorzugte Gegenstände seiner Untersuchungen geblieben. Dagegen hat er sich für die moderne synthetische Geometrie offenbar nie begeistern können; dies ist um so auffälliger, als Steiner zu der Zeit, als Hoppe in Berlin studirte, eine grofse Anziehung auf die jungen Berliner Mathematiker ausübte. Gerade diese Beeinflussung der Denkweise dürfte der im eigenen Denken schon erstarkte junge Hoppe jedoch abgelehnt haben.

Aus der Fülle der in den Hoppe'schen bezüglichen Abhandlungen niedergelegten Gedanken können wir nur einige hervorheben. In den „Principien zur Flächentheorie", die ursprünglich

im Archiv der Mathematik (1876) veröffentlicht wurden, später den zweiten Teil des Lehrbuches der analytischen Geometrie (1880) bildeten, werden neben den drei Fundamentalgröfsen erster Ordnung von Gaufs als Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung diejenigen drei Ausdrücke ganz allgemein angewandt, die zwar Brioschi[1]) schon benutzt hatte, die aber Hoppe deshalb ganz allgemein einzuführen erklärt, weil die theoretisch wichtigen geometrischen Eigenschaften und Bedingungen im einfachsten Connex mit den Werten und Relationen jener sechs Gröfsen stehen. In dieser Beziehung hat sich einer der besten Kenner dieses Gebietes, Herr Knoblauch, in seiner Abhandlung über Fundamentalgröfsen in der Flächentheorie und in seinem Buche „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen" diesem Gebrauche angeschlossen.

Eine Reihe von Arbeiten dieser Theorie ist ferner dem Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems gewidmet, für dessen Lösung Hoppe einen Weg ausfindig machte, der in manchen Fällen zum Ziele führt. So konnte er nach seinem Verfahren die allgemeinste Lösung der Aufgabe durchführen[2]), orthogonale Flächensysteme zu finden, bei denen die eine Flächenschar aus Flächen zweiter Ordnung besteht; er traf in dem Resultate seiner Rechnung mit Schläfli zusammen, der zwei Jahre vorher dasselbe Thema in einer besonderen Arbeit behandelt hatte[3]).

In der Curventheorie wählte Hoppe zwei Variablen, die der Curve selbst eigentümlich angehören und vom Coordinatensystem unabhängig sind, den Krümmungswinkel τ und den Torsionswinkel ϑ, d. h. diejenigen Winkel, deren Differentiale die Winkel zweier aufeinander folgenden Tangenten und Schmiegungsebenen sind. Die analytische Behandlung geometrischer Gebilde mit Hilfe derartiger Gröfsen bezeichnet man jetzt als „geometria intrinseca"; Hoppe nennt die Gleichung $f(\tau, \vartheta) = 0$ zwischen jenen beiden Winkeln die specifische Gleichung der Curve und zeigt, wie man aus ihr die Eigenschaften der Curve herleiten kann. Diese interessante Leistung ist ihm offenbar als die wichtigste seiner Entdeckungen vorgekommen; denn in den von ihm herrührenden Notizen für das Verzeichnis der Lehrer an den deutschen Hochschulen führt er als bemerkenswert einzig seine Auffindung neuer Principien der Curventheorie mit Anwendung des Krümmungs- und Torsionswinkels als unabhängiger Variablen an.

1) F. Brioschi, Annali di Matematica (2) **1**, p. 1, 1867.
2) R. Hoppe, Archiv der Math. **58**, p. 37, 1875.
3) L. Schläfli, Journ. für Math. **76**, p. 76, 1873.

Neben denjenigen Abhandlungen, die in das Gebiet der krummen Oberflächen und der Raumcurven fallen, wollen wir aus der grofsen Zahl von Aufsätzen geometrischen Inhalts eine andere Gruppe hervorheben, die der mehrdimensionalen oder, wie Hoppe besser deutsch sagt, der mehrdehnigen Geometrie angehört. Die betreffenden Speculationen sagten seinen philosophisch-mathematischen Neigungen besonders zu. Unser geläufiges Raumsystem von drei Dehnungen bezeichnet er als ein instinctiv geschaffenes, zur objectiven Gestaltung der Sinnesempfindungen gerade ausreichendes und notwendiges Werk unseres Verstandes, welches durch Übung in fertige Anschauung überging. Nur weil der zwingende Anlafs zur Einführung von mehr Dimensionen fehlte, empfinden wir wegen Mangels an Übung Schwierigkeit im Vorstellen derselben. Ein ursprünglich begrifflicher Unterschied der verschiedenen Raumsysteme existirt für ihn nicht, wie denn auch die Formeln der analytischen Geometrie oft durch einfache Vermehrung der Coordinatenzahl auf die Geometrie eines Raumes von mehr als drei Dimensionen hinleiten. Der Nutzen solcher mehrdimensionalen Untersuchungen besteht nach seiner Ansicht darin, dafs durch dieselben die Erkenntnis des gesetzmäfsigen Fortschrittes von zwei zu drei Dimensionen gefördert wird. Unter den ersten Arbeiten dieser Richtung stofsen wir auf die „Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension“ (1879). Dieser Titel weckt die Erinnerung an jene Epoche, in der Zöllner als Ritter für den Taschenspieler Slade auftrat, dessen Auflösung eines Knotens in einem in sich geschlossenen Faden als experimenteller Beweis für die reale Existenz der vierten Dimension gelten sollte. Als Frucht der in den Nachsitzungen der Physikalischen Gesellschaft gegebenen Vorführungen ähnlicher Kunststücke ist die Anregung anzusehen, welche Hoppe zur Abfassung jener Note dabei erhielt.

Wir wollen die der Geometrie zuzurechnenden Artikel nicht verlassen, ohne auf die zahlreichen Notizen hinzuweisen, in denen der gelehrte Redacteur des Archivs durch Behandlung von zum Teil pädagogischen Fragen aus der elementaren Mathematik der durch den Titel seiner Zeitschrift vorgeschriebenen Richtung Rechnung trug, die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten zu berücksichtigen. Endlich sollen auch diejenigen Arbeiten nicht vergessen werden, in denen der geschickte Analyst die Ergebnisse der höheren Rechnungsarten und der Functionentheorie, unter anderem der Theorie der elliptischen Transcendenten, auf Probleme der Geometrie anwendet.

In der analytischen Mechanik, zu der wir jetzt übergehen, hängen viele Betrachtungen so eng mit der Theorie der krummen Oberflächen und der Raumcurven zusammen, dafs die Beschäftigung mit den letzteren von selbst auf die verwandten Untersuchungen in der Mechanik führt. Deshalb wechseln auch bei Hoppe mit den geometrischen Abhandlungen die mechanischen während der ganzen Periode seines Schaffens ab. Doch ist ein Unterschied bemerkbar. Während Hoppe in der Geometrie neben einer überraschenden Zahl von einzelnen speciellen Fragen in seinen gröfseren Arbeiten gewisse principielle Überlegungen von allgemeiner Bedeutung vertieft und dadurch zur Aufstellung neuer Methoden fortschreitet, bleibt er in der Mechanik bei der Behandlung einer Reihe einzelner Aufgaben aus den verschiedenen Teilen dieser Wissenschaft stehen. Die Kinematik, die Statik und die Dynamik des einzelnen Massenpunktes oder des starren Körpers, die Hydrostatik und die Hydrodynamik liefern ihm Anlafs, entweder neue Aufgaben mannigfacher Art zu lösen, oder die Lösungen alter bekannter Probleme auf seine Weise durchzuarbeiten und zu vereinfachen. Wir erwähnen von der letzteren Gattung die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt, den freien Fall eines Massenpunktes mit Rücksicht auf die Drehung der Erde, den Foucault'schen Pendelversuch. Zu der ersteren gehören aus der früheren Periode seiner Arbeiten der Ausdruck des Trägheitsmomentes eines körperlichen Polyeders für eine beliebige Axe und das körperliche Raumpendel bei constanter Rotation nebst Anwendung auf die Stabilität des Kreisels (1855); die Stabilität schwimmender Körper (1846) und der Widerstand der Flüssigkeit gegen die Bewegung fester Körper (1854). Die Abhandlungen über das Dreikörperproblem und die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze, über das Wälzen von Cylindern auf Horizontalebenen, über die Schwingungen des Bifilarpendels und verschiedene andere hierher gehörige Arbeiten erschienen zur Zeit der lebhaftesten Production, als Hoppe eben das sechzigste Lebensjahr überschritten hatte. Überall zeigt er sich als gewandter Beherrscher der Rechnung, der die Bedingungen der Aufgabe rasch in Gleichungen umzusetzen und aus diesen letzteren fafsbare Ergebnisse zu folgern versteht. Viele elegante Wendungen der Rechnung und hübsche Schlufsweisen sind in diesen Untersuchungen enthalten, die wegen der allzu knappen Redaction wohl wenig gelesen sind.

Der mathematischen Physik gehört endlich eine Gruppe von Arbeiten Hoppe's an, die zwar nicht zahlreich sind, aber zu den bedeutenderen unter seinen Veröffentlichungen gezählt werden

müssen. Mehrere Abhandlungen beziehen sich auf die Elasticitätstheorie: die Biegung prismatischer Stäbe (1847), die Vibrationen einer Saite mit Rücksicht auf den Biegungswiderstand (1870), die Deformation einer zwischen zwei parallelen Ebenen zusammengedrückten Kugel (1871), die Biegung eines Ringes durch gleichmäfsigen Druck von aufsen (1864), die Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene (1871). In dieser letzten interessanten Arbeit bestätigte Hoppe den damals noch nicht allgemein bewiesenen Satz von de Saint-Venant, dafs die lebendige Kraft eines Systems gleichzeitiger Vibrationen eines Körpers die Summe der lebendigen Kräfte aller einzelnen einfach periodischen Vibrationen ist. Auch in die Molecularphysik, die Optik und die Wärmelehre machte Hoppe zuweilen einen Ausflug; gelegentlich eines Aufsatzes zur Wärmetheorie (1857) geriet er in einen wissenschaftlichen Streit mit Clausius, der in Poggendorff's Annalen ausgekämpft wurde.

Nächst den mathematischen Forschungen Hoppe's, die wir jetzt verlassen, haben wir seinen philosophischen Arbeiten einige Aufmerksamkeit zu schenken. Er selbst betrachtete die Mathematik und die Philosophie als so eng zu einander gehörig, dafs er den Ausschlufs der letzteren aus seiner Lehrbefugnis während der ersten 18 Jahre seiner Privatdocentenzeit als eine Beschränkung des Lehrens in der ersteren empfand. Als unabhängiger Denker baute er sich seine Weltanschauung nicht mit Hilfe des Studiums der Geschichte der Philosophie auf, sondern durch eigene Prüfung und Erörterung der Grundfragen. Seine erste Schrift: „Zulänglichkeit des Empirismus in der Philosophie“ (1852) und seine letzte, die man wohl als sein philosophisches Testament bezeichnen kann: „Die Elementarfragen der Philosophie nach Widerlegung eingewurzelter Vorurteile“ (1897), stimmen in den Grundanschauungen überein. Als Anhänger eines ideal gewendeten Empirismus erklärte er schon 1852 alle Mathematik als rein empirisch; dieser Ausspruch erregte damals Anstofs, dürfte heute jedoch des Beifalles vieler sicher sein. Seine Anknüpfungspunkte suchte er bei Bacon, Locke, Berkeley, Hume; die Zielpunkte seiner Kritik waren Kant, Fichte, Hegel, überhaupt die speculative Philosophie. Diese will er beseitigen, jene ergänzen. Sein eigenartiges Bestreben ist die Auflösung der Metaphysik in ein Stück Psychologie. Zu dem Ende sucht er sechs metaphysische Grundideen genetisch abzuleiten: die Idee der reellen Substanz, der Causalverbindung, des Raumes, der Zeit, des menschlichen Körpers und des gemeinschaftlichen Weltbesitzes. In ähnlicher Weise erörtert seine letzte philosophische

Schrift von 1897 Grundbegriffe wie Thatsache, Erkennen und Handeln, Wirklichkeit und Objectivität, Substanz und Stoff, Identität, Raum und Zeit, Sein und Wahrnehmung, Ursache, Hypothese und Anticipation, Ich und Person, Leib und Geist, Willensfreiheit und Sprache. Das Ziel der Erkenntnis besteht darin, Thatsachen, d. h. dasjenige, was ein Mensch unabhängig von seinem Thun und Denken erlebt, dem menschlichen Geiste zu unterwerfen. Trendelenburg urteilte über das erste Büchlein, es habe ungeachtet der von ihm gerügten Mängel seine guten Seiten; es gehe seinen Weg, sei dem Verfasser ganz eigen, sei einfach geschrieben, kurz und ohne philosophische Phrase und habe in der Kritik der speculativen Philosophie vielfach Recht.

Ungefähr ebenso äufserte sich Harms (1870) in einer Beurteilung der Abhandlung „Über die Bedeutung der psychologischen Begriffsanalyse". Interessant ist es hierbei, von befugter Seite zu vernehmen, dafs Hoppe's Auffassung des Verhältnisses von Glauben und Wissen mit Schleiermacher's Ansicht übereinstimme; da Hoppe aber seine Auffassung für neu halte, so scheine er nicht mit der Ansicht Schleiermacher's bekannt geworden zu sein, und es sei wohl möglich, dafs er durch eigenes Nachdenken zu seiner Auffassung gelangt sei. Auch Harms betont die Selbständigkeit des Denkens bei Hoppe und bezeichnet manche richtigen Gesichtspunkte, die, obschon nicht neu, es wohl verdienten, hervorgehoben zu werden.

In der Abhandlung „Überweg's Kritik der Berkeley'schen Lehre" (1869), vertritt Hoppe gegen Überweg den Subjectivismus Berkeley's, der die für die vulgäre Auffassung als reell geltenden Dinge in Vorstellungen (Ideen), in Phänomena des menschlichen Geistes verwandelt, und greift in scharfsinniger Weise mit ruhiger und sachlicher Polemik Überweg's eigene Lehre an. Der Phänomenalismus Hoppe's hat, wie Trendelenburg sagte, nicht die Wissenschaften in Mitleidenschaft gezogen, weil die Thatsachen seine Basis sind. Von diesen Thatsachen unterscheide er, was daran erst Arbeit des Geistes sei, wie z. B. Objectivität, die durch Verallgemeinerung entsteht, den unendlichen Raum im Gegensatz des thatsächlichen. Seine Lehre habe ethisch keine ungesunden Consequenzen und erkläre sich, obschon undeutlich, gegen den Pessimismus, der in der neuesten Zeit die Stimmung der Jugend vergälle. Wenn ihm seine philosophischen Vorlesungen gelängen, so würde er unter den Studirenden eine andere Art der Betrachtung anregen als die übrigen Lehrer der Philosophie an der Berliner

Universität, einer solchen ähnlich, die in England zur Zeit Anhänger besitze.

Wie in der Mathematik, ging also auch in der Philosophie Hoppe den Weg, den er sich selbst gebahnt hatte, unbekümmert darum, ob andere schon eine ähnliche Richtung eingeschlagen hätten, und ob er als einsamer Wanderer Genossen fände, die ihm beistimmten. Einer der tüchtigsten Kenner der Kant'schen Philosophie, Herr Michaelis, erklärt in seiner Besprechung der letzten Hoppe'schen philosophischen Arbeit diese Schrift für ein erkenntnistheoretisches Werk von bedeutender Tragweite.

Die philosophischen Studien führten Hoppe naturgemäfs auch zum Nachdenken über den Bau der Sprache, wie ein Aufsatz „Über das Problem einer künstlichen Sprache" (1859) bezeugt. Bekannt ist sein Interesse für das Studium der deutschen Sprache; als stehender Gast verkehrte er in dem Hause des Germanisten Müllenhoff, und ebenso war er ein häufiger Besucher des germanistischen Vereins der Studierenden an der Berliner Universität. Die Vereinfachung der deutschen Orthographie befürwortete und förderte er mit allen Kräften.

Bei der Vorführung der litterarischen Thätigkeit Hoppe's können wir nicht an den Recensionen vorübergehen, die er in den litterarischen Berichten seines Archivs 28 Jahre lang veröffentlicht hat, weil sie einerseits wohl die am meisten gelesenen Erzeugnisse seiner Feder sind, andererseits einen Ausflufs seines Denkens darstellen, aus dem seine abgeschlossene Natur leichter und besser erkannt werden kann, als aus seinen sonstigen Schriften. Obenan steht ihm das Urteil über die Principien einer Schrift, und wehe dem Autor, der sich in der Fassung derselben eine Blöfse giebt! Mit scharfem Messer macht der Kritiker einen Schnitt in das ungesunde Fleisch und begründet mit dem Endergebnis einer erbarmungslosen Section sein Verdammungsurteil. Als ein Beispiel möge die Anzeige der neunten Auflage von Sturm's Cours d'analyse dienen. Von diesem weit verbreiteten und auch in Deutschland ungemein beliebten Lehrbuch hatte er offenbar noch nichts gehört, als er es zur Beurteilung erhielt. Mit ernstem Gesicht berichtet er zuerst über die dem Werke vorausgeschickte Lebensbeschreibung Sturm's, als ob er zum ersten Male von diesem Mathematiker gehört hätte. Dann aber wird aus der vorbereitenden Theorie der Grenzwerte ein Satz herausgegriffen, der eine Unklarheit enthält. Der Satz wird von allen Seiten beleuchtet, und die sich an ihn knüpfende Sturm'sche Erörterung über den Begriff der unendlich

kleinen Gröfsen wird als rätselhaft und dunkel verworfen. Mithin folgt das Schlufsurteil: „Das Angeführte zeigt zur Genüge, dafs das Buch den Anfängern der Analysis nicht zu empfehlen ist." Den eigentlichen Inhalt des Werkes näher zu prüfen, hielt er offenbar nach Entdeckung logischer Unklarheiten in den Principien nicht für nötig; er fragte auch gar nicht danach, warum denn das Werk, das erst nach dem Tode Sturm's erschienen war, zum neunten Male aufgelegt wurde.

Es liegt mir natürlich fern, dieses einseitige Vorgehen, das ihn mehr als einmal zu grofsen Ungerechtigkeiten und Fehlgriffen verführte, gutheifsen zu wollen. Weil er aber bei diesen Recensionen durch das Streben nach äufserster Klarheit geleitet, in der schroffen Starrheit seiner Natur sich manche Feinde gemacht hat, so konnte ich diesen Fehler hier nicht verschweigen, wollte mich aber bemühen, ihn aus der philosophischen Anlage seines Geistes zu erklären, und wenn das Wort „tout comprendre, c'est tout pardonner" zugegeben wird, so werden wir diese Schwäche, die aus einem gewissen furor philosophicus eines in wissenschaftlichen Dingen starren und unnachgiebigen Sinnes hervorging, dem stets nach Wahrheit suchenden toten Freunde vergeben, vergessen, verzeihen.

Als Leiter des Archivs war Hoppe unermüdlich thätig; er selbst steuerte in jedem Bande eine gröfsere Anzahl von Originalartikeln bei. Man darf wohl sagen, dafs er durch die Redaction angeregt worden ist, vieles zu schreiben, was er sonst unbearbeitet hätte ruhen lassen, dafs überhaupt die Schriftleitung des Archivs seinem Alter das zusagende Lebenselement geworden ist. Je länger er aber diese Thätigkeit ausübte, um so mehr trat bei ihm der schon berührte Mangel an Fähigkeit hervor, in fremde Gedanken verständnisvoll einzudringen. Dadurch gelang es besonders im letzten Jahrzehnt manchen gerngrofsen und schreibseligen Autoren von kleinem Wissen und geringem Können, die minderwertigen oder auch widersinnigen Producte ihrer Feder dem allzu vertrauensvollen Leiter des Archivs aufzureden. Wer wollte darüber aber mit einem achtzigjährigen Greise hadern?

Beim Rückblick auf die gesamte litterarische Wirksamkeit Hoppe's erhalten wir das Bild eines Mannes, der von seiner Jugend an, ohne nach äufserem Erfolg zu schielen, in ernstem Forschen stets die Wahrheit gesucht und darin einen echt wissenschaftlichen Geist bekundet hat. In harter Gedankenarbeit ringt er sich zu derjenigen Erkenntnis durch, die er als die einzige, dem Menschen

mögliche Stufe des Wissens ansieht. Das Suchen und Forschen nimmt ihn so gefangen, dafs er darüber die Ansprüche des praktischen Lebens vernachlässigt. Nicht ohne Starrheit im Eigenen, geht er schwer in fremde Gedanken ein, so beurteilte ihn Trendelenburg nach seiner ersten philosophischen Schrift und traf damit sein innerstes Wesen. Einem Diogenes verglich ihn der Prediger Witte in der geistvollen und künstlerisch abgerundeten Rede bei der Trauerfeier auf dem Friedhofe. Wie er lehrte, dafs der Mensch eine Seele sei, die einen Leib habe, so erzog er sich in der harten und bitteren Schule des Lebens zu einer staunenswerten Bedürfnislosigkeit, die sich zu einer Mifsachtung der äufseren Erscheinungsform steigerte. In seine Gedankenwelt versunken, schritt er wie ein Fremdling dieser Welt durch das Leben und erweckte wohl den Anschein eines Träumers, der an der Umgebung wenig teilnähme. Schüchtern und linkisch erschien zuerst sein Auftreten. Dennoch war er in der Unterhaltung mit seinen Gedanken bei der Sache, und wer in seiner Gegenwart einen ihm nicht zusagenden Ausspruch that, konnte sicher sein, von ihm ebenso schneidig zurechtgewiesen zu werden, wie der unachtsame Verfasser eines Buches wegen des Niederschreibens eines nicht stichhaltigen Satzes. Aber auch seine Zustimmung zu Ansichten, die er teilte, konnte er bei solchen Gelegenheiten freudig und rückhaltlos kundgeben.

Wer Hoppe aus seinen Schriften kennen gelernt hatte und später seine persönliche Bekanntschaft machte, war immer zuerst enttäuscht. Der sichere Schriftsteller von klarem Geiste, der mit aller Entschiedenheit und Furchtlosigkeit das scharfe Schwert strenger Logik handhabte und in knapper, schlichter Rede alle Dunkelheit beseitigte, erschien wie ein Hilfsbedürftiger in der menschlichen Gesellschaft, der erst ermutigt werden müfste, seine Zurückhaltung aufzugeben und seine Meinung zu äufsern.

Aus dem klaffenden Risse zwischen seiner geistigen Bedeutung und der leiblichen Persönlichkeit erklärt sich bei ihm der Mangel an Erfolg in seinem Lebenslaufe. Obschon seine Entdeckungen nicht derartig sind, dafs sie ihm neben den ersten führenden Geistern seiner Fächer einen Platz sicherten, hätten sie wohl hingereicht, ihm den Anspruch auf eine Professur an einer Hochschule zu verleihen, die andere Gelehrte mit geringeren Leistungen erhielten. Seiner Persönlichkeit blieb aber wie auf dem Gymnasium, so an der Universität ein fruchtbarer Erfolg der Lehrthätigkeit versagt. Bei seiner Geburt hatte die gütige Fee gefehlt, die ihm zu den Gaben des Geistes Anmut und Beredsamkeit hätte in die Wiege

legen müssen, und da somit die Grazien leider ausblieben, so mufste er unter dem Scepter der grimmen Ἀνάγκη bis an sein Ende in bescheidener Stellung ausharren. Ich selbst habe im Sommer 1862 bei ihm das Colleg über elliptische Functionen gehört, das einen Bestandteil der regelmäfsigen Folge seiner Vorlesungen: Differentialrechnung und Reihentheorie, analytische Geometrie, Integralrechnung, elliptische Functionen, analytische Mechanik bildete. Wie verlegen schob er sich durch die nur halb geöffnete Thüre; ohne einen Blick auf die Hörerschaft zu werfen, bestieg er das Katheder, entnahm der Rocktasche das sehr sorgfältig ausgearbeitete Manuscript, wandte den Hörern den Rücken zu, um, aus den damals schon vergilbt aussehenden Blättern lesend, die Formeln an der Wandtafel niederzuschreiben. Der freien Rede gar nicht mächtig, konnte er in der Eintönigkeit des so gesprochenen Vortrages die Studenten nicht fesseln. Von den zuerst anwesenden Zuhörern — es mochten wohl mehr als ein Dutzend sein — verliefen sich in den ersten vierzehn Tagen die meisten, und bald blieb ich mit nur noch einem Hörer zurück, dem Herrn Krech; wir beide aber harrten aus, und ich mufs bekennen, dafs der Inhalt der nach Jacobi's Muster gehaltenen und von mir ausgearbeiteten Vorlesung durchaus gediegen war. Die Vorlesungshefte der sämtlichen Collegien wird er damals mit gleicher Sorgfalt hergestellt haben; denn alle übernommenen Pflichten fafste er sehr ernst auf und folgte somit im sittlichen Handeln dem kategorischen Imperativus von Kant, den er als Philosophen sonst heftig befehdete. In der Ablieferung versprochener Arbeiten war er unbedingt zuverlässig; das werden alle Redacteure der Fortschritte der Physik erfahren haben, gerade wie ich als Herausgeber des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik, an welchem er seit der Gründung desselben Mitarbeiter gewesen ist. Da er immer einer der ersten war, der seine Referate übergab, so konnten seine letzten Beiträge zu dem gerade im Drucke befindlichen Bande noch nach seinem bereits erfolgten Abscheiden den betreffenden Capiteln einverleibt werden. Gefällig wie er war, erwies er sich überhaupt stets zu Dienstleistungen bereit.

Bewundernswert ist die Gelassenheit, mit der sich Hoppe in der Lebenslage zurecht fand, die er nach freier Wahl zu tragen hatte. Mit wahrhaft philosophischer Ruhe hat er bis in das reife Mannesalter hinein alle Nöte des Lebens auf sich genommen; in seinem Mannesstolze wollte er sein Leben ebenso selbständig und unabhängig führen, wie er in der Wissenschaft in voller Freiheit

sein Denken geregelt hatte. Unter seinen Brüdern galt er in leiblicher Beziehung als der am schwächsten Beanlagte. Trotz aller Entbehrungen, denen er sich unterwarf, hat er diese Brüder alle überlebt und das Wort bewahrheitet, das seiner Philosophie entlehnt sein könnte: „Es ist der Geist, der sich den Körper baut.“ Als er später durch die Übernahme der Redaction des Archivs und durch die einsichtige Fürsorge der philosophischen Facultät besser gestellt wurde, nahm er am Leben der Gesellschaft einen stärkeren Anteil. Er freute sich, bei den Naturforscherversammlungen erscheinen zu können, und übernahm einige Male Vorträge bei denselben, deren Inhalt stets philosophisch gefärbt war. Besonders gern suchte er das Gebirge auf, wo es ihm, wie er sagte, grofses Vergnügen machte, nach mühevollem Steigen auf den harten Schädel eines solchen stolzen Bergriesen mit seinen Füfsen zu treten. Anspruchslos, wie er war, gab er auf solchen Reisen einen verträglichen Wandergenossen ab. Im übrigen kann man nicht sagen, dafs er bei seinem einsiedlerischen Leben als unverheirateter Mann enge Freundschaft mit jemandem geschlossen hätte. Und doch verband ihn eine treue Anhänglichkeit mit den Kreisen, in denen er verkehrte. Die Nachsitzungen der Physikalischen Gesellschaft besuchte er regelmäfsig bis in den Anfang dieses Jahres hinein, ebenso die zwanglosen Zusammenkünfte, die im Anschlusse an das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik allmonatlich stattfinden. So sicher erschien er dort, dafs sein Ausbleiben im Frühjahr als das erste Symptom seiner beginnenden Auflösung betrachtet wurde. In gleicher Weise trat er geräuschlos bei seinen Verwandten ein, wo er sich an der Musik ergötzte, und bei befreundeten Familien, in denen er manchen Abend zubrachte. Äufserlich konnte es den Anschein haben, als ob nur eine liebe Gewohnheit den stillen Greis an die Kreise bände, in denen er seit alter Zeit verkehrte; denn oft genug entfernte er sich, ohne kaum ein Wort gesprochen zu haben. Wer vermöchte jedoch in die Geheimnisse eines so gedankenreichen Geistes zu schauen? Die Anhänglichkeit an seine Verwandten wird durch das Testament bezeugt, in welchem er eine Familienstiftung errichtet hat; aus ihr sollen vorläufig für directe Nachkommen seiner Eltern alljährlich zwei Schüler- und zwei Studienstipendien gezahlt werden. Indem er dabei bestimmt hat, dafs das weibliche Geschlecht ebenso wohl zu berücksichtigen ist wie das männliche, hat er, der im Cölibat Verharrende, einen augenscheinlichen Beitrag zu seinen Ansichten über die Frauenfrage geliefert.

In häufigerem Verkehr mit Hoppe übersah man bald die Äufserlichkeiten, an denen man beim ersten Anblick Anstofs nehmen konnte. Aus der anfänglichen Duldung erwuchs Achtung, ja Verehrung auf Grund seiner charaktervollen Natur. Es blieb der Eindruck seines Denkerhauptes, das Bewufstsein des Anschauens einer abgeschlossenen Persönlichkeit von ausschliefslich wissenschaftlichem Streben, die im Denken und im Handeln furchtlos alle Consequenzen zog und trug. Die allgemeine Achtung, in der er stand, zeigte sich bei der Feier, die veranstaltet wurde, als er sein achtzigstes Lebensjahr vollendete, und zu der sich die Mathematiker der Hochschulen Berlins, viele Mitglieder der Physikalischen Gesellschaft und zahlreiche Freunde des nun Verstorbenen vereinigten. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung ehrte ihn durch einen herzlichen Glückwunsch; vom Staate wurde er durch Verleihung des Kronenordens dritter Klasse ausgezeichnet, da ihm schon früher der rote Adlerorden vierter Klasse verliehen worden war. Der mathematische Verein der Universität Berlin veranstaltete ihm zu Ehren einen Festcommers.

Was an ihm sterblich war, ist nun dahin; geblieben ist die Erinnerung an einen ehrlichen Mann, der durch sein Leben den Ausspruch widerlegt hat, die Originale seien ausgestorben. Für ihn tönt der Gesang der Engel: „Wer immer strebend sich bemüht, den können wir erlösen.“ Wir haben ihn geschaut als einen iustum et tenacem propositi virum, der trotz des Mangels äufserer Anerkennung der Fahne der Wissenschaft treu geblieben ist, und der in der inneren Klarheit das höchste Glück eines befriedigten Daseins gefunden hat. In dieser Verklärung wird sein Andenken bei allen weiterleben, die mit ihm in Berührung gekommen sind, und somit für immer gesegnet sein.

Verzeichnis der Schriften von R. Hoppe.

Selbständige Schriften.

1. Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten. Leipzig 1845.
2. Zulänglichkeit des Empirismus in der Philosophie. Berlin 1852.
3. Lehrbuch der Differentialrechnung und Reihentheorie. Berlin 1865.
4. Tafel zur dreifsigstelligen logarithmischen Rechnung. Leipzig 1876.
5. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Leipzig 1880. 2. Aufl. 1890.

Philosophische Aufsätze (aufser denen im Archiv der Math.).

1. Über das Problem einer künstlichen Sprache. Zeitschr. f. Stenographie, 1859.

2. Über die Bedeutung der psychologischen Begriffsanalyse. Bergmann's philos. Monatsh. 1868.
3. Überweg's Kritik der Berkeley'schen Lehre. Ibid. 1869, 1871.
4. Was hat Berkeley's Lehre vor der gemeinen Ansicht voraus? Zeitschrift f. Philos. 1871.
5. Über das Verhältnis der Naturwissenschaft zur Philosophie. Tagebl. d. Naturf.-Vers. Leipzig 1872.
6. Aufgabe der Gegenwart. Bergmann's philos. Monatsh. 1873.
7. Erklärung des Begriffs der Notwendigkeit. Ibid. 1874.
8. Über den Grund der mathematischen Evidenz. Tagebl. der Naturf.-Vers. Hamburg 1876. Beilage 60—62.

Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's J.).

1. Über independente Darstellung der höheren Differentialquotienten und den Gebrauch des Summenzeichens (1846). **33**, 78—98.
2. Transformation d'une intégrale définie (1850). **40**, 139—141.
3. De l'erreur qui peut se présenter dans l'addition de fractions décimales retranchées [1845] (1850). **40**, 142—151.
4. Remarques sur les réductions de la fonction gamma, et sur la définition de cette fonction et des facultés analytiques par leurs propriétés [1845] (1850). **40**, 152—159.
5. Zur Theorie der parallelen Curven (1858). **55**, 95—96.
6. Bemerkung zu der Abhandlung Seite 80 dieses Bandes über die Integration der partiellen Differentialgleichung
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{dy}\right)^2\right]=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$$
(1861). **58**, 369—373.
7. Über die Umhüllungslinie der Pollinien einer Curve und deren inverse Linie (1861). **58**, 374—377.
8. Über die Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion (1862). **60**, 182—187.
9. Ebene Curven, zwischen deren Bogen und Coordinaten eine Gleichung zweiten Grades besteht (1863). **62**, 193—198.
10. Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion (1864). **63**, 122—140.
11. Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene (1871). **73**, 158—170.

Mathematische Annalen.

1. Abbildung der Flächen zweiten Grades nach Ähnlichkeit der Flächenelemente (1870). **2**, 504—513.
2. Independente Darstellung der höheren Differentialquotienten (1871). **4**, 85—87.

Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch's Z.).

1. Auflösung der algebraischen Gleichungen in Form bestimmter Integrale (1858). **3**, 172—175.
2. Allgemeinste Auflösung der Gleichung $x^3 + y^3 = z^2$ in relativen Primzahlen (1859). **4**, 304—305.
3. Rechnung mit rationellen symmetrischen Functionen (1859). **4**, 353—359.

4. Über die Auflösung der Gleichung $x^3 + y^3 = x - y$ in rationalen Zahlen (1859). **4**, 359—361.
5. Wiederholung, Interpolation und Inversion einer Function unter gemeinschaftlicher Form (1860). **5**, 136—139.
6. Beispiel einer Kubatur und Quadratur nach geometrischen Postulaten (1861). **6**, 56—58.
7. Bedingung der Stabilität eines auf dem Gipfel einer Fläche ruhenden Körpers (1861). **6**, 213—215.
8. Biegung eines Ringes durch gleichmäfsigen Druck von aufsen (1864). **9**, 37—43.
9. Constructive Ermittelung der Gleichgewichtslagen schwimmender Körper und ihrer Stabilität (1864). **9**, 371—375.
10. Drehung eines Körpers um einen Punkt ohne Kräftepaar (1864). **9**, 436—439.
11. Über die Differentialgleichung $sy'' + (r + qx)y' + (p + nx + mx^2)y = 0$ (1864). **9**, 56—59.
12. Tautochronische Curven bei Reibungswiderstand (1869). **14**, 382—387.
13. Über den Einflufs der Rotation eines Schwungrades auf die Bewegung eines damit verbundenen Körpers (1872). **17**, 167—174.

Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie.

1. Vom Widerstande der Flüssigkeiten gegen die Bewegung fester Körper (1854). **93**, 321—343.
2. Über die Wärme als Äquivalent der Arbeit (1856). **97**, 30—34.
3. Bemerkung zu v. Seydlitz's Aufsätzen Bd **98**, S. 77 und Bd. **99**, S. 562 und Erwiderung auf Clausius' Notiz Bd. **98**, S. 173, betreffend die Wärmetheorie (1857). **101**, 143—147.
4. Über die Biegung prismatischer Stäbe (1857). **102**, 227—245.
5. Über die Bewegung und Beschaffenheit der Atome (1858). **104**, 279—292.
6. Erwiderung auf einen Artikel von Clausius, nebst einer Bemerkung zur Erklärung der Erdwärme (1860). **110**, 598—612.
7. Berechnung der Vibrationen einer Saite mit Rücksicht auf den Biegungswiderstand (1870). **140**, 263—271.

Quarterly Journal of Mathematics.

1. Determination of the motion of conoidal bodies through an incompressible fluid (1857). **1**, 301—315.
2. Deformation of an elastic sphere pressed between two parallel planes (1871). **11**, 318—325.

Annali di Matematica pura ed applicata.

1. Quelques cas de mouvement d'un point sur un corps en mouvement (1873). (2) **5**, 1—13.
(Auch in Nova Acta Ups.)

Verhandlungen der Polytechnischen Gesellschaft zu Berlin.

1. Curven, die sich unter einem bestimmten Winkel schneiden (1859). **20**, 4. S.

Zeitschrift der gesamten Naturwissenschaften, Halle.

1. Verhältnis der Naturwissenschaft zur Philosophie (1872). **6**, 6 S.

Nyt. Mag. Naturvid.

1. Om principerne for og formentlige vanskeligheder ved infinitesimalregningen (1871). **18**, 5 S.

Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris).

1. Corollaire au théorème de Crofton (1870). **70**, 1394—1397

Nova Acta, Upsala.

1. Sur les sommes de séries divergentes (1868). (3) **6**.
2. Surfaces également illuminées (1868). (3) **6**.
3. Systèmes de lignes et de surfaces égales, terminées par des rayons communs (1871). (3) **8**.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

1. Der exacte und einfache Begriff des Unendlichen nebst seiner Anwendung in der höheren und niederen Mathematik (1872). **3**, 11—18.
2. Hoppe contra Hoffmann (1877). **8**, 406—410.

Archiv der Mathematik und Physik.

1. Eine Formel für die dreiseitige Pyramide (1843). **3**, 213—215.
2. Über einen Reihenausdruck für den Umfang der Ellipse (1843). **3**, 265—268.
3. Kriterium der Stabilität schwimmender Körper (1846). **8**, 268—271.
4. Anschaulicher Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes (1846). **8**, 450.
5. Ausdruck des Trägheitsmomentes eines beliebigen Polyeders für eine beliebige Axe (1855). **24**, 204—211.
6. Vollständige Bestimmung der Evoluten doppelt gekrümmter Linien aus ihrer Evolute (1855). **25**, 125—130.
7. Körperliches Raumpendel bei constanter Rotation, nebst Anwendung auf die Stabilität des Kreisels (1855). **25**, 317—335.
8. Kriterium der Convergenz und Divergenz der Reihen (1856). **26**, 217—224.
9. Auflösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch bestimmte Integrale (1856). **27**, 55—62.
10. Beweis für die Darstellung des Sinus und Cosinus als Producte unendlich vieler Factoren (1856). **27**, 170—178.
11. Beweis für einen Satz von Euler'schen Integralen (1864). **41**, 65—67.
12. Theorie der unendlichen Gröfsen (1873). **55**, 49—58.
13. Kinematische Grundlage der Curventheorie (1873). **55**, 77—104.
14. Eine Anwendung des Euler'schen Satzes von den Polyedern (1873). **55**, 217—218.
15. Übungsaufgabe (1873). **55**, 335.
16. Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems (1873). **55**, 362—391.
    Fortsetzung: **56**, 153—162, 250—266; **57**, 89—106, 255—276, 366 bis 384; **58**, 37—48.
17. Beweis für das Crofton'sche Theorem durch directe Arealrechnung (1873). **55**, 426—428.
18. Principien der analytischen Curventheorie (1873). **56**, 41—84.

19. Construction der reellen Wurzeln einer Gleichung vierten oder dritten Grades mittelst einer festen Parabel (1874). **56**, 110—112. (Übersetzt in Nouv. Corresp. Math. **1**, 87—88, 1875.)
20. Inhalt des Sechsflachs zwischen orthogonalen Flächen zweiten Grades und seiner Seiten (1874). **56**, 354—386.
21. Bemerkung zu Nr. V im vorigen Teile. **57**, 108—111.
22. Beispiel einer einseitigen Fläche (1875). **57**, 328—334.
23. Über die Symmetriepunkte des Dreiecks (1875). **57**, 422—438.
24. Über das Problem der Geradführung eines Punktes. **58**, 215.
25. Minimum-Oberflächen der drei ersten Klassen von Polyedern (1875). **58**, 328—336.
26. Bemerkung über die Berechnung vierstelliger Logarithmen (1876). **58**, 437—439.
27. Ein Theorem über die conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen (1876). **59**, 59—64.
28. Principien der Flächentheorie (1876). **59**, 225—323.
29. Beispiel der Bestimmung einer Fläche aus der Indicatrix der Normale (1876). **59**, 407—414.
30. Geometrische Deutung der Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung in der Flächentheorie (1876). **60**, 65—70.
31. Kugel von excentrischer Masse und centrischer Trägheit (1876). **60**, 100—105.
32. Über das Rollen der Flächen auf einander (1877). **60**, 159—177.
33. Variation der Hauptträgheitsaxen (1877). **60**, 218—222.
34. Zweite asymptotische Linie einer Regelfläche (1877). **60**, 276—289.
35. Auflösung einer symmetrischen Exponentialgleichung (1877). **60**, 336.
36. Nachträge zur Curven- und Flächentheorie (1877). **60**, 376—403.
37. Über rationale Dreikante und Tetraeder (1877). **61**, 86—98.
38. Relationen zwischen Orthogonalcoefficientensystemen (1877). **61**, 111—112.
39. Zur Kinematik des Auges (1877). **61**, 146—159.
40. Summirung einer Reihe (1877). **61**, 224.
41. Fortrücken der Bahnscheitel eines Pendels von geringer Elongation. Mit Bezugnahme auf das Foucault'sche Pendel (1877). **61**, 264—269.
42. Erste Sätze von den bestimmten Integralen unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt (1877). **61**, 270—285.
43. Über Bezeichnungen (1877). **61**, 323—328.
44. Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe (1878). **61**, 410—416.
45. Allgemeinster Ausdruck der Richtungscosinus einer Geraden in rationalen Brüchen (1878). **61**, 438—439.
46. Bestimmung der Vielecke durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen (1878). **61**, 439—444.
47. Rein geometrische Proportionslehre (1878). **62**, 153—164.
48. Summation einiger Reihen (1878) **62**, 165—174.
49. Minimum-Aufgabe (1878). **62**, 215—218.
50. Bewegung eines am Faden hängenden Stabes (1878). **62**, 296—309.
51. Eine partielle Differentialgleichung (1878). **62**, 336.
52. Bewegung zweier durch einen elastischen Faden verbundenen materiellen Punkte ohne Einwirkung äufserer Kräfte (1878). **62**, 390—404.

53. Über die kürzesten Linien auf den Mittelpunktsflächen (1879). **63**, 81—92.
54. Ergänzung des Euler'schen Satzes von den Polyedern (1879). **63**, 100—103.
55. Abwickelbare Mittelpunktsflächen (1879). **63**, 205—214.
56. Über die Bedingung, welcher eine Flächenschar genügen mufs, um einem dreifach orthogonalen Flächensystem anzugehören (1879). **63**, 285—293.
57. Fragen aus der mathematischen Geographie zur Übung (1879). **63**, 331—333.
58. Über die Bedingung, unter welcher eine variable Gerade Hauptnormale einer Curve sein kann, und verwandte Fragen (1879). **63**, 369—379.
59. Untersuchungen über kürzeste Linien (1879). **64**, 60—73.
60. Freier Fall aus einem Punkte der Erdoberfläche (1879). **64**, 96—105.
61. Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen (1879). **64**, 189—213.
62. Bemerkungen über die Transformation der Leibniz'schen Reihe, T. **63**, S. 447 (1879). **64**, 214—215.
63. Erweiterung der bekannten Speciallösung des Dreikörperproblems (1879). **64**, 218—223.
64. Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension (1879). **64**, 224.
65. Geometrische Anwendung der Addition elliptischer Integrale (1879). **64**, 274—295.
66. Über die freie Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung eines Kräftepaares (1880). **64**, 363—372.
67. Elementarer Beweis für die Existenz eines Mittelpunkts gleichgerichteter Kräfte (1880). **64**, 373—378.
68. Über die zweite Speciallösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1880). **64**, 379—386.
69. Bemerkung über trigonometrische Reihen (1880). **64**, 435—438.
70. Schwerpunkt eines Vierecks (1880). **64**, 439.
71. Planimetrische Übungsaufgabe (1880). **64**, 440.
72. Rationales Dreieck, dessen Seiten aufeinander folgende ganze Zahlen sind (1880). **64**, 441—443.
73. Über einige principielle Punkte der Infinitesimaltheorie (1880). **64**, 444—447.
74. Potential des sphärischen Dreiecks (1880). **65**, 57—64.
75. Elemente der Determinantentheorie (1880). **65**, 65—72.
76. Excentrischer Kugelsector (1880). **65**, 176—187.
77. Über die Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel (1880). **65**, 287—305.
78. Über dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen (1880). **65**, 373—384.
79. Bemerkungen betreffend die Auflösung eines Knotens in vierter Dimension (1880). **65**, 423—426.
80. Über Parallelen geschlossener Curven (1880). **66**, 46—55.
81. Über die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze (1880). **66**, 107—112.
82. Wälzung eines cylindrisch begrenzten Körpers auf Horizontalebene (1881). **66**, 213—219.

83. Über das Rollen eines seiner Schwere überlassenen Körpers auf horizontaler Ebene (1881). **66**, 260—273.
84. Über die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze. Fortsetzung zu S. 112 (1880). **66**, 328—329.
85. Zu dem Aufsatze T. **65**, S. 218 über den Schwerpunkt des Vierecks (1881). **66**, 330.
86. Wälzung eines von einer Tangentenfläche begrenzten Körpers auf Horizontalebene (1881). **66**, 373—385.
87. Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie (1881). **66**, 386—396.
88. Über den Winkel von *n* Dimensionen (1881). **66**, 448.
89. Regelmäfsige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen (1881). **67**, 29—44.
90. Wahrscheinlicher Grad der Homogeneität einer Mischung (1881). **67**, 98—103.
91. Bewegung und Stabilität eines laufenden Rades (1881). **67**, 165—176.
92. Berechnung einiger vierdehnigen Winkel (1881). **67**, 269—290.
93. Zwei reciproke Relationen einer Integralfunction nebst Anwendung (1882). **67**, 412—424.
94. Infinitärer Hauptwert und approximative Entwickelung (1882). **68**, 37—52.
95. Innere Winkel aller regelmäfsigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen (1882). **68**, 110—112.
96. Die regelmäfsigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen (1882). **68**, 151—165.
97. Bestimmung einer Fläche durch eine ihrer zwei Mittelpunktsflächen (1882). **68**, 256—272.
98. Über die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie (1882). **68**, 378—388.
99. Nachtrag zur Flächentheorie II (1882). **68**, 439—440.
100. Über das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugirten Tangenten auf positiv gekrümmter Fläche (1882). **69**, 19—29.
101. Reduction einer biquadratischen Gleichung auf eine cubische (1882). **69**, 111—112.
102. Bewegung eines Cylinders im Hohlcylinder auf schiefer Ebene (1883). **69**, 162—168.
103. Construction der imaginären Wurzeln einer Gleichung vierten und dritten Grades mittelst einer festen Parabel (1883). **69**, 216—218.
104. Numerische Berechnung der Winkel von vier Dimensionen (1883). **69**, 278—288.
105. Relation zwischen fünf Elementartetratopen mit vier unabhängigen Gröfsen (1883). **69**, 287—296.
106. Tetratop auf beliebiger Basis (1883). **69**, 297—306.
107. Drei Sätze für Inhaltsberechnung in der Mehrdimensionengeometrie (1883). **69**, 385—394.
108. Partielles Maximum eines Elementartetratops (1883). **69**, 439—444.
109. Horizontal rotirende Kette (1883). **70**, 90—95.
110. Oscillationen eines Bifilarpendels (1883). **70**, 188—196.
111. Krümmungslinien in den Nabelpunkten von Flächen (1883). **70**, 289—301.

112. Bemerkung über den Aufsatz von Vályi, S. 105, und dessen Vorgänger (1884). **70**, 334—335.
113. Moment der gegenseitigen Anziehung der begrenzten Schenkel eines Winkels (1884). **70**, 335—336.
114. Verallgemeinerung einer Relation der Jacobi'schen Functionen (1884). **70**, 400—404.
115. Einfaches Pendel im Raume bei Anziehung von einem Punkte in endlicher Entfernung (1884). **70**, 405—412.
116. Über ein Problem der Curventheorie (1884). (2) **1**, 46—50.
117. Einfacher Beweis der Existenz eines Mittelpunkts paralleler Kräfte (1884). (2) **1**, 111—112.
118. Ein Problem über berührende Kugeln (1884). (2) **1**, 148—160.
119. Bedingung einer Canalfläche, nebst einigen Bemerkungen an Canalflächen (1884). (2) **1**, 280—291.
120. Bemerkung zu einem Satze von Craig (1885). (2) **2**, 103—106.
121. Ein Satz über Determinanten (1885). (2) **2**, 106—107.
122. Über die Grenze der Stabilität eines longitudinal comprimirten geraden elastischen Stabes (1885). (2) **2**, 108—110.
123. Erweiterung des Aoust'schen Problems der Curventheorie (1885). (2) **2**, 129—137.
124. Zum Molins'schen Problem (1885). (2) **2**, 269—273.
125. Bewegung eines senkrecht empor geworfenen Körpers (1885). (2) **2**, 274—280.
126. Neue Relationen innerhalb eines Orthogonalcoefficientensystems (1885). (2) **2**, 413—416.
127. Rein analytische Consequenzen der Curventheorie (1885). (2) **2**, 417—429.
128. Archimedische Kreisquadratur (1885). (2) **2**, 447—448.
129. Anwendung der Thetafunctionen auf geodätische Strecken und Winkel (1885). (2) **3**, 75—83.
130. Regelmäfsiger linear begrenzter Winkel von vier Dimensionen (1886). (2) **3**, 111—112.
131. Erweiterung einiger Sätze der Flächentheorie auf *n* Dimensionen (1886). (2) **3**, 277—289.
132. Über Variation von Geraden, die an eine Fläche geknüpft sind (1886). (2) **3**, 290—301.
133. Anziehung eines der Kugel analogen Gebildes von *n* Dimensionen auf einen Punkt (1886). (2) **4**, 185—196.
134. Analytisch specifische Gröfsen des Vierecks (1886). (2) **4**, 224.
135. Conforme perspective Projection der Flächen auf einander (1886). (2) **4**, 328—329.
136. Ein Viereckssatz (1886). (2) **4**, 330.
137. Analytischer Beweis zweier Sätze von regelmäfsigen Pyramiden und Polyedern (1886). (2) **4**, 441—443.
138. Der Krümmungskreis der Ellipse (1886). (2) **4**, 443—448.
139. Darstellung der ersten Gattung elliptischer Integrale durch Curvenbogen zweiten Grades (1887). (2) **5**, 215—217.
140. Das Viereck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen (1887). (2) **5**, 345—350.

141. Umkehrung eines Satzes über die Anziehung einer Kugel (1887). (2) **5**, 351—352.
142. Das n-dehnige $(n+1)$-Eck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen (1887). (2) **5**, 418—429.
143. Erweiterung zweier Sätze auf n Dimensionen (1887). (2) **6**, 69—75.
144. Principien der n-dimensionalen Curventheorie (1888). (2) **6**, 168—185.
145. Bemerkung zu der Formel für das Differential einer Function mehrerer Variabeln (1888). (2) **6**, 351—352.
146. Dichte der Sehnen von Flächen und ebenen Curven (1888). (2) **7**, 165—179.
147. Über Kraftlinien der Anziehung von Linien (1889). (2) **7**, 330—336
148. Über Gleichgewichtspunkte der Anziehung von Linien (1889). (2) **8**, 94—108.
149. Inkreiscentrum als Gleichgewichtspunkt (1889). (2) **8**, 112.
150. Ähnlichkeitspunkt als Gleichgewichtspunkt der Anziehung ebener Flächenstücke (1889). (2) **8**, 221—222.
151. Gleichgewicht der Anziehung einer ringförmigen Fläche (1889). (2) **8**, 223—224.
152. Bemerkung zum Königinnenproblem (1889). (2) **8**, 333—334.
153. Zur Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel (1889). (2) **8**, 335—336.
154. Vielecke, deren Höhenlote sich in einem Punkte schneiden (1890). (2) **8**, 447—448.
155. Zur Goursat'schen Reduction des Problems der Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel (1890). (2) **9**, 43—52.
156. Über die von Humbert untersuchten Kugelflächenstücke (1890). (2) **9**, 53—59.
157. Über Congruenz und Symmetrie der Gebilde von beliebig vielen Dimensionen (1890). (2) **9**, 108—110.
158. Erweiterung der Sätze über das Tetraeder, dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden, auf mehr Dimensionen (1890). (2) **9**, 327—332.
159. Höhenschnitt-Tetraeder mit rationalen Kanten (1890). (2) **9**, 434—444.
160. Relation der Flächenwinkel des Tetraeders (1890). (2) **10**, 102—110.
161. Maximum der Ecken eines Tetraeders für den Fall ihrer Gleichheit (1891). (2) **10**, 111—112.
162. Momentane Variation der Eckensumme bei Deformation des regelmäfsigen Tetraeders (1891). (2) **10**, 220—221.
163. Quadrable Cylinderflächenstücke (1891). (2) **10**, 222—224.
164. Über die sphärische Darstellung der asymptotischen Linien einer Fläche (1891). (2) **10**, 443—446.
165. Das Tetraeder bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen (1892). (2) **11**, 85—92.
166. Curve von constanter Krümmung, Torsion, Totalkrümmung und Krümmungsverhältnis (1892). (2) **11**, 101—112.
167. Curve gegebener Krümmung auf gegebener Fläche (1892). (2) **11**, 193—196.
168. Zur Theorie der Regelflächen (1892). (2) **11**, 218—224.

169. Die Willensfreiheit und der physische Determinismus (1892). (2) **11**, 339—344.
170. Construction einer Regelfläche aus gegebener Strictionslinie (1892). (2) **11**, 345—348.
171. Der Schwerpunkt des Dreiecks als Schwerpunkt eines Systems von Vierecken (1892). (2) **11**, 351—352.
172. Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien (1892). (2) **11**, 442—448.
173. Osculirende Kugel nebst den analogen Gebilden für n Dimensionen (1893). (2) **12**, 96—108.
174. Osculirende Parabel (1893). (2) **12**, 168—176.
175. Gleichseitiges Tetraeder (1893). (2) **12**, 327—334.
176. Über eine Schar von Curven auf einer Tangentenfläche (1894). (2) **12**, 354—356.
177. Das Dreieck bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen (1894). (2) **12**, 447—448.
178. Einaxige Polyeder von kleinster Oberfläche bei constantem Inhalte (1894). (2) **13**, 69—77.
179. Über Transformation und numerische Lösung der cubischen Gleichung (1894). (2) **13**, 95—99.
180. Bedingung, unter der vier von einem Punkte aus gesehene Punkte in einem Raume liegen (1894). (2) **13**, 100—101.
181. Einige quantitative Fragen über 12 Kugeln, die eine Kugel berühren (1895). (2) **13**, 439—446.
182. Einige durch den Ausdruck des Bogens bestimmte Curven (1895). (2) **14**, 328—332.
183. Abwickelbare Schraubenfläche (1895). (2) **14**, 332—336.
184. Bezirke der drei Wurzelformen der Gleichung vierten Grades (1896) (2) **14**, 398—404.
185. Gleichseitig hyperbolischer Schnitt der Flächen zweiten Grades (1896). (2) **14**, 436—441.
186. Zur analytischen Curventheorie (1896). (2) **15**, 124—128.
187. Über die charakteristische Differentialgleichung der Raumcurven (1897). (2) **15**, 244—250.
188. Regelfläche, deren Strictionslinie auch Krümmungslinie ist (1897). (2) **15**, 251—254.
189. Über rationale Richtungscosinus (1897). (2) **15**, 323—326.
190. Erweiterung der Curvenklasse von constanter Krümmung (1897). (2) **15**, 447—448.
191. Eine neue Beziehung zwischen den Krümmungen von Curven und Flächen (1898). (2) **16**, 112.
192. Über das gleichseitige und das Höhenschnittstetraeder. (2) **16**, 257—270.
Nachtrag (1898). 333—335.
193. Über Darstellbarkeit von Zahlen als Summen zweier Quadrate (1899). (2) **17**, 128.
194. Eine Vermessungsaufgabe in der Ebene (1900). (2) **17**, 269—274.
195. Definitive Scheidung der pythagoreischen und nichtpythagoreischen Zahlen (1900). (2) **17**, 332—333.

Robert Heinrich Hoppe.

Von **Franz Lorenz** in Chemnitz.

Am 10. December 1899 starb in Penig nach längerem Leiden Dr. Robert Hoppe, Lehrer an den königl. technischen Lehranstalten zu Chemnitz, im 43. Jahre seines Lebens.

Geboren am 6. Januar 1857 in Penig, widmete sich Robert Hoppe nach Absolvirung des königl. Gymnasiums zu Chemnitz dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Leipzig, und bestand daselbst das Staatsexamen im November 1882. Nachdem er sein Probejahr abgelegt hatte, erhielt er Michaelis 1883 zunächst eine Anstellung als Assistent an dem königl. meteorologischen Institut in Chemnitz, trat aber dann Ostern 1890 als Lehrer für mathematische Fächer in den Lehrkörper der technischen Staatslehranstalten daselbst ein.

Die philosophische Doctorwürde erwarb sich Hoppe an der Universität Leipzig auf Grund einer Abhandlung „Über die Temperaturergebnisse von Beobachtungen an den meteorologischen Stationen des Königreichs Sachsen." Eine zweite gröfsere Arbeit „Das Klima des Erzgebirges" ist von ihm in dem Jahrbuch des Erzgebirgzweigvereins veröffentlicht worden.

Mit Robert Hoppe schied ein äufserst gewissenhafter und begabter Lehrer, der von allen seinen Collegen und Schülern in gleich hohem Mafse geachtet und gewürdigt wurde.

Eduard Wiltheifs.

Von **W. Wirtinger** in Innsbruck.

Ernst Eduard Wiltheifs, der am 9. Juli 1900 verschied, war am 12. Juli 1855 zu Worms geboren. Nach Absolvirung des Gymnasiums seiner Vaterstadt studirte er zuerst einige Jahre (1874 bis 1876) in Giefsen, insbesondere unter Gordan und Baltzer, und vollendete von 1876 an seine mathematische Ausbildung in Berlin, wo er sich hauptsächlich an Weierstrafs anschlofs und 1879 promovirte. Er habilitirte sich Ostern 1881 in Halle und wirkte daselbst bis zum Sommer 1892, zuerst als Privatdocent, dann seit December 1886 als ausserordentlicher Professor. Im Sommer 1891 war er vom Ministerium mit einer Vertretung an der Akademie zu Münster beauftragt worden. Im Beginn des Sommer-

semesters 1892 trat die Krankheit, der er schliefslich erlegen, und von der sich Anzeichen schon früher gezeigt hatten, stärker hervor. Ende Mai 1892 unterzog er sich in Jena einer Operation, die jedoch nicht die erhoffte Heilung brachte. Seitdem lebte Wiltheifs in schwerem Siechtum zu Halle.*)



Die wissenschaftlichen Arbeiten von E. Wiltheifs sind durchaus der Ausgestaltung der Theorie der Abel'schen Functionen gewidmet, ein Gebiet, in welches er von Weierstrafs eingeführt wurde. Seine Dissertation stellt sich die Aufgabe, die Umkehrung eines Systems von hyperelliptischen Integralen zu untersuchen, in welchem aufser p Integralen erster Gattung auch noch Integrale zweiter und dritter Gattung auftreten. Dabei zieht er nicht nur den Fall eindeutiger Umkehrung, sondern auch den einer endlich vieldeutigen Umkehrung in Betracht und fixirt die Bedingungen dafür. Wenn auch die Zurückführung seines Problems auf das Jacobi'sche Umkehrproblem und ein System algebraischer Gleichungen sofort gelingt, so ist es doch bemerkenswert, dafs die mehrdeutige Umkehrung hier zum ersten Mal in Betracht gezogen und näher discutirt ist. Seine Hilfsmittel sind dabei die der Weierstrafs'schen Vorlesung von 1877/78, aus welcher er einen Auszug mitteilt.

In der Arbeit (3)**) geht er an die Theorie der Thetafunctionen heran und giebt die Verallgemeinerung einer Jacobi'schen Relation

*) Diese biographischen Notizen über Wiltheifs hat Herr A. Wangerin in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt.

**) Die eingeklammerten Ziffern beziehen sich auf das Verzeichnis der Schriften von Wiltheifs am Schlusse des Artikels.

aus der Theorie der elliptischen Functionen zwischen den zu einem bestimmten Transformationsgrad gehörigen Multiplicatoren auf die analogen Gröfsen in der Theorie der hyperelliptischen Functionen zweier Argumente.

Diese Arbeit fällt zeitlich zwischen zwei Untersuchungen über die complexe Multiplication oder, wie sie Frobenius nennt, die principale Transformation der Thetafunctionen. Es handelt sich dabei um die zuerst von Kronecker in Angriff genommene Untersuchung und Aufstellung derjenigen besondern Parametersysteme in den Thetafunctionen, welche durch eine Transformation der Perioden in sich selbst übergeführt werden. In der ersten Arbeit (5) nimmt Wiltheifs seinen Ausgangspunkt zunächst von den hyperelliptischen Integralen vom Geschlechte zwei, discutirt die Gleichung für die Multiplicatoren eingehend in Bezug auf das Auftreten mehrfacher Wurzeln und stellt die zugehörigen Systeme der Parameter wirklich auf. Die Mitteilung eines Beispiels für die Transformation erster Ordnung und die hier möglichen besonderen Fälle schliefst die Arbeit. Die zweite dieser Arbeiten (6) ist dem Beweis des Satzes gewidmet, dafs das Zerfallen einer Thetafunction nach einer Transformation in Thetafunctionen von weniger Variabeln immer mit einer principalen Transformation derselben verbunden ist, bei welcher die Multiplicatoren ganze, nur durch das Vorzeichen verschiedene Zahlen sind.

Die übrigen Abhandlungen sind sämtlich einem und demselben Kreis von Fragen gewidmet, nämlich den partiellen Differentialgleichungen, welche die Thetafunctionen als Function der Moduln des algebraischen Gebildes befriedigen, und zwar beschränkte er sich auf hyperelliptische Gebilde und auf solche vom Geschlechte drei.

Die ersten Arbeiten nehmen ihren Ausgangspunkt von der Weierstrafs'schen Form der Thetafunctionen und benützen dabei die Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes als unabhängige Veränderliche. Als dann Klein den Charakter der Thetafunctionen und ihrer Modificationen als Invarianten hervorhob und daraus namentlich für die Entwickelung nach Potenzen der Argumente Nutzen zog, liefs es sich Wiltheifs nicht entgehen, von dem ausgebildeten formalen Apparat der Invariantentheorie für seine Probleme Nutzen zu ziehen. Es gelingt ihm nicht nur die wirkliche Aufstellung der gewünschten Differentialgleichungen in invarianter Form und die Herstellung von Recursionsformeln für die einzelnen homogenen Terme der Reihenentwickelung, welche zusammen mit fast gleichzeitigen Arbeiten vom Brioschi und Pascal in der That dieses Gebiet

zu einem gewissen Abschlufs bringen, sondern er gewinnt auch als Nebenresultat ein System von totalen Differentialgleichungen zwischen den Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung, in welchem ausschliefslich diese Perioden und deren Differentiale vorkommen, und welches ein System von Functionen als Perioden erster Gattung eines hyperelliptischen Gebildes genau charakterisirt. Da andererseits dieses System von Differentialgleichungen durch Nullsetzen von Thetafunctionen und deren Derivirten für die Nullwerte der Argumente vollständig integrirt werden kann, so wird dasselbe zweifellos noch eingehendem Studium unterworfen werden sobald sich das allgemeine Interesse wieder mehr der Theorie der Abel'schen Functionen zuwendet. Auch in der in 3 Abteilungen erschienenen Arbeit (11) hat Wiltheifs die besonderen invariantenbildenden Processe, welche in den früheren Arbeiten aufgetreten waren, unter gemeinsamen mehr invariantentheoretischen Gesichtspunkten umfassend untersucht.

Es war Wiltheifs in der kurzen Spanne Zeit, welche seine wissenschaftliche Thätigkeit umfafst, nicht vergönnt, sein Arbeitsgebiet um weittragende neue Ideen und Probleme zu bereichern, aber er hat es um eine Reihe wertvoller Einzelresultate bereichert, und zwar um solche, die ihrerseits den Keim neuer Gedanken zu entwickeln im Stande sind. Die Hoffnung, dafs er selbst daran noch Anteil nehme, war durch seine Erkrankung abgeschnitten. Trotzdem sichern ihm seine Arbeiten einen dauernden Platz in der Geschichte der Abel'schen Functionen.

Verzeichnis der Schriften von E. Wiltheifs.

1. Über die Umkehrung einer Gruppe von Systemen allgemeiner hyperelliptischer Integrale. Dissertation. Berlin 1879.

Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen.

2. Die partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente (1889).

Journal für Mathematik.

3. Zur Theorie der Transformation hyperelliptischer Thetafunctionen von zwei Argumenten. Bd. 96 (1884).
4. Über die partiellen Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunctionen nach den Parametern und Argumenten. Bd. 99 (1885).

Mathematische Annalen.

5. Complexe Multiplication hyperelliptischer Thetafunctionen zweier Argumente. Bd. 21 (1883).

6. Über Thetafunctionen, die nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen zerfallen. Bd. 26 (1885).
7. Über eine partielle Differentialgleichung der Thetafunctionen zweier Argumente und über die Reihenentwickelung derselben. Bd. 29 (1888).
8. Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen und der Perioden derselben. Bd. 31 (1888).
9. Die partiellen Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen. Bd. 33 (1888).
10. Lineare Differentialgleichungen zwischen den Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung. Bd. 34 (1889).
11. Eine besondere Art von covariantenbildenden Operationen, Bd. 35, 36, 37 (1889, 1890).
12. Die partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente. Bd. 38 (1891).

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

13. Über die partiellen Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen. 1892.

Karl Zelbr.

Von **E. Waelsch** in Brünn.

Am 13. Mai 1900 verschied Dr. Karl Zelbr, k. k. Bibliotheksscriptor und Privatdocent für theoretische Astronomie an der deutschen technischen Hochschule zu Brünn, im Alter von 46 Jahren. Er wurde im Jahre 1854 zu Oszlan geboren, studirte am ersten deutschen Gymnasium in Brünn und widmete sich an der philosophischen Facultät in Wien dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften. Nach Absolvirung der Hochschulstudien trat Zelbr, der im Jahre 1884 den akademischen Grad eines Doctors der Philosophie erreicht hatte, als Assistent an der k. k. Universitätssternwarte ein, woselbst er eine Reihe von Jahren in dieser Stellung verbrachte. Im Jahre 1889 trat er das Amt eines k. k. Scriptors der Bibliothek an der technischen Hochschule zu Brünn an, wo er mit einem wahren Bienenfleifse die ziemlich grofse Bibliothek in Ordnung brachte und den Katalog derselben verfafste. Dr. Zelbr beschäftigte sich hauptsächlich mit astronomischen Arbeiten und hat sich auf diesem Gebiete auch schriftstellerisch bethätigt. Seine Arbeiten fanden Aufnahme in den astronomischen Nachrichten, in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik (Bd. 41: das Problem der kürzesten Dämmerung), in Grunert's Archiv und in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Seine um-

fangreichste Arbeit war: „Die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen" im „Handwörterbuch für Astronomie". Als Bibliotheks-scriptor veröffentliche Dr. Zelbr im Jahre 1894 eine Schrift, betitelt: Memorandum betreffend die Anlage eines Generalkatalogs der öffentlichen und Studien-Bibliotheken Österreichs, sowie die Centralisirung des Bibliothekswesens in den gröfseren Städten der Monarchie", die ihm mannigfache Anerkennung brachte.

Sein aufrichtiges Wesen verschaffte ihm viele Freunde. Sein Grab ziert auf seinen Wunsch die Inschrift: „Ein einfacher und der Wissenschaft treu ergebener Mann ist dahingegangen."

Die auf der Jahresversammlung zu Aachen gehaltenen Vorträge.

Ueber die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit besonderer Rücksicht auf den Band IV derselben (Mechanik).

Von **F. Klein** in Göttingen.

(Auszug aus dem am 19. September 1900 vor der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte gehaltenen Vortrage.)

Entsprechend den Ideen, welche in weiten Kreisen der Naturforschergesellschaft wie insbesondere der mathematischen Vereinigung mafsgebend sind, will die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften das mannigfache und nach vielen Richtungen auseinandergehende Material, welches die mathematische Forschung im Laufe des 19. Jahrhunderts geschaffen hat, unter allgemeinen Gesichtspunkten ordnen und in einer allen Fachkreisen verständlichen Form dem weiteren Studium zugänglich machen; hierbei soll unter Wahrung strengster Objectivität nach Möglichkeit überall der historische Gesichtspunkt hervorgekehrt werden. Es wäre vielleicht nicht möglich gewesen, ein so umfassendes Unternehmen, welches auf die Mitarbeiterschaft der Fachgelehrten verschiedenster Art weit über die Grenzen Deutschlands hinaus angewiesen ist, in die Wege zu leiten, wenn sich nicht die im sogenannten Cartell vereinigten Akademieen von München, Wien und Göttingen an die Spitze gestellt und die Aufgabe zu der ihrigen gemacht hätten. Nachdem so ein fester Ausgangspunkt gewonnen war, nachdem ferner die Teubner'sche Verlagsbuchhandlung sich bereit erklärt hatte, ihre aufserordentliche Leistungsfähigkeit dem Unternehmen zur Verfügung zu stellen, haben Fachkenntnis und wissenschaftlicher Eifer von allen Seiten die Arbeit unterstützt und das erfreulichste Zusammenwirken zu Stande gebracht. Nicht minder hat das mathematische Publicum gleich nach dem Erscheinen der ersten Lieferungen dem Unternehmen seine Gunst in ungewöhnlichem Mafse zugewandt, sodafs die Aussicht auf das Gelingen des ganzen ausgedehnten Planes im Augenblicke so günstig ist, wie überhaupt möglich. Man darf hoffen, dafs eine Publication von durchaus internationaler Geltung zu

Stande kommt, — entsprechend dem Zuge der Zeit, der die Culturnationen auf allen Gebieten zu gemeinsamer Arbeit zusammenschliefst. Ist doch bereits eine französische Übersetzung in Vorbereitung, welche von Teubner und Gauthier-Villars (Paris) gemeinsam herausgegeben werden soll!

Die ersten drei Bände der Encyklopädie behandeln die sogenannte reine Mathematik, nämlich Band I Arithmetik und Algebra, Band II Analysis, Band III Geometrie, und zwar ruht die Redaction der Bände I und III in den Händen von Prof. Franz Meyer (Königsberg), diejenige von Band II in den Händen von Prof. H. Burkhardt (Zürich). Band I und II sind neben einander im Erscheinen begriffen, und ich lege hier die bisher publicirten Hefte derselben vor, aus deren wenn auch flüchtiger Durchsicht Sie einen guten Einblick in den Charakter des ganzen Unternehmens gewinnen werden. Der Inhalt gerade dieser ersten Bände wird ja bei der heutigen Gelegenheit naturgemäfs weniger interessiren; immerhin will ich Sie darauf aufmerksam machen, dafs Band I und II, soweit sie erschienen sind, bereits einige Artikel enthalten, die für den Naturforscher unmittelbar in Betracht kommen. Ich nenne beispielsweise aus I Ausgleichungsrechnung von Prof. Bauschinger (Berlin), Wahrscheinlichkeitsrechnung von Prof. Czuber (Wien), numerisches Rechnen von Prof. Mehmke (Stuttgart), dann aus II die von Prof. Burkhardt und Prof. Franz Meyer gemeinsam redigirte Darstellung der Potentialtheorie und einen Artikel über die Randwertaufgaben der partiellen Differentialgleichungen der Physik von Prof. Sommerfeld (Aachen).

Sehr viel directer wird sich das Interesse des Naturforschers den folgenden drei, den „angewandten" Bänden zuwenden, von denen Band IV die Mechanik, Band V die theoretische Physik, Band VI die Geodäsie und die mathematischen Teile der Geophysik und Astronomie behandeln soll. Wir haben uns besondere Mühe gegeben, bei der Vorbereitung dieser Bände mit den eigentlichen Fachkreisen des Inlandes und Auslandes in Verbindung zu kommen, was nicht ganz einfach war, weil das Band zwischen den Vertretern der genannten Disciplinen und denjenigen der reinen Mathematik, welches naturgemäfs bestehen sollte, vielfach zerrissen ist. Die leitende Auffassung dabei war, dafs die Darstellung auch in den Bänden IV, V, VI selbstverständlich durchaus mathematisch sein mufs, bez. überall die mathematischen Momente hervorheben soll, dafs aber gleichzeitig die intimen Fachkenntnisse, wie sie nur der eigentliche Physiker, Ingenieur, Astronom besitzt, zur vollen

Geltung gebracht werden sollen. Diese Vorarbeit ist glücklich beendet und daraufhin die Redaction der Mechanik von mir selbst, diejenige der theoretischen Physik von Prof. Sommerfeld (Aachen), endlich Geodäsie und Geophysik von Prof. Wiechert (Göttingen) übernommen worden; wegen der Redaction des astronomischen Teils schweben noch Unterhandlungen. Ich lege Ihnen hiermit die Dispositionen der Bände IV und V vor, welche zugleich die Namen der für die einzelnen Artikel gewonnenen Mitarbeiter enthalten; diese Dispositionen sind weiter unten (am Schlufs des vorliegenden Artikels) abgedruckt. Diese Namen dürften sehr geeignet sein, bei jedem Kenner der in Betracht kommenden Disciplinen die Ueberzeugung zu festigen, dafs die wissenschaftliche Behandlung der angewandten Bände auf derselben Höhe stehen soll wie die der Bände I bis III.

Als Abschlufs wird ein siebenter Band geplant, der neben einer Besprechung historischer, philosophischer und didactischer Fragen ein Generalregister bringen wird; doch ist die Inangriffnahme dieses siebenten Bandes noch in weitem Felde.

Ich möchte nun noch einige nähere Bemerkungen über die Ihnen vorliegende Disposition des von mir selbst zu redigirenden Bandes 4 (Mechanik) hier anschliefsen.

Zunächst, was die Abgrenzung dieses Bandes angeht, so konnte dieselbe von vornherein auf sehr mannigfache Weise gewählt werden. Wir haben alles, was mit Molecularmechanik zusammenhängt, z. B. Gastheorie, Capillarität, Krystallstructur, in den physikalischen Band verwiesen, dafür aber die elementaren Teile der Mechanik so ausgestaltet, dafs die Anwendungen in Physik und Technik gleich mit ihre Stelle fanden. Gewisse grundlegende Fragen, die man hierherziehen möchte, sind allerdings dem physikalischen Bande verblieben, so insbesondere die, ob die Mechanik die Grundwissenschaft der Physik ist oder sich als ein Teil in die Physik einordnet. Was die Abgrenzung gegen Astronomie angeht, so haben wir die Behandlung des abstracten Dreikörperproblems mit in Band 4 hereingenommen, um nämlich später, bei Band 6, in der Lage zu sein, uns unmittelbarer an die von den Astronomen bei ihren Rechnungen thatsächlich gebrauchten Methoden anzuschliefsen.

Innerhalb der so bezeichneten Grenzen soll nun Band 4 dem mathematischen Inhalte der theoretischen Mechanik möglichst vollständig und gleichmäfsig gerecht werden. Sie finden in der Disposition (die Sie nunmehr vergleichen wollen) vier Hauptabteilungen unterschieden, die mit den grofsen lateinischen Buchstaben A, B,

C, D bezeichnet sind. Und zwar bezieht sich A, wie billig, auf die Principien der Mechanik, B auf die Mechanik der Punkte und starren Systeme, C auf die Mechanik der Continua. Die Abteilung D (die übrigens nur als Anhang gedacht ist) hat einen Charakter für sich; ich komme sogleich noch darauf zurück.

Nehmen Sie nun gleich die nähere Einteilung von B und C. Sie sehen bei B zunächst einen mehr geometrischen Teil (I), bei dem es sich darum handelt, die Massenverteilung der Körper, die Kinematik, die Zusammensetzung und Wirkung der Kräfte mit den Mitteln der geometrischen Anschauung (sowie gelegentlich auch mit directer graphischer Construction) zu erfassen. Daran schliefst sich in II die eigentliche analytische Mechanik im Sinne von Lagrange, eine Disciplin, deren aufserordentliche Allgemeinheit und Tragweite nur derjenige recht würdigt, der sich vorab in die Einzelheiten von I vertieft hat. Endlich kommen in III die bereits genannten Anwendungen, bei denen als neues Moment hinzutritt, dafs man die Wirklichkeit immer nur approximiren kann, dafs die Berücksichtigung der Störungen und Fehler zur Hauptsache wird. So wird beispielsweise Nr. 10 die Theorie des Pendels enthalten, wobei u. a. die Frage auftritt, mit welcher Zuverlässigkeit man aus den Versuchen mit dem Foucault'schen Pendel auf die Art und Gröfse der Erdrotation schliefsen kann. Das grofse Gebiet Nr. 11 hat gegenwärtig ein besonderes actuelles Interesse; ich darf hier auf die interessante Vorarbeit verweisen, welche der Referent, Herr Heun, hierüber soeben in den Berichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung publicirt hat[1]. Mit Nr. 12 und 13 (Ballistik, Spiel und Sport) berühren wir die Interessen sehr ausgedehnter Teile des Publicums. Endlich reichen wir mit der physiologischen Mechanik (Nr. 13'), der Lehre von der Bewegung der Organismen, insbesondere des Menschen selbst, der medicinischen Gruppe der gegenwärtigen Versammlung die Hand.

Ueber C könnte ich in demselben Sinne referiren, aber ich darf Ihre Aufmerksamkeit nicht ermüden und bemerke also nur, dafs die Einteilung eine mehr sachliche (weniger methodische) ist, indem als

1) Band IX, 2 der genannten Berichte (Leipzig 1900): „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik." — Ich selbst habe mich über die selbständige Bedeutung der technischen Mechanik neuerdings in einem der Vorträge über angewandte Mathematik und Physik verbreitet, welche Riecke und ich im Anschlufs an den letzten Göttinger Feriencursus für Oberlehrer gesammelt publicirt haben. (Leipzig 1900.)

Hauptgebiete Hydrodynamik und Elasticitätstheorie einander gegenübergestellt werden.

Über D gestatten Sie mir noch einige wenige Worte, und zwar deshalb, weil die hierher gehörigen Fragen in den Lehrbüchern der Mechanik gewöhnlich gar nicht berührt werden. Trotzdem sind dieselben Ihnen Allen beispielsweise aus der kinetischen Gastheorie geläufig. Man kann auch bemerken, dafs das Heranziehen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (oder das Operiren mit Mittelwerten) kein willkürlicher Ansatz der Theoretiker ist, sondern von Jedermann bei der Beurteilung praktischer Verhältnisse unbewufst geübt wird, — wie es denn beispielsweise zahlreiche Fabricationsprocesse giebt, welche durchaus auf Ueberlegungen der hierher gehörigen Art beruhen. Es scheint aber sehr schwer, sich darüber klar zu werden, wie weit eine Combination der Wahrscheinlichkeitsansätze mit den Differentialgleichungen der Mechanik (die doch für sich allein den Gesammtverlauf der Erscheinungen bestimmen müssen) logisch zulässig sein mag. Zum Glück liegt das Referat in den Händen des bewährtesten Forschers auf diesem Gebiet, des Prof. Boltzmann. Wenn ich seine Meinung richtig verstehe, so erscheint ihm der Wahrscheinlichkeitsansatz als der primäre; die Naturgesetze überhaupt und also auch die Differentialgleichungen der Mechanik sind ihm nur Formulierungen für Ereignisse, die mit überwiegender Wahrscheinlichkeit eintreten. Hiermit ist für die Fragestellungen, die unter D fallen und deren Einzelheiten übrigens nach Band 5 (Physik) und 6 (Astronomie) gewiesen sind, die Einheit der philosophischen Grundauffassung gerettet; die logisch strenge Durchführung bleibt aber vorläufig noch ein Desideratum.

Ich schliefse hiermit meinen Bericht, der sich entsprechend den gegebenen äufseren Bedingungen im engsten Rahmen bewegen mufste. Handelt es sich bei der Encyklopädie um ein ausschliefslich mathematisches Unternehmen, so soll dabei, wie ich zu zeigen suchte, die mathematische Wissenschaft im weitesten Sinne verstanden sein, der die Beziehungen zu den Naturgebieten einschliefst. Von hier aus wage ich zu hoffen, dafs auch die allgemeinen naturforschenden Kreise der Encyklopädie Interesse entgegenbringen und ihr, wo es nötig ist, Unterstützung zukommen lassen werden.

(Im Anschlusse an den vorstehend in seinen Grundgedanken wiedergegebenen Vortrag fand am folgenden Tage (den 20. September), wie schon in dem Bericht über die Aachener Versammlung bemerkt wurde, in der mathematischen Section der Naturforscherversammlung eine eingehende Debatte über die Disposition der Bände 4 und 5 der

Encyklopädie statt, die nach vielen Seiten anregend verlief und jedenfalls die Herausgeber der genannten Bände, Prof. Sommerfeld und mich, zu besonderem Danke verpflichtete. F. Klein.)

Band IV: Mechanik.

A. Einleitung.

1. Die Principien der rationellen Mechanik. A. Vofs in Würzburg.

B. Mechanik der Punkte und starren Systeme.

I. Geometrische Grundlegung und Entwickelung concreter Vorstellungsweisen.

2. Theorie der Streckensysteme und Schrauben. E. Timerding in Strafsburg i. E.
3. Geometrie der Massen. G. Jung in Mailand.
4. Kinematik. A. Schönflies in Königsberg.
5. Die elementare Statik, insbesondere graphische Statik. L. Henneberg in Darmstadt.
6. Die elementare Kinetik. J. Petersen in Kopenhagen.

II. Behandlung beliebiger Systeme von endlichem Freiheitsgrad in analytischer Allgemeinheit.

7. Allgemeine Entwickelungen. P. Stäckel in Kiel.
8. Rotationsprobleme. P. Stäckel in Kiel.
9. Die mathematische Behandlung des n-Körper-Problems. E. T. Whittaker in Cambridge.

III. Anwendungen, mit Berücksichtigung der störenden Einflüsse.

10. Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen. Ph. Furtwängler in Potsdam.
11. Dynamische Probleme der Maschinentechnik. K. Heun in Berlin.
12. Ballistik. C. Cranz in Stuttgart.
13. Spiel und Sport. G. T. Walker in Cambridge.

13'. Physiologische Mechanik. O. Fischer in Leipzig.

C. Mechanik der deformirbaren Körper.

I. Analytisch-geometrische Hülfsmittel.

14. Vectoranalysis und Verwandtes. M. Abraham in Göttingen.

II. Hydrodynamik.

15. Physikalische Grundlegung. A. E. H. Love in Oxford.
16. Theoretische Ausführungen. A. E. H. Love in Oxford.
17. Hydraulik, erster Teil: Das Strömen von Wasser in Röhren und Canälen etc. E. Paladini in Mailand.
18. Hydraulik, zweiter Teil: Motoren und Pumpen. M. Grübler in Dresden.
19. Schiffsbewegung. A. Kriloff in St. Petersburg.
20. Aërodynamik. S. Finsterwalder in München.

III. Elasticitätslehre.

21. Physikalische Grundlegung. A. Sommerfeld in Aachen.
22. Theoretische Behandlung der statischen Probleme. O. Tedone in Genua.

23. Die Statik der Bauconstructionen. E. Ovazza in Palermo.
24. Schwingungen, insbesondere Akustik. H. Lamb in Manchester.
25. Theorie der auf elastischer Wirkung beruhenden Mefsapparate. Ph. Furtwängler in Potsdam.

D. Mechanik der aus sehr zahlreichen discreten Teilen bestehenden Systeme.

26. Das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. L. Boltzmann in Leipzig.

Band V: Physik.

A. Einleitung.

1. Mafs und Messen. C. Runge in Hannover.
2. Allgemeine Eigenschaften der Körper, insbesondere die Schwere. J. Zenneck in Strafsburg i. E.

B. Thermodynamik.

3. Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik. G. H. Bryan in Upper-Bangor, Wales.
4. Specielle Stoffe und Zustände. H. Kamerlingh-Onnes in Leiden und J. Korteweg in Amsterdam.
5. Dissipation der Energie, insbesondere Wärmeleitung. E. W. Hobson in Cambridge.
6. Technische Wärmetheorie H. Lorenz und E. Riecke in Göttingen.

C. Molekularphysik.

7. Grundvorstellungen über Atom und Molekül.
   a) Einleitende Bemerkungen zur Atomistik. L. Boltzmann in Leipzig.
   b) Die mathematischen Grundlagen der Chemie. W. Meyerhoffer in Berlin.
8. Krystallographie.
   a) Symmetrie- und Structur-Theorien. A. Schönflies und O. Mügge in Königsberg i. Pr.
   b) Krystall-Berechnung und -Zeichnung. Th. Liebisch in Göttingen.
9. Kinetische Gastheorie. L. Boltzmann in Leipzig.
10. Capillarität und Cohäsion. H. Minkowski in Zürich.
11. Physikalische und Elektrochemie. J. H. Van't Hoff in Berlin.

D. Elektricität und Optik.

Physikalische Grundlegung der Elektricitätslehre.

12. Standpunkt der Fernwirkung, die Elementargesetze. R. Reiff in Stuttgart.
13. Standpunkt der Feldwirkung, Maxwell's Theorie und Verwandtes. H. A. Lorentz in Leiden.
14. Weiterbildung der Maxwell'schen Theorie. Elektronen-Theorie. H. A. Lorentz in Leiden.

Mathematische Specialausführungen zur Elektricitätslehre.

15. Elektrostatik und Magnetostatik. H. M. Macdonald in Cambridge.
16. Beziehungen zwischen Elektricität und elastischer Deformation. F. Pockels in Heidelberg.
17. Stationäre und langsam veränderliche Felder (elektrische Ströme, Induction und Elektrodynamik im engeren Sinne). A. Tauber in Wien.

18. Beziehungen der elektrischen Strömung zu Wärme und Magnetismus. H. Diefselhorst in Berlin.
19. Rasch veränderliche Felder. M. Abraham in Göttingen.
20. Elektrotechnik. Th. Descoudres in Göttingen.

Physikalische Grundlegung der Optik.

21. Ältere Theorie. A. Wangerin in Halle a. S.
22. Elektromagnetische Lichttheorie. W. Wien in Würzburg.
23. Hineinspielen der Molecularphysik und der Elektronentheorie in die Optik. W. Wien in Würzburg.

Mathematische Specialausführungen zur Optik.

24. Strahlenoptik und optische Instrumente. S. Finsterwalder in München.
25. Wellenoptik (Interferenz und Beugung). K. Strehl in Erlangen.
26. Krystalloptik. F. Pockels in Heidelberg.

E. Schlufswort.

27. Allgemeine physikalische Anschauungen und Methoden. A. Sommerfeld in Aachen und J. Larmor in Cambridge.

Analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Von **G. Mittag-Leffler** in Stockholm.

Der unter dem Namen der Taylor'schen Reihe bekannte Grenzausdruck

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{1}{\lfloor \lambda} F^{(\lambda)}(a)\,(x-a)^{\lambda}$$

besitzt die fundamentale Eigenschaft, gleichmäfsig convergent zu sein für jeden Bereich im Innern eines Kreises C, aber zu divergiren für jeden Punkt aufserhalb desselben Kreises.

Der Grenzausdruck

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x \mid a),$$

$$G_n(x \mid a) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lfloor \lambda_1 \lfloor \lambda_2 \cdots \lfloor \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},$$

welchen ich in kürzlich erschienenen Abhandlungen studirt habe, besitzt die Eigenschaft, gleichmäfsig für jeden Bereich im Innern des Principalsterns A zu convergiren, welcher zu den Constanten

$$F^{(\mu)}(a); \quad \mu = 0, 1, 2 \ldots \infty$$

gehört, und nicht gleichmäfsig zu convergiren für irgend ein Continuum, welches eine Ecke von A enthält. Es ist dennoch vollkommen möglich, dafs

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x \mid a)$$

noch aufserhalb A convergirt. Es besteht zwischen dem Ausdruck

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)\,(x-a)^{\lambda}$$

und dem Ausdrucke

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x \mid a)$$

dieser wesentliche Unterschied, dafs der Kreis C immer ein Convergenzstern des Ausdruckes

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)\,(x-a)^{\lambda}$$

ist; aber dafs es nicht notwendig ist, dafs der Stern A ein Convergenzstern des Ausdruckes

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x \mid a)$$

ist.

Das folgende Problem bietet sich nun von selbst dar: den Ausdruck

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x \mid a)$$

durch einen anderen Grenzausdruck zu ersetzen, welcher den Stern A als Convergenzstern besitzt.

Dieses Problem kann auf verschiedene Arten gelöst werden.

Eine erste Lösung ist die folgende: Man setze

$$S_n(x \mid a) = \operatorname*{Lim}_{m_1=\infty}\ \operatorname*{Lim}_{m_2=\infty} \dots \operatorname*{Lim}_{m_n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \dots$$

$$\dots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

Die Constanten $c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ sind gegebene numerische Constante,

$$c_{\lambda_1} = \frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda_1}};\quad c_{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda_1}\,\lfloor\!\underline{\lambda_2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2};\quad c_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda_1}\,\lfloor\!\underline{\lambda_2}\,\lfloor\!\underline{\lambda_3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},$$

und sie werden algebraische Irrationalitäten für $n > 3$. Man sieht,

dafs $S_n(x \mid a)$ für $n = 1$ nichts anderes ist als die Taylor'sche Reihe. Der Ausdruck

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} S_n(x \mid a)$$

besitzt den Stern A als Convergenzstern, und man hat zugleich

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} S_n(x \mid a).$$

Eine zweite Lösung gewinnt man so: Man setze:

$$S_\alpha(x \mid a) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} G_\lambda(x \mid a),$$

$$G_\lambda(x-a) = \frac{k_{\lambda-1}^{(1)}(\beta)}{\lfloor 1 \lfloor \lambda-1} F^{(1)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right) + \frac{k_{\lambda-2}^{(2)}(\beta)}{\lfloor 2 \lfloor \lambda-2} F^{(2)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{k_1^{(\lambda-1)}(\beta)}{\lfloor \lambda-1 \lfloor 1} F^{(\lambda-1)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\lambda-1} + \frac{1}{\lfloor \lambda} F^{(\lambda)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\lambda},$$

$\beta = 1 - \alpha,$

$\alpha =$ einer positiven Zahl, welche nicht gröfser als Eins ist,

$$\omega = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)}\right)} = \left(\frac{1}{2}e\right)^2 e^{\frac{2}{\alpha}}[1 + \alpha\mathfrak{P}(\alpha)].$$

Die $k_\mu^{(m)}(\beta)$ sind Polynome vom Grade μ, deren Coefficienten gegebene positive, rationale Zahlen sind. Diese Polynome verschwinden für $\beta = 0$.

Der Ausdruck $S_\alpha(x \mid a)$ geht für $\alpha = 1$ in die Taylor'sche Reihe über; er besitzt einen wohlbestimmten Convergenzstern, der für $\alpha = 1$ der Kreis C ist, und der sich mehr und mehr dem Stern A nähert, wenn α sich der Null nähert. Andererseits besitzt der Grenzausdruck $\operatorname*{Lim}_{\alpha=0} S_\alpha(x \mid a)$ den Stern A zum Convergenzstern.

Man hat also für das Innere des Principalsternes die Gleichung

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x \mid a) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} S_n(x \mid a) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} S_\alpha(x \mid a).$$

Der Stern A, welcher ein Convergenzstern für den zweiten und dritten unserer drei Grenzausdrücke ist, ist es nicht notwendig für den ersten.

Der erste Ausdruck

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x \mid a) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots$$

$$\cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lfloor \lambda_1 \lfloor \lambda_2 \dots \lfloor \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots\lambda_n}$$

ist ein *einfacher* Grenzausdruck.

Der dritte

$$\lim_{n=0} S_\alpha(x\,|\,a) = F(a) + \lim_{\alpha=0}\lim_{n=\infty}\sum_{\lambda=0}^{n}\left[\frac{k^{(1)}_{\lambda-1}(\beta)}{\lfloor 1 \lfloor \lambda-1} F^{(1)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right) + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{k^{(\lambda-1)}_{1}(\beta)}{\lfloor \lambda-1 \lfloor 1} F^{(\lambda-1)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\lambda-1} + \frac{1}{\lfloor \lambda} F^{(\lambda)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\lambda}\right]$$

ist ein *doppelter* Grenzausdruck.

Der zweite

$$\lim_{n=\infty}\lim_{m_1=\infty}\lim_{m_2=\infty}\ldots\lim_{m_n=\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots$$

$$\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}$$

ist von einer viel höheren Transcendenz.

Es mögen noch folgende wichtige Bemerkungen hinzugefügt werden:

Es giebt, wie schon bemerkt worden ist, zwischen C und A einen intermediären Stern $A^{(\alpha)}$, welcher auf stetige Weise von C nach A übergeführt werden kann, indem man α von 1 bis 0 variiren läfst. Für diesen Stern findet die Gleichung statt:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \lim_{n=\infty}\sum_{\lambda=0}^{n} G_\lambda(x-a).$$

Dieser Stern ist auch ein Convergenzstern für den Ausdruck

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\lambda=0}^{n} G_\lambda(x-a),$$

und dieser Ausdruck ist seinerseits ein *einfacher* Grenzausdruck.

Alle Theoreme, welche soeben ausgesprochen worden sind, können auf analytische Functionen mehrerer unabhängiger Variablen ausgedehnt werden.

Diese Ausdehnung kann auf zwei sehr verschiedene Arten geschehen. Bei der ersten, sozusagen gewöhnlichsten, spielt die Ordnung der unabhängigen Variablen keine Rolle. Bei der zweiten hingegen hat diese Ordnung einen ausschlaggebenden Einflufs.

Zur Theorie der Poincaré'schen Reihen.

Von **R. Fricke** in Braunschweig.

Bei Abschätzung der Bedeutung, welche die Poincaré'schen Reihen als analytische Darstellungen der automorphen Formen besitzen, ist es eine Hauptfrage, welche Formen sich direct als Poincaré'sche Reihen darstellen lassen. Diese Frage ist bislang noch nicht allgemein beantwortet worden. Die früheren Untersuchungen von Poincaré selber sowie von Autoren, welche sich unmittelbar an Poincaré anschliefsen, betreffen (gewöhnlich für stark beschränkte Gruppenclassen) stets nur „eigentlich“ automorphe Formen, welche bei E. Ritter nur eine specielle Classe aller möglichen eindeutigen automorphen Formen (multiplicativen Formen) ausmachen. Ritter hat die aufgeworfene Frage im niedersten Falle der Gebilde des Geschlechtes $p = 0$ für alle Formen im wesentlichen zum Abschlufs gebracht. Er bedient sich hierbei eines Beweisverfahrens, dessen wesentliche Gesichtspunkte von Poincaré herstammen, die er jedoch in neuer Gestalt und in zweckmäfsigerer Anordnung darstellt.

Der Vortragende führt aus, dafs auch bei automorphen Gebilden beliebigen Geschlechtes p, abgesehen vom Falle der eigentlich automorphen Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, die Ritter'sche Überlegung zugkräftig bleibt. Im genannten Ausnahmefalle hat man indessen mit abgeänderten Verhältnissen zu thun (wie gleich noch näher aufgewiesen wird); gleichwohl ordnet sich auch hier das schliefslich herauskommende Resultat folgenden allgemeingültigen Angaben unter: Eine eindeutige automorphe Form ist stets und nur dann in Gestalt einer Poincaré'schen Reihe darstellbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

I. Die Form mufs „unimultiplicativ“ sein, d. h. sie mufs gegenüber den Substitutionen der Gruppe stets nur Multiplicatoren vom absoluten Betrage 1 annehmen.

II. Die Form mufs in jedem etwa auftretenden parabolischen Zipfel des Fundamentalbereichs verschwinden.

III. Die Dimension d mufs eine solche sein, dafs überhaupt die Poincaré'schen Reihen dieser Dimension absolut convergent sind.

Was die erste Bedingung angeht, so ist die Beschränkung auf unimultiplicative Formen als keine sehr wesentliche anzusehen. Eine Form mit irgend einem zulässigen Multiplicatorsystem kann stets auf eine und im wesentlichen auch nur auf eine Art durch

Multiplication mit der Exponentialfunction eines überall endlichen Integrals in eine unimultiplicative Form umgewandelt werden.

Die zweite Bedingung betreffend lag die Vermutung nahe, dafs das Verschwinden der Poincaré'schen Reihen in den parabolischen Spitzen vielleicht eine Folge der bekannten Forderung wäre, dafs die bei Bildung einer Poincaré'schen Reihe

$$\sum_k \mu_k^{-1} H_d(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2, \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2)$$

benutzte rationale Form $H_d(\zeta_1, \zeta_2)$ in allen Grenzpunkten der Gruppe und also auch in den parabolischen Spitzen endlich sein soll. Herr von Mangoldt hat bereits in den Göttinger Nachrichten von 1886 rationale Formen H_d mit Erfolg zugelassen, welche in parabolischen Spitzen (gemessen in ζ) Pole ausreichend niedriger Ordnung aufweisen. Der Vortragende teilt indessen mit, dafs sich bei den betreffenden Reihen die polare Unstetigkeit auf einen in ζ_1, ζ_2 rationalen Factor wirft, während der übrigbleibende, für die Abschätzung der dargestellten automorphen Form im Fundamentalbereiche allein in Betracht kommende Factor nach wie vor im parabolischen Zipfel verschwindet. Eine Beseitigung der Forderung II läfst sich also von hier aus nicht gewinnen und dürfte überhaupt auch auf anderem Wege nicht ausführbar sein.

Der Bedingung III wird in jedem Falle durch die Ungleichung $d < -3$ genügt. Bei Grenzkreisgruppen ist auch $d = -3$ zulässig. Bei verschiedenen Arten von Gruppen ohne Grenzcurven (insbesondere für alle Gruppen mit Hauptkreis, der kein Grenzkreis ist) hat man die absolute Convergenz der Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension zeigen können (Schottky, Burnside, Ritter). Ja, der zweite der eben genannten Autoren hat sogar die Existenz von Gruppen aufgewiesen, bei denen die Reihen der Dimension -1 noch absolut convergent sind (cf. Proceedings of the Lond. Math. Soc. von 1891). Bei Gruppen mit einer oder unendlich vielen „Grenzcurven" sind die Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension niemals absolut convergent. Die verbreitete Vermutung, dafs bei allen Gruppen ohne Grenzcurven die Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension absolut convergent seien, hat noch nicht bestätigt werden können; und andererseits mufste leider der Versuch von Herrn Lindemann, die absolute Convergenz der Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension bei den Gruppen mit Grenzcurven zu zeigen (cf. Sitzungsberichte der Münchener Akad. 1899 Heft III), mifslingen.

Den Beweis des oben ausgesprochenen Theorems konnte der Vortragende aus Mangel an Zeit nicht ausführlich entwickeln. Er

mufste sich mit der Bemerkung begnügen, dafs dieser Beweis auf der Theorie der sogenannten „einpoligen“ Reihen beruht, deren einzelne im Fundamentalbereiche nur einen frei beweglichen Pol erster Ordnung „vom Coefficienten 1“ aufweist. Solche einpolige Reihen lassen sich in allen in Betracht kommenden Fällen ansetzen, abgesehen von den eigentlich automorphen Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, welche entweder polfrei oder mindestens zweipolig sind. Hierdurch ist die Ausnahmestellung dieses schon oben genannten Falles begründet. Doch genügt es, wenn man in diesem Ausnahmefalle die Betrachtung auf die zweipoligen Reihen basirt. Aus der Untersuchung der Abhängigkeit dieser Reihen von ihren Unstetigkeitsstellen entspringt ein indirectes Schlufsverfahren, vermöge dessen man der im Laufe des Beweises auftretenden Schwierigkeit des möglichen identischen Verschwindens polfreier Reihen erfolgreich begegnet.

Zur Theorie der Abel'schen Gruppen.

Von **E. Steinitz** in Charlottenburg.

Unter den *endlichen Gruppen* zeichnen sich diejenigen, deren Operationen *vertauschbar* sind, die sog. *commutativen* oder *Abel'schen Gruppen* durch besondere Einfachheit und Übersichtlichkeit aus. Diese Übersichtlichkeit beruht darauf, dafs wir imstande sind, die verschiedenen commutativen Gruppen durch bestimmte, mit ihnen in sehr einfachem Zusammenhange stehende Zahlen, ihre „*Invarianten*“, zu charakterisieren. Aus jeder *Abel'schen* Gruppe kann man nämlich ein *System erzeugender Operationen*

$$A_1, A_2, \dots A_n$$

herausgreifen, welches folgende Eigenschaften besitzt: 1. Jede Operation läfst sich, und zwar nur auf eine Weise, als Product von Potenzen der Operationen $A_1, \dots A_n$ darstellen. 2. Von den Ordnungen $a_1, a_2, \dots a_n$ der Operationen $A_1, A_2, \dots A_n$ ist jede durch die folgende teilbar. Dabei sind die a durch die Gruppe völlig bestimmt und bestimmen ihrerseits die Gruppe (wenn holoëdrisch isomorphe Gruppen nicht als verschieden angesehen werden). Sie heifsen die „*Invarianten*“ der Gruppe. Natürlich kann das Invariantensystem der Gruppe durch Hinzunahme von Invarianten vom Werte 1 beliebig verlängert werden, da man dem System der erzeugenden Operationen beliebig oft die Identität beifügen kann.

Die Anzahl der von 1 verschiedenen Invarianten heifst der „Rang" der Gruppe und giebt an, wie viele Operationen zu ihrer Erzeugung erforderlich sind.

Damit in einer commutativen Gruppe $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$, d. h. einer Gruppe α mit den Invarianten $a_1, a_2, \ldots$ eine mit

$$\beta = (b_1, b_2 \ldots)$$

isomorphe Untergruppe vorhanden sei, ist notwendig und hinreichend, dafs die Quotienten $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots$ ganze Zahlen sind.

Mit diesen Sätzen und solchen Untersuchungen, welche sich mit ihrer Hilfe leicht erledigen lassen, ist jedoch die Theorie der *Abel'schen* Gruppen keineswegs erschöpft, und eine weitere Beschäftigung mit denselben führt bald zu Fragen, welche gänzlich neue Untersuchungen erfordern. Eine solche Frage betrifft die *Zusammensetzung von Gruppen aus gegebenen Factoren* in dem zuerst von *C. Jordan* angegebenen Sinne. Sind

$$\gamma = (c_1, c_2, \ldots), \quad \alpha = (a_1, a_2, \ldots), \quad \beta = (b_1, b_2, \ldots)$$

Abel'sche Gruppen, so wollen wir sagen: *„γ ist in dem Product $\alpha \cdot \beta$ enthalten"*, wenn γ eine mit α isomorphe Untergruppe α' besitzt, für welche überdies $\frac{\gamma}{\alpha'}$ isomorph mit β ist. Wenn demnach unter dem *Product* $\alpha \cdot \beta$ die Gesamtheit der in $\alpha \cdot \beta$ enthaltenen Gruppen verstanden wird, so zeigt die Untersuchung leicht, dafs für diese Productenbildung zwar das *commutative* und das *associative* Gesetz gelten, dafs aber keineswegs aus einer Gleichung von der Form $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta'$ die Gleichheit der Gruppen β und β' folgt. Es läfst sich indessen leicht die Rechnung mit commutativen Gruppen so gestalten, dafs die formalen Rechnungsoperationen durchweg Giltigkeit haben. Dazu gelangt man, wenn man die Frage, ob eine Gruppe γ in dem Product $\alpha \cdot \beta$ enthalten sei, dahin verschärft: *Wie oft ist die Gruppe γ in $\alpha \cdot \beta$ enthalten,* d. h. wie viele Untergruppen α' besitzt γ von der Beschaffenheit, dafs α' mit α und $\frac{\gamma}{\alpha'}$ mit β isomorph ist? Wird diese Anzahl mit $t(\gamma; \alpha, \beta)$ bezeichnet, so liegt es nahe, ein symbolisches Rechnen mit Gruppen durch die Gleichung

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{\pi} t(\pi; \alpha, \beta) \cdot \pi$$

zu definieren, welche das *Product* zweier Gruppen als eine *Summe* von Gruppen darstellt, als deren Summanden die nach obiger Be-

zeichnung in dem Product $\alpha \cdot \beta$ enthaltenen Gruppen π erscheinen, und zwar eine jede so oft, als sie in dem Product enthalten ist. Auf Grund der leicht nachzuweisenden Relation

$$t(\gamma;\ \alpha,\ \beta) = t(\gamma;\ \beta,\ \alpha)$$

gilt für diese Rechnung das commutative Gesetz. Es folgt ferner aus einer Gleichung von der Form $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta'$, dafs $\beta = \beta'$ sein muss. Jede *ganze Function von Gruppen* läfst sich auf Grund der definirenden Gleichung als eine *lineare homogene Function* von Gruppen darstellen, und zwar *nur auf eine* Weise.

Aber trotz dieser eleganten Eigenschaften der commutativen Gruppen ist man noch immer weit entfernt von der Beantwortung der Cardinalfrage nach den in einem Product $\alpha \cdot \beta$ enthaltenen Gruppen. Diese verlangt, durch ein allgemeines Theorem über das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Function $t(\gamma;\ \alpha,\ \beta)$ zu entscheiden. (In jedem einzelnen gegebenen Falle kann natürlich die Entscheidung durch ein endliches Verfahren geliefert werden.) Für verschiedene specielle Fälle ergeben sich indessen mancherlei merkwürdige Resultate. Wenn z. B. von den Gruppen α, β die eine, etwa β, vom Range 1 ist, also nur ihre erste Invariante b_1 einen von 1 verschiedenen Wert hat, so können die in $\alpha \cdot \beta$ enthaltenen Gruppen leicht angegeben werden. Es sei

$$\alpha = (a_1,\ a_2, \ldots), \quad \gamma = (c_1,\ c_2, \ldots);$$

dann ergeben sich als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dafs γ in $\alpha \cdot \beta$ enthalten sei:

1. $$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots b_1.$$

2. *Die Quotienten* $\frac{c_1}{a_1}, \frac{a_1}{c_2}, \frac{c_2}{a_2}, \frac{a_2}{c_3}, \frac{c_3}{a_3}, \frac{a_3}{c_4} \cdots$ *müssen ganze Zahlen sein.*

Man kann diesen Satz noch in anderer Form aussprechen: Damit eine Gruppe $\alpha = (a_1,\ a_2, \ldots)$ durch Hinzunahme einer einzigen erzeugenden Operation zu einer Gruppe $\gamma = (c_1,\ c_2, \ldots)$ erweitert werden könne, ist notwendig und hinreichend, dafs die Quotienten $\frac{c_1}{a_1}, \frac{a_1}{c_2}, \frac{c_2}{a_2}, \frac{a_2}{c_3}, \cdots$ ganze Zahlen sind. — Auch für den Fall, dafs von den Gruppen α, β die eine nur vom Range 2 (die andere beliebig) ist, habe ich die in $\alpha \cdot \beta$ enthaltenen Gruppen bestimmt.

Ein weiterer specieller Fall: Von den Gruppen

$$\alpha = (a_1,\ a_2,\ a_3), \quad \beta = (b_1,\ b_2,\ b_3), \quad \gamma = (c_1,\ c_2,\ c_3)$$

sei keine von höherem als dritten Range. Damit γ in $\alpha \cdot \beta$ enthalten sei, ist notwendig und hinreichend:

1. $$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$$

2. *Die Quotienten*

$$\frac{c_1}{a_1 \cdot b_1}, \quad \frac{a_1 \cdot b_3}{c_1}, \quad \frac{a_3 \cdot b_1}{c_1},$$
$$\frac{c_2}{a_1 \cdot b_2}, \quad \frac{c_2}{a_2 \cdot b_1}, \quad \frac{a_2 \cdot b_3}{c_2}, \quad \frac{a_3 \cdot b_2}{c_2},$$
$$\frac{c_3}{a_1 \cdot b_3}, \quad \frac{c_3}{a_2 \cdot b_2}, \quad \frac{c_3}{a_3 \cdot b_1}, \quad \frac{a_3 \cdot b_3}{c_3}$$

müssen ganze Zahlen sein.

Bei diesen Untersuchungen kann man sich, wie leicht zu sehen, auf die Betrachtung solcher *Abel'scher* Gruppen beschränken, deren Ordnungen Potenzen einer und derselben Primzahl p sind. Es sei also jetzt

$$\alpha = (p^{a_1}, p^{a_2}, \ldots), \quad \beta = (p^{b_1}, p^{b_2}, \ldots), \quad \gamma = (p^{c_1}, p^{c_2}, \ldots).$$

Dann liegt es nahe, die Frage nach dem Verschwinden oder Nichtverschwinden der Function $t(\gamma; \alpha, \beta)$ in der Weise anzugreifen, dafs man auf die allgemeine Bestimmung der Funktion t ausgeht. Eine solche Bestimmung habe ich mit Hilfe von Recursionsformeln durchgeführt. $t(\gamma; \alpha, \beta)$ ist eine Function der Primzahl p und der Exponenten a_i, b_i, c_i; betrachtet man die Exponenten als bestimmte gegebene Zahlen und t als Function von p allein, so lehrt die Untersuchung, dafs t eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten ist, deren Grad die Zahl

$$m = (c_1 - a_1 - b_1) + 2(c_2 - a_2 - b_2) + 3(c_3 - a_3 - b_3) + \cdots$$

sicherlich nicht übersteigt. Bezeichnet man daher den Coefficienten von p^m mit $h(\gamma; \alpha, \beta)$, so ist $h(\gamma; \alpha, \beta)$ von p unabhängig und kann nicht negativ sein, weil sonst für grofse Werte der Primzahl p die Function $t(\gamma; \alpha, \beta)$ negative Werte annähme, was ihrer Natur als einer Anzahl widerspräche. — Indessen die Form, in welcher sich die Function $t(\gamma; \alpha, \beta)$ darbietet, ist nicht geeignet, allgemein entscheiden zu lassen, wann sie identisch (d. h. bei festbleibenden Exponenten a_i, b_i, c_i für jeden Wert von p) verschwindet, und wann nicht. Nach den bisherigen Untersuchungen können folgende Sätze als sehr wahrscheinlich gelten: 1. *Wenn die Function $t(\gamma; \alpha, \beta)$ nicht identisch verschwindet, so verschwindet sie für keinen Wert der Primzahl p.* 2. *Die Function $t(\gamma; \alpha, \beta)$ steigt entweder wirklich bis zum Grade m an, oder sie verschwindet überhaupt iden-*

tisch. Hiernach würde das Verschwinden und Nichtverschwinden der Function $t(\gamma;\ \alpha,\ \beta)$ ganz unabhängig von p und durch das Verschwinden oder Nichtverschwinden von $h(\gamma;\ \alpha, \beta)$ allein bedingt sein.

Der Coefficient $h(\gamma;\ \alpha,\ \beta)$ läfst nun eine merkwürdige Darstellung zu, auf welche hier noch kurz eingegangen werden möge. Zu diesem Zweck denken wir uns eine natürliche Zahl n beliebig grofs aber fest gewählt, ziehen sodann ausschliefslich solche Gruppen

$$\alpha = (p^{a_1},\ p^{a_2}, \ldots p^{a_n})$$

in Betracht, deren Rang $\leqq n$ ist, und ordnen jeder solchen Gruppe eine bestimmte *symmetrische Function von n Unbestimmten* $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu, wie folgt. Die Exponenten $a_1,\ a_2, \ldots a_n$ genügen den Ungleichungen $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0$, setzt man daher

$$a'_i = a_i + n - i,$$

so bestehen zwischen den a' die Ungleichungen

$$a'_1 > a'_2 > \cdots > a'_n \geqq 0.$$

Der Ausdruck

$$S'(\alpha) = \sum \pm\, x_1^{a'_1} \cdot x_2^{a'_2} \cdot x_3^{a'_3} \cdots x_n^{a'_n},$$

dessen Glieder aus $x_1^{a'_1} \cdot x_2^{a'_2} \cdots x_n^{a'_n}$ hervorgehen, indem die Exponenten allen Permutationen unterworfen werden, wobei das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, je nachdem die Permutation der geraden oder ungeraden Klasse angehört, stellt eine *alternirende* Function von $x_1, \ldots x_n$ dar. Wir wollen die in dieser Weise den Gruppen α entsprechenden alternirenden Functionen $S'(\alpha)$ als *einfache alternirende Functionen* bezeichnen. Dann ist leicht zu sehen, dafs jede alternirende Function sich, und zwar nur auf eine Weise, linear und homogen durch einfache alternirende Functionen ausdrücken läfst. Bezeichnet ferner D das Differenzenproduct von $x_1, \ldots x_n$, und wird die symmetrische Function $S(\alpha) = \frac{S'(\alpha)}{D}$ als *einfach symmetrische Function* bezeichnet, so ist klar, dafs sich jede symmetrische Function, und zwar nur auf eine Weise, linear durch einfache symmetrische Functionen ausdrücken läfst. Wenn man nun das Product $S(\alpha) \cdot S(\beta)$ zweier einfachen symmetrischen Functionen linear durch einfache symmetrische Functionen ausdrückt, so ergiebt sich das merkwürdige Resultat:

$$S(\alpha) \cdot S(\beta) = \sum h(\gamma;\ \alpha,\ \beta) \cdot S(\gamma),$$

wo die Summe sich über diejenigen Gruppen γ erstreckt, deren Rang $\leqq n$ ist, und die Coefficienten $h(\gamma;\ \alpha, \beta)$ die oben angegebene

Bedeutung haben. Hiernach käme alles darauf an zu entscheiden, welche Coefficienten in der Entwickelung von $S(\alpha)\cdot S(\beta) > 0$ ausfallen. Ob dadurch die Beantwortung unserer Frage erleichtert wird, bleibt freilich dahingestellt. Bisher ist mir selbst der Nachweis, daſs in der Entwickelung von $S(\alpha)\cdot S(\beta)$ niemals negative Coefficienten auftreten können, nicht anders möglich gewesen als auf dem Umwege über die Theorie der *Abel'schen* Gruppen.

Singuläre bilineare Formen und Relationen zwischen Unterdeterminanten.

Von **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. Pr.

Durch Weiterführung des üblichen Eliminationsverfahrens, das dazu dient, eine allgemeine quadratische Gleichung

$$f_2(x_1,\ x_2,\ldots,x_n) = 0$$

in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in den dualistischen Variablen

$$u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n$$

darzustellen, gelangt man auf elementarem Wege zu der kanonischen Darstellung der singulären bilinearen und quadratischen Formen, und überdies zu eigenartigen Beziehungen zwischen den Minoren einer Determinante resp. Matrix.

Die Darstellung der singulären Formen erscheint hierbei als Corollar zu einer Reihe allgemeinerer Identitäten*); für die Untersuchung der Beziehungen zwischen den Minoren einer Matrix ist umgekehrt die Einführung der zugehörigen bilinearen Formen als ein Beweisprinzip anzusehen.

Das gemeinte Verfahren soll zunächst für eine quadratische Form f in drei homogenen Variablen $x_1,\ x_2,\ x_3$:

$$(1)\qquad f = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3} a_{ik}\,x_i\,x_k;\quad (a_{ik} = a_{ki})$$

auseinandergesetzt werden.

Nach dem Euler'schen Satze ist f als bilineare Form der x und der (halben) Ableitungen f_i von f darstellbar:

---

*) Man vergleiche auch die nachfolgende Note des Verfassers über den Pascal'schen Satz.

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 \\ f_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ f_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ f_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3. \end{aligned}\right.$$

Umgekehrt ist f durch die Festsetzungen (2) (und $a_{ik} = a_{ki}$) definirt.

Eliminirt man erstens aus (2) alle x, so entsteht:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_2 & f \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn A die Determinante $|a_{ik}|$ bedeutet, α_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik}:

$$(\mathrm{I})\qquad -fA \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma\Sigma f_i f_k \alpha_{ik}.$$

Die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ stellt einen Kegelschnitt C_2 dar; die f_i sind den Liniencoordinaten u_i der Tangente im Punkte (x) der C_2 proportional, und (I) liefert die Gleichung der C_2 in Liniencoordinaten: $\Sigma\Sigma u_i u_k \alpha_{ik} = 0$. Das gilt zunächst nur für $A \neq 0$: ersetzt man aber von vornherein in (2) f durch den Wert Null, so ist das Resultat (3) der Elimination (mit $f = 0$) unabhängig vom Werte von A. Das letztere speciellere Verfahren ist das übliche.

Es sei jetzt $A = 0$, aber einer der ersten Minoren, etwa $\alpha_{33} \neq 0$. Will man dann zeigen, dafs f in ein Produkt von zwei (ungleichen) Linearfactoren zerfällt, so kann man so vorgehen. Da vermöge $A = 0$ zwischen den f_i eine lineare Identität besteht, so läfst sich f_3 linear durch f_1 und f_2 ausdrücken; andererseits kann man aus den Gleichungen (2) für f, f_1, f_2 die Gröfsen x_1, x_2 eliminiren: f erscheint so als eine quadratische Form in f_1, f_2, x_3, aus der aber thatsächlich x_3 herausfallen mufs.

Der Kern dieses Eliminationsverfahrens tritt aber schärfer hervor, wenn man von den beiden genannten Processen nur den letzteren, d. i. die Elimination von x_1, x_2, beibehält und zugleich über die Werte von A und von α_{33} noch gar keine Voraussetzung trifft.

Demnach eliminire man aus einem Teil der Gleichungen (2), nämlich aus den drei ersten, einen Teil der x, nämlich x_1, x_2, so kommt:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & f_1 - a_{13}x_3 \\ a_{21} & a_{22} & f_2 - a_{23}x_3 \\ f_1 & f_2 & f - f_3 x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder durch Ausführung:

$$(\text{II})\ \alpha_{33} f \equiv - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} + x_3^2 A \equiv (f_1^2 a_{22} - 2 f_1 f_2 a_{12} + f_2^2 a_{11}) + x_3^2 A.$$

Diese Identität (II) gilt für alle Werte der a_{ik}. Läfst man jetzt a posteriori die Bedingung $A = 0$ eintreten, während $\alpha_{33} \neq 0$ sei, so specialisirt sich (II) zu:

$$(\text{II}')\qquad \alpha_{33} f \equiv f_1^2 a_{22} - 2 f_1 f_2 a_{12} + f_2^2 a_{11}\quad (A = 0),$$

zerfällt also in ein Product von zwei, in den f_1, f_2 und damit in den x_1, x_2, x_3 linearen Factoren*).

Die Annahme $\alpha_{33} \neq 0$ repräsentirt nur den einen Typus von mindestens einem nicht verschwindenden ersten Minor: der zweite Typus wird etwa durch $\alpha_{13} \neq 0$ charakterisirt. Dann eliminire man entsprechend x_2, x_3 aus den Gleichungen (2) für f, f_1, f_2 und erhält nach geeigneter Ausführung:

$$(\text{IIa})\qquad f\alpha_{13} \equiv \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{22} & a_{23} & f_2 \\ f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} + x_1 x_3 A.$$

Ist jetzt $A = 0$, $\alpha_{13} \neq 0$, so erscheint f zuvörderst als quadratische Form in f_1, f_2, f_3; da aber zwischen f_1, f_2, f_3 eine lineare Identität besteht:

$$(5)\qquad f_1 \alpha_{31} + f_2 \alpha_{32} + f_3 \alpha_{33} \equiv f_1 \alpha_{11} + f_2 \alpha_{21} + f_3 \alpha_{31} = 0,$$

so kann man entweder f_1 durch f_2, f_3, oder aber f_3 durch f_1, f_2 ausdrücken; dann geht f in eine quadratische Form von f_2, f_3 resp. f_1, f_2 allein über. Dies gilt auch noch, wenn f_1 resp. f_3 identisch verschwindet. Der nächste Schritt führt zu dem Falle, wo zwar alle ersten Minoren von A verschwinden, nicht aber alle zweiten, d. h. nicht alle a_{ik}. Man wird wieder zwei Typen $a_{11} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$ trennen.

*) Dafs umgekehrt, wenn f in ein Product $u_x v_x$ von Linearfactoren zerfällt, $A = 0$ ist, zeigt man in üblicher Weise, indem man die f_i bildet und aus ihnen u, v eliminirt.

Um zu den correspondirenden Identitäten zu gelangen, eliminire man im ersten Falle x_1 aus den Gleichungen (2) für f, f_1 und findet die für alle a_{ik} gültige Identität:

$$\text{(III)} \qquad f a_{11} \equiv f_1^2 - (x_2^2 \alpha_{33} - 2 x_2 x_3 \alpha_{23} + x_3^2 \alpha_{22}).$$

Sind jetzt im Besonderen alle $\alpha_{ik} = 0$, $a_{11} \neq 0$, so reducirt sich f auf das Quadrat einer Linearform*).

Der zweite Typus, $a_{13} \neq 0$, wird analog durch Elimination von x_3 aus f, f_1 erledigt und führt zunächst zu der Identität:

$$\text{(III}'\text{)} \quad f a_{13} \equiv f_1 f_3 + x_1 x_3 \alpha_{22} - x_2 (x_1 \alpha_{23} - x_2 \alpha_{13} + x_3 \alpha_{12}).$$

Sind also speciell alle $\alpha_{ik} = 0$, $a_{13} \neq 0$, so erscheint f zunächst als Product der beiden Linearfactoren $f_1 f_3$; da aber vermöge der getroffenen Voraussetzungen f_3 proportional mit f_1, so geht damit f in ein volles Quadrat über.

Man bemerkt zugleich, dafs, wenn im Falle (III) auch nur $\alpha_{33} = \alpha_{23} = \alpha_{22} = 0$, $a_{11} \neq 0$, f sich bereits auf ein Quadrat reducirt; da aber dann alle α_{ik} verschwinden, so folgt aus dem Verschwinden jener drei α bei $a_{11} \neq 0$ das der übrigen, bei $a_{11} = 0$ dagegen nur, dafs $f_1 \equiv 0$, d. h., dafs auch noch $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$.

Die analoge Bemerkung gilt im Falle (III′) vorerst nur insoweit, dafs für $\alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{12} = 0$ f zum Producte $f_1 f_3$ wird. Aus den Ausdrücken (2) für f_1, f_3 folgt aber sofort durch Multiplication mit resp. a_{33}, a_{13} und Subtraction, dafs $f_1 a_{33} = f_3 a_{13}$, womit f in ein Quadrat übergeht. Mithin hat hier das Verschwinden jener vier α bei $a_{13} \neq 0$ das der übrigen zur Folge, dagegen bei $a_{13} = 0$ nur, dafs entweder $f_1 \equiv 0$, oder dafs $f_3 \equiv 0$. Überblickt man die bisherigen Entwickelungen, so erkennt man als das Wesentliche zweierlei; einmal das Princip der teilweisen Elimination der x aus einem Teile der Gleichungen (2), andererseits das gleichzeitige Operiren mit zwei Variablenreihen (den x und den f).

Das Verfahren gewinnt an Übersichtlichkeit, wenn man von der Symmetrie der a_{ik} absieht und somit bilineare Formen von zwei Variablentripeln x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 zu Grunde legt. Es hat aber auch keine principielle Schwierigkeit, gleich zu dem allgemeinen Falle von n Variablen überzugehen:

---

*) Umgekehrt, wenn $f = u_x^2$, so folgt sofort in üblicher Weise durch Bildung der f_i und Elimination von u, dafs für beide Typen alle α_{ik} verschwinden.

$$(6)\begin{cases} f = x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n) & = y_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n) \\ + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n) & + y_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n) \\ + \vdots & + \vdots \\ + x_n(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n) & + y_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \\ = x_1\varphi_1(y) + x_2\varphi_2(y) + \cdots + x_n\varphi_n(y) & = y_1\psi_1(x) + y_2\psi_2(x) + \cdots + y_n\psi_n(x). \end{cases}$$

Dann läßt sich (6) ersetzen durch das Gleichungssystem:

$$(7)\qquad \begin{cases} f = \varphi_1(y)x_1 + \varphi_2(y)x_2 + \cdots + \varphi_n(y)x_n \\ \psi_1(x) = a_{11}\ x_1 + a_{21}\ x_2 + \cdots + a_{n1}\ x_n \\ \psi_2(x) = a_{12}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{n2}\ x_n \\ \vdots \\ \psi_n(x) = a_{1n}\ x_1 + a_{2n}\ x_2 + \cdots + a_{nn}\ x_n, \end{cases}$$

resp. durch das daraus durch Vertauschung von $\varphi_i(y)$ mit $\psi_i(x)$, y_i mit x_i, a_{ik} mit a_{ki} entstehende.

Um zu der für alle Werte der a_{ik} gültigen Identität zu gelangen, die dem Falle übergeordnet ist, wo A vom Range $n-r-1$ ist, d. i. alle $(n-r)$-reihigen Minoren von $A = |a_{ik}|$ verschwinden, während wenigstens einer der $(n-r-1)$-reihigen Minoren von Null verschieden ist, verfahre man so:

Durch geeignete Anordnung der Variablen x, y läßt sich stets erreichen, daß der nicht verschwindende $(n-r-1)$-reihige Minor M'_{n-r-1} aus den $n-r-1$ ersten Horizontal- und Verticalreihen von A herausgeschnitten ist:

$$(8)\quad M'_{n-r-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-r-1,\,n-r-1} \end{vmatrix}.$$

Die durch Ränderung von M'_{n-r-1} mit den $n-r-1$ ersten φ, ψ hervorgehende $(n-r)$-reihige Determinante sei P_{n-r}:

$$(9)\qquad P_{n-r} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \psi_1 \\ & a_{22} & & & \psi_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-r-1,\,n-r-1} & \psi_{n-r-1} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_{n-r-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Andererseits sei irgend einer der $(r+1)^2$ $(n-r)$-reihigen Minoren von A, die M'_{n-r-1} „als Kern enthalten“, d. h. der aus M'_{n-r-1} durch Ränderung mit den entsprechenden Elementen einer

ϱ^{ten} Verticale und einer σ^{ten} Horizontale aus A entsteht, mit $M_{n-r}^{(\varrho,\,\sigma)}$ $(\varrho,\ \sigma = n - r,\ n - r + 1, \ldots n)$ bezeichnet:

$$(10)\qquad M_{n-r}^{(\varrho,\,\sigma)} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & a_{\varrho 1} \\ & a_{22} & & & a_{\varrho 2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-r-1,\,n-r-1} & a_{\varrho,\,n-r-1} \\ a_{1\sigma} & a_{2\sigma} & \ldots & a_{n-r-1,\,\sigma} & a_{\varrho\sigma} \end{vmatrix}.$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (7) für $f,\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots \psi_{n-r-1}$ die Gröfsen $x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-r-1}$, so resultirt nach Anwendung der einfachsten Determinantensätze die für alle Werte der a_{ik} gültige Identität $(\varrho,\ \sigma = n - r,\ n - r + 1, \ldots, n)$:

$$\text{(IV)}\qquad \boxed{f M'_{n-r-1} \equiv - P_{n-r} + \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} x_\varrho y_\sigma M_{n-r}^{(\varrho,\,\sigma)}.}$$

Dadurch ist die mit dem $(n - r - 1)$-reihigen Minor M'_{n-r-1} (8) multiplicirte Bilinearform f (6) in zwei Teilformen zerlegt, deren erste $- P_{n-r}$ (9) eine Bilinearform der $n - r - 1$ ersten Paare von Variablen $\varphi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\psi_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}$ ist, und deren Coeffizienten die ersten Unterdeterminanten von M'_{n-r-1} sind, während die zweite Teilform eine Bilinearform der $r + 1$ Paare der ursprünglichen Variablen $x_\varrho,\ y_\sigma$ mit den $r + 1$ Restindices $\varrho,\ \sigma = n - r,\ n - r + 1, \ldots, n$ ist, und deren Coeffizienten gerade die, M_{n-r-1} als Kern enthaltenden $(n - r)$-reihigen Minoren $M_{n-r}^{(\varrho,\,\sigma)}$ (10) von A sind.

Aus der Identität (IV) gehen die beiden folgenden Hauptsätze für singuläre Bilinearformen einerseits, und für die Minoren einer Determinante andererseits hervor:

(V) „Ist M'_{n-r-1} (8) ein nicht verschwindender $(n-r-1)$-reihiger Minor einer n-reihigen Determinante $A = |a_{ik}|$, und verschwinden von den $(n - r)$-reihigen Minoren von A alle die, die aus M'_{n-r-1} durch Ränderung mit Elementen von A hervorgehen, so specialisirt sich die Identität (IV) zu:

$$\text{(IV}'\text{)}\qquad f M'_{n-r-1} \equiv - P_{n-r},$$

womit die Bilinearform

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} x_i\, \varphi_i(y) = \sum_{k=1}^{k=n} y_k\, \psi_k(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, x_i\, y_k$$

als Bilinearform $- P_{n-r}$ (9) der zwei Variablenreihen $\varphi_u = \frac{\partial f}{\partial x_u}$, $\psi_v = \frac{\partial f}{\partial y_v}$ $(u, v = 1, 2 \ldots, n - r - 1)$ dargestellt ist."

(VIa) „Ist wiederum M_{n-r-1} (8) ein nicht verschwindender $(n-r-1)$-reihiger Minor einer n-reihigen Determinante $A = |a_{ik}|$, und verschwinden von den $(n-r)$-reihigen Minoren von A alle die, die aus M'_{n-r-1} durch Ränderung mit Elementen von A hervorgehen, so verschwinden auch alle übrigen $(n-r)$-reihigen Minoren von A."

(VIb) „Ist dagegen M'_{n-r-1} selbst Null, während zugleich alle aus M'_{n-r-1} durch Ränderung mit Elementen von A entstehenden $(n-r)$-reihigen Minoren von A verschwinden, so versagt der Schlufs des Satzes (VIa) und es tritt dafür der Complex von Möglichkeiten*) ein, der durch das in den x, y identische Verschwinden der Bilinearform P_{n-r} (9) zusammengefafst ist."

Die vorstehenden Entwickelungen sind auch auf Bilinearformen mit zwei Reihen von ungleich vielen Variablen resp. auf beliebige Matrices ausdehnbar.

Ueber geometrische Sätze von der Natur des Pascal'schen Satzes.

Von **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. Pr.

Man pflegt einen Satz dadurch zu verallgemeinern, dafs man von den, dem Satze zu Grunde liegenden Bedingungen die eine oder die andere oder mehrere zugleich fallen läfst. Man kann aber auch umgekehrt, und mit besonderem Vorteil in der Geometrie, aus einer derartigen geeigneten Verallgemeinerung ein Princip des Beweises für den ursprünglichen Satz herleiten.

In diesem Sinne wird im Folgenden eine zusammenhängende Reihe von Sätzen behandelt, die von dem gewöhnlichen Pascal'schen (resp. Brianchon'schen) Satze für Kegelschnitte ausgehen. Die einfachen Grundgedanken finden sich vereinzelt und in specieller Form bereits bei älteren Geometern, wie Carnot, Poncelet, Gergonne, Chasles u. A. Das Charakteristische des Beweisverfahrens ist stets, dafs zunächst jeweils eine dem fraglichen Satze „übergeordnete" Identität aufgestellt wird**), durch deren passende Specialisirung

*) Es können z. B. alle ersten Minoren von M'_{n-r-1} verschwinden, oder es findet zwischen den φ_u resp. ψ_v eine lineare Identität statt u. A.

**) Man vergleiche auch die vorstehende Note des Verfassers über singuläre bilineare Formen.

der Satz selbst hervorgeht. Es wird sich empfehlen, den in dem gemeinten Sinne geführten Beweis des Pascal'schen Satzes nebst einigen ganz elementaren Hülfssätzen vorauszuschicken.

1. Es sei in der Ebene ein Coordinatendreieck $A_1 A_2 A_3$ mit den Seiten $x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ zu Grunde gelegt. Ein Punkt auf der Seite $x_i = 0$ ist durch seine „Coordinate" $\frac{x_k}{x_l} = x_{kl}$ $\left(\text{oder auch durch } \frac{x_l}{x_k} = x_{lk}\right)$ bestimmt und kann kurz als „Punkt x_{kl}" bezeichnet werden; dualistisch ein „Strahl u_{kl}" durch die Ecke A_i durch seine „Coordinate" $u_{kl} = \frac{u_k}{u_l}$ $\left(\text{oder auch } u_{lk} = \frac{u_l}{u_k}\right)$. Ein Punkt x_{kl} liegt dann und nur dann auf einem Strahle u_{lk}, wenn

$$(1) \qquad x_k u_k + x_l u_l = 0,$$

d. h. wenn $x_{kl} = - u_{lk}$. Das Kriterium dafür, daſs drei Punkte x_{12}, x_{23}, x_{31}, durch die bezw. die drei Strahlen u_{12}, u_{23}, u_{31} laufen, auf einer Geraden liegen, läſst sich in jeder der beiden Formen:

$$(\text{Ia}) \qquad x_{12}\, x_{23}\, x_{31} = -1,$$

$$(\text{Ib}) \qquad u_{12}\, u_{23}\, u_{31} = +1$$

darstellen, und analog das dazu dualistische Kriterium.

2. Liegt jetzt ein beliebiges Sechseck 123456 vor, so wähle man etwa die Geraden $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$ zu Seiten des Coordinatendreiecks. Die 6 Punkte lassen sich dann mit x_{ik}, x'_{ik} $(i, k$ cyklisch $= 1, 2, 3)$ bezeichnen; es wird vorausgesetzt, dass keiner von ihnen mit einer Ecke A coinzidirt, d. h. daſs keiner der 6 Werte x_{ik}, x'_{ik} Null oder Unendlich sei*). Man verbinde die 6 Punkte nach dem „Pascal'schen Princip" durch Gerade, d. h. man verbinde, cyklisch fortschreitend, etwa x_{12} mit x'_{23}, x_{23} mit x'_{31}, x_{31} mit x'_{12}; der jeweilige Schnittpunkt mit der letzten Dreiecksseite sei resp. z_{31}, z_{12}, z_{23}. Multiplicirt man die drei, den drei Verbindungsgeraden correspondirenden Formeln (Ia), so ergiebt sich, wenn X das Product aller x_{ik}, x'_{ik}, Z das Product der drei z_{ik} bedeutet:

$$(\text{II}) \qquad XZ = -1 \quad (\text{„Pascal'sche Identität"}).$$

Der in (II) liegende Satz für ein beliebiges Sechseck der Ebene läſst sich offenbar auch rein geometrisch formuliren.

*) Die entsprechende Voraussetzung gilt auch in allen folgenden Fällen.

„Im Besonderen*) folgert man aus (II), dafs für ein Sechseck die beiden Eigenschaften $X = 1$, $Z = -1$ sich gegenseitig bedingen.“

3. Andererseits liege ein Punktkegelschnitt C_2

$$\Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \tag{2}$$

vor, der durch keine Coordinatenecke A gehe. C_2 schneidet die 3 Coordinatenseiten in 3 Punktepaaren, deren bez. Coordinaten x_{ik}, x'_{ik} die Wurzeln der drei quadratischen Gleichungen sind:

$$a_{ii} x_i^2 + 2 a_{ik} x_i x_k + a_{kk} x_k^2 = 0 \tag{3}$$

$$(i, k \text{ cyklisch} = 1, 2, 3).$$

Die Multiplication der 3 Formeln:

$$x_{ik} \cdot x'_{ik} = \frac{a_{kk}}{a_{ii}}$$

liefert für das Product X aller x_{ik}, x'_{ik}:

$$X = +1. \tag{III}$$

Sind umgekehrt auf den Seiten $x_i = 0$ drei beliebige Paare von Punkten x_{ik}, x'_{ik} $(\neq 0, \infty)$ vermöge dreier quadratischer Gleichungen gegeben, so lassen sich die letzteren dann, und nur dann, wenn die Bedingung (III) erfüllt ist, auf die kanonische Form 3) bringen. Es beruht das auf dem trivialen Hülfssatze, dafs drei**) Gröfsen $(\neq 0, \infty)$, deren Product gleich Eins ist, sich stets in der Form $\frac{a_{22}}{a_{11}}$, $\frac{a_{33}}{a_{22}}$, $\frac{a_{11}}{a_{33}}$ ansetzen lassen. „Mithin ist (III) das Kriterium dafür, dafs drei Punktepaare x_{ik}, x'_{ik} auf den Coordinatenseiten einer C_2 angehören.“

4. Das Sechseck **123456** der Nr. 2 mit seinem Coordinatendreieck $A_1 A_2 A_3$, und das Coordinatendreieck $A_1 A_2 A_3$ der Nr. 3 mit seinen 3 Punktepaaren x_{ik}, x'_{ik} sind identische Figuren. D a h e r w i r d d u r c h C o m b i n i r u n g d e r d r e i F o r m e l n (Ia), (II), (III) d e r P a s c a l ' s c h e S a t z n e b s t s e i n e r U m k e h r u n g i n E v i d e n z g e s e t z t. Denn liegen die 3 Punktepaare x_{ik}, x'_{ik} eines Sechseckes auf einer C_2, so ist nach (III) $X = 1$, also nach (II) $Z = -1$, mit-

*) Auf andere Fälle z. B. $X = -1$, $Z = 1$, die auch ein geometrisches Interesse haben, gehen wir nicht ein.

**) Das Entsprechende gilt für n Grössen. Ist bei ungeradem n das Product gleich -1, so erhalten die Quotienten $\frac{a_{ii}}{a_{kk}}$ das negative Vorzeichen.

hin liegen nach (Ia) die Schnittpunkte entsprechender Gegenseiten auf einer Geraden C_1 (der „Pascal'schen Geraden").

Genau so geht auf dem umgekehrten Wege die Umkehrung von Statten. Das Dualistische versteht sich von selbst.

5. Verbindet man 3 beliebige Punktepaare x_{ik}, x'_{ik} mit den Gegenecken A_l, so erhält man 3 Strahlenpaare u_{ik}, u'_{ik}: das genau nach dem Muster von X in cyklischer Anordnung gebildete Product der u_{ik}, u'_{ik} sei U. Dann folgt aus 1) für ein beliebiges Sechseck sofort die Identität:

$$XU = 1. \tag{IV}$$

Also bedingen sich im Besonderen wiederum die Eigenschaften $X = 1$, $U = 1$ gegenseitig, d. i. aber der Inhalt des (Carnot'schen) Satzes: „Die 3 Paare von Transversalen, die von den Ecken eines Dreiecks ausgehend aus den Gegenseiten 3 Punktepaare einer C_2 ausschneiden, sind Tangenten eines Klassenkegelschnitts K_2, und umgekehrt."

Ist (1) die Gleichung der C_2, und bildet man für jedes Wertepaar u_{ik}, u'_{ik} Summe und Product, so erhält man sofort als Gleichung der K_2:

$$\sum_i \frac{1}{a_{ii}} u^2_i - \sum_i \sum_k \frac{a_{ik}}{a_{ii} a_{kk}} u_i u_k \, (i \neq k) = 0. \tag{4}$$

6. Die Entwickelungen der Nrn. 2, 3, 4, 5 sind ohne Weiteres auf Curven n^{ter} Ordnung C_n resp. n^{ter} Klasse K_n übertragbar. Beginnen wir mit Nr. 3, so schneide jetzt eine C_n:

$$a_{11} x_1^n + a_{22} x_2^n + a_{33} x_3^n + \cdots = 0, \tag{2'}$$

die durch keine Ecke A gehe, in 3 Punkt-n-tupeln, deren bezw. Coordinaten x_{ik}, $x'_{ik} \ldots x_{ik}^{(n-1)}$ die Wurzeln der aus (2′) für $x_l = 0$ hervorgehenden Gleichungen sind:

$$a_{ii} x_i^n + \cdots + a_{kk} x_k^n = 0 \quad (i,\, k \text{ cyklisch} = 1,\, 2,\, 3). \tag{3'}$$

Dann gilt für das Product X der $3n$ Werte $x_{ik}, \ldots x_{ik}^{(n-1)}$:

$$X = (-1)^n, \tag{III'}$$

und entspr. dualistisch. Und umgekehrt lassen sich dann und nur dann, wenn (III′) erfüllt ist, die 3 Gleichungen für 3 Punkt-n-tupel $x_{ik}, \ldots x_{ik}^{(n-1)}$ auf die Form (3′) bringen. Mithin ist (III′) das Kriterium dafür, dass 3 Punkt-n-tupel auf den Coordinatenseiten auf einer „eigentlichen" C_n (sc. die nicht das Coordinatendreiseit als Bestandteil enthält) liegen. Entsprechend dualistisch.

An die Stelle der Identität (IV) der Nr. 5 tritt sofort die folgende

(IV') $$X\,U = (-1)^n,$$

wo X, U jetzt die erweiterte Bedeutung haben, dafs die Punkte- und Strahlenpaare dort durch Punkt- und Strahlen-n-tupel zu ersetzen sind.

Indem nunmehr unter Berücksichtigung des Vorzeichens der rechten Seite (von III') die Schlüsse der Nr. 4 auf den Fall übertragen werden, wo an Stelle des Kegelschnitts eine C_{2n}, und an Stelle der Pascal'schen Geraden C_1 eine „Pascal'sche C_n" tritt, ergiebt sich der:

A. Pascal'sche Satz für C_{2n}. „Auf den Seiten eines Dreiecks seien 3 Paare von Punkt-n-tupeln P_l, Q_l ($l = 1, 2, 3$) gelegen. Man verbinde nach dem Pascal'schen Princip die 6 Punkt-n-tupel durch 3 C_n, also etwa P_1 mit Q_2, P_2 mit Q_3, P_3 mit Q_1, so erhält man auf der jeweiligen letzten Seite ein Rest-n-tupel R_l ($l = 3, 1, 2$).

Liegen dann die 2. 3 Punkt-n-tupel P_l, Q_l auf einer eigentlichen C_{2n}, so auch die 3 Rest-n-tupel R_l auf einer eigentlichen C_n und umgekehrt. Entsprechend dualistisch."

Andererseits liefert die Combinirung der Identitäten (III'), (IV') die Erweiterung des Satzes der Nr. 5:

B. „Auf den Seiten eines Dreiecks seien 3 Punkt-n-tupel P_l ($=1, 2, 3$) gelegen. Man projicire sie von den bez. Gegenecken aus durch 3 Strahlen-n-tupel Π_l. Gehören dann die P_l einer C_n an, so auch die Π_l einer K_n (und umgekehrt), *oder nicht*, je nachdem n gerade oder ungerade ist."

7. Ohne uns mit der Aufstellung ähnlicher Sätze für Vierecke etc. aufzuhalten, gehen wir dazu über, analoge Entwickelungen für den Raum, und weiterhin für den Raum von d Dimensionen vorzunehmen. Die nächstliegende Erweiterung erstreckt sich auf ein windschiefes Viereck. Das Coordinatentetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ läfst sich in 3 solche Vierecke: $\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$, $\overline{A_1 A_3 A_4 A_2}$, $\overline{A_1 A_4 A_2 A_3}$ zerlegen, von denen man etwa das erste herausgreife.

Während die Beziehung (1) erhalten bleibt, gehen (Ia), (Ib) über in:

(I'a) $x_{12}\, x_{23}\, x_{34}\, x_{41} = +1$, (I'b) $u_{12}\, u_{23}\, u_{34}\, u_{41} = +1$,

d. i. das Kriterium, dafs 4 Punkte auf den Kanten auf einer Ebene liegen resp. 4 Ebenen durch die Kanten sich in einem Punkte treffen.

Hat man auf jeder Kante des Vierecks ein Tripel von Punkten x_{ik}, x'_{ik}, x''_{ik}, und verbindet sie nach dem Pascal'schen Princip durch 4 Ebenen, also etwa:

$$(x_{12}, x'_{23}, x''_{34}), \quad (x_{23}, x'_{34}, x''_{41}), \quad (x_{34}, x'_{41}, x''_{12}), \quad (x_{41}, x'_{12}, x''_{23}),$$

so schneiden diese auf der jeweiligen Restkante je einen Restpunkt z_{ik} aus. Die Multiplication der 4 entsprechenden Formeln (I'a) führt, wenn X das Produkt aller x, Z das aller z bedeutet, zum Analogon von (II):

$$\text{(II')} \qquad XZ = +1.$$

Die nach dem Muster der Nr. 3 gebildete Entwickelung ergiebt jetzt:

$$\text{(III'')} \qquad X = +1$$

als Kriterium dafür, dafs die 3. 4 Punkte x auf einer eigentlichen Fläche dritter Ordnung F_3 liegen. Die Nachbildung der Nr. 4 liefert den Pascal'schen Satz*) für F_3. „Liegt auf jeder Kante eines windschiefen Vierecks ein Punktetripel, und verbindet man diese 12 Punkte nach dem Pascal'schen Princip durch 4 Ebenen, die dann 4 Restpunkte ausschneiden, so liegen die 12 Punkte dann und nur dann auf einer eigentlichen F_3, wenn die 4 Restpunkte auf einer Ebene liegen."

Die Identität (IV) der Nr. 5 bleibt bei erweiterter Bedeutung von X und U bestehen und ergiebt den Satz: „Liegen die 12 Punkte des vorigen Satzes auf einer F_3, so gehören die 12 Ebenen, die jeden Punkt mit der bez. Gegenkante verbinden, einer Fläche 3. Klasse Φ_3 an, und umgekehrt."

Ebenso lassen die beiden Identitäten (III'), (IV') der Nr. 6 sofort die Erweiterung zu:

$$\text{(III')} \qquad X = +1, \qquad \text{(IV'')} \; XU = +1,$$

und damit übertragen sich die beiden vorigen Sätze, analog A. und B. auf eine F_{3n} und ihre „Pascal'sche" F_n, andererseits auf eine F_n und Φ_n, wo im letzteren Falle n sowohl gerade als ungerade sein kann.

Man erkennt, wie sich die bisherigen Betrachtungen auf den Raum von d Dimensionen ausdehnen; es ist nur der Exponent n in (III') und (IV') durch $(d-1)n$ zu ersetzen.

---

*) Ein analoger Satz gilt für F_2, indem man immer nur je 2 Punkte x_{ik}, x'_{kl} durch eine beliebige Ebene verbindet, und die beiden Restpunkte in Betracht zieht. Entsprechend allgemein für eine F_{2n}.

Aus dem Pascal'schen Satze für F_3 leitet man wieder einen entsprechenden Satz für Raumcurven 3. Ordnung C_3 her, indem man die C_3 von A_i $(i=1, 2, 3, 4)$ auf die Gegenebene $\overline{A_k A_l A_m}$ vermöge eines Kegels 3. Ordnung projicirt und auf diesen den Pascal'schen Satz für F_3 anwendet.

8. Tiefer greifen die Untersuchungen ein, die sich gleichzeitig auf alle 3 windschiefen Vierecke des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ beziehen, andererseits auf die 4 Ebenen des Tetraeders, und endlich auf das ganze Tetraeder selbst.

Wir wählen hier als interessantesten Specialfall die Flächen 2. Ordnung F_2; es ist leicht zu sehen, wie sich die Ergebnisse auf F_{2n} resp. F_n ausdehnen lassen.

Die 6 Punktepaare x_{ik}, x'_{ik}, die eine F_2:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=4}\sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_i x_k = 0$$

aus den Kanten des Coordinatentetraeders ausschneidet, sind gegeben durch

$$(6) \qquad x_i^2 a_{ii} + 2 x_i x_k a_{ik} + x_k^2 a_{kk} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Sei $p_{ik} = x_{ik} \cdot x'_{ik} = \frac{1}{p_{ki}}$, so hat man gemäfs (III) und (III''):

$$(7) \quad \Delta_1 \equiv p_{23} p_{34} p_{42} = 1, \quad \Delta_2 \equiv p_{43} p_{31} p_{14} = 1, \quad \Delta_3 \equiv p_{12} p_{24} p_{41} = 1,$$
$$\Delta_4 \equiv p_{13} p_{32} p_{21} = 1,$$

$$(8) \qquad M_{12} \equiv p_{14} p_{42} p_{23} p_{31} = 1, \quad M_{13} \equiv p_{12} p_{23} p_{34} p_{41} = 1,$$
$$M_{14} \equiv p_{13} p_{34} p_{42} p_{21} = 1.$$

Bildet man andererseits für 6 beliebige Wertepaare x_{ik}, x_{ik}' die linken Seiten der Gleichungen (7), (8), so gelten die Identitäten:

$$(\mathrm{V}) \quad \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \equiv 1; \quad M_{12} \equiv \Delta_1 \Delta_2, \quad M_{13} \equiv \Delta_1 \Delta_3, \quad M_{14} \equiv \Delta_1 \Delta_4.$$

Sind also drei der Δ gleich $+1$, so auch das vierte, und damit jedes $M=+1$, und sind drei der Δ gleich -1, so auch das vierte, und dann ist ebenfalls jedes $M=+1$. Umgekehrt, wenn jedes $M=+1$, so ist entweder jedes $\Delta=+1$, oder aber jedes $\Delta=-1$. Das heifst geometrisch:

C. „Wenn von 6 Punktepaaren auf den Kanten eines Tetraeders T dreimal die 3 Punktepaare einer Ebene von T einer C_2 angehören, so auch das vierte mal, und die 4 C_2 gehören einer F_2 an. Wenn andererseits die 4 Punktepaare auf jedem der 3 windschiefen Vierecke von T einer

eigentlichen F_2 angehören, so liegen entweder alle 6 Punktepaare auf einer F_2, oder aber es liegen die 6, auf den Kanten von T zu dem bez. Punktepaare und dem Paar der Endpunkte harmonischen Punktepaare auf einer F_2.

Da aber die Identitäten (V) gültig bleiben, wenn die p_{ik} die Producte von 6 beliebigen Werte-n-tupeln bedeuten, und bei ungeradem n die Vorzeichen $\pm$ von 1 bez. der Δ nur ihre Rolle vertauschen, „so gilt auch der Satz C. ohne weiteres, wenn die darin auftretenden Punktepaare resp. durch Punkt-n-tupel ersetzt werden."

Dem Obigen entnimmt man auch sofort die Ausdehnung des Satzes B. der Nr. 7 für ein gerades n auf das ganze Tetraeder:

D. „Gehören 6 Punkte-$2n$-tupel auf den Kanten eines Tetraeders einer F_{2n} an, so auch die 6 Ebenen-$2n$-tupel, die die Punkte-$2n$-tupel mit der bez. Gegenkante verbinden, einer Φ_{2n}, und umgekehrt."

9. Zu einer andersgearteten Ausdehnung der Nr. 7 auf das ganze Tetraeder T gelangt man auf Grund wiederholter Anwendung von (Ia) und des bisher befolgten Multiplicationsprincips, wenn man die Ebenen von T den gegenüberliegenden Dreikanten zuordnet:

E. „Schneidet man jedes der 4 Dreikante eines Tetraeders T mit einer Ebene E_i, so treffen diese 4 Ebenen E_i die bez. Gegenebenen von T dann und nur dann in 4 Geraden einer F_2, wenn die durch die 4 Ebenen E auf den 4 Dreikanten erzeugten 3. 4 Schnittpunkte einer F_2 angehören, und entsprechend dualistisch."

Dieser Satz von Chasles ist auf Grund von (III'') sofort ausdehnbar auf den Fall, wo die Ebenen E durch F_n, die F_2 durch F_{2n} ersetzt werden.

Desgleichen vollzieht sich mit den bisherigen Mitteln die Ausdehnung auf den Raum von d Dimensionen. Wir führen etwa den den Fällen $d = 4$, $n = 1$ entsprechenden Satz an:

E. Schneidet man im Raume von 4 Dimensionen jedes der 5 „Vierkante" eines „Pentaeders" Π mit einem linearen Raume F_1, so treffen die 5 F_1 die bez. „Gegenräume" von Π dann und nur dann in 5 Ebenen einer F_3, wenn die durch die 5 F_1 auf den Kanten der 5 Vierkante erzeugten 4.5 Schnittpunkte einer F_2 angehören." „Entsprechendes gilt bei Ersetzung der F_1, F_2, F_3 durch resp F_n, F_{2n}, F_{3n}, und im Raume von d Dimensionen durch $F_n, F_{2n}, F_{(d-1)n}$."

Durch geeignete Projection auf niedere Räume fliefsen hieraus neue Sätze. So z. B. ergiebt sich durch Projection der Chasles-schen Figur ein (auch leicht direct beweisbarer) Satz für die Ebene, den man so formuliren kann, dafs er für Ebene und Raum in gleicher Weise gilt:

F. „Man verbinde die Ecken eines Dreiecks $\varDelta$ mit einem beliebigen Punkte 0, und ziehe in den drei Winkeln 0 die resp. Geraden g_1, g_2, g_3. Wenn dann die Spuren der Geraden g auf den zugeordneten Seiten von $\varDelta$ auf einer Geraden liegen, so findet das Nämliche statt für die Spuren der drei anderen Geraden, die die auf den Kanten eines jeden Winkels 0 noch restirenden zwei Punkte verbinden, und umgekehrt."

Diese Erweiterung der bekannten Desargues'schen Figur (die sich ergiebt, wenn im Besonderen der Punkt 0 mit dem Perspectivitätscentrum der beiden Dreiecke $\varDelta$ und (g_1, g_2, g_3) zusammenfällt) ist für die Ebene bemerkenswert als Beispiel einer „gemischten Configuration" von Punkten und Geraden, wo durch jeden Punkt entweder 3 oder 4 der Geraden gehen, und auf jeder Geraden entweder 3 oder 4 der Punkte liegen.

Construction der Oberfläche zweiter Ordnung, welche neun gegebene Punkte enthält.

Von **Ernst Kötter** in Aachen.

Behufs Construction der Oberfläche F' zweiter Ordnung, welche die neun Punkte S, B, C, O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 enthält, wird zunächst das in bekannter Weise*) gefundene Hyperboloid H', welches

*) Constructionen des bezeichneten Hyperboloids hat meines Wissens zuerst (1851) Seydewitz gegeben (Leichtfafsliche Konstruktion etc., Grunert's Archiv, Theil 17, S. 275). Ich habe über diese Arbeit an anderer Stelle ausführlich berichtet (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. V., 2 [Cap. XXXIV, 5—8]). Bei der Ermittelung der Geraden d kann man zunächst die Schnittlinie l von SBC und δ festlegen. Bezeichnet man mit $Q_{\lambda\mu\nu}$ den Schnittpunkt von SB und $A_\lambda A_\mu A_\nu$, mit $R_{\mu\nu}$ den Schnittpunkt von $A_\mu A_\nu$ und SBC, so gehört z. B. die Pascal'sche Gerade q_{45} des einem Geradenpaare eingeschriebenen Sechsecks $R_{23} Q_{345} R_{31} Q_{145} R_{12} Q_{245}$ dem Hyperboloid an, welches neben den Punkten A_1, A_2, A_3 die Geraden SB und $A_4 A_5$ enthält, und nimmt deshalb auch den Punkt R_{45} auf. Die zehn in der beschriebenen Weise entstehenden Geraden $q_{12}, q_{13}, \ldots, q_{45}$ haben einen Punkt $\mathfrak{C}$ mit einander gemein, zu dessen Festlegung

neben SB die Punkte C, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 aufnimmt, mittels der projectivischen Ebenenbüschel

$$\beta\beta_1\beta_2\beta_3\ldots \barwedge \delta\delta_1\delta_2\delta_3\ldots$$

erzeugt. $\beta\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ besitze die Axe SB. Die Axe d von $\delta\delta_1\delta_2\delta_3\ldots$ werde so gewählt, dafs die β oder SBC entsprechende Ebene δ neben C auch O aufnimmt. Analog mögen die projectivischen Ebenenbüschel

$$\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''\ldots \barwedge \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''\ldots$$

das Hyperboloid H'' erzeugen, welches neben SC die Punkte B, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 enthält. SC sei die Axe von $\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''\ldots$; die Axe e von $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''\ldots$ werde so gewählt, dafs die zu γ oder $SCB(\equiv\beta)$ homologe Ebene ε aufser B auch O enthält. Man ordne jetzt der Schnittlinie $s_i^{(k)}$ von β_i und $\gamma^{(k)}$ die Ebene $\sigma_i^{(k)}$ zu, welche von O aus

---

zwei derselben hinreichen. $\mathfrak{C}$ bestimmt mit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 eine Raumcurve R dritter Ordnung mit der Sehne SB. Da dieselbe auch H' angehört, so fällt l mit $C\mathfrak{C}$ zusammen. Der A_λ, A_μ, A_ν aufnehmende Kegelschnitt von H' ist nun, da er SB und $C\mathfrak{C}$ trifft, eindeutig bestimmt. Er schneidet $OC\mathfrak{C}$ in einem Punkte von d. Zwei der Kegelschnitte genügen zur Festlegung dieser Geraden, welche natürlich auch die in SBA_1, SBA_2, ... liegenden zu $C\mathfrak{C}$ windschiefen Geraden von H' schneidet. Man kann dieselben, wenn man C mit A_1, A_2, ... vertauscht, nach der angegebenen Regel construiren. Dieselbe läfst sich leicht mit derjenigen v. Staudt's in Einklang bringen, nach der l den Pol ($\mathfrak{C}$) von SB in dem Polarsystem enthält, von dem je zwei nicht anstofsende Seiten des vollständigen Fünfecks $A_1A_2A_3A_4A_5$ conjugirte Punkte ausschneiden (Beiträge zur Geometrie der Lage, Heft 3, Nürnberg 1860, Nr. 589). Die oben eingeführte Raumcurve dritter Ordnung hat zuerst Reye benutzt. Er gelangte, da dieselbe nach seinem allgemeinen Satze ein Polardreieck des bezeichneten Polarsystems ausschneidet, zu einer sehr einfachen Begründung der v. Staudt'schen Regel (Einfache lineare Construction der Fläche zweiter Ordnung etc., Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 13, 1868, S. 527).

Vertauscht man in der angegebenen Construction C mit B, so erhält man die zweite SBC angehörige Gerade $B\mathfrak{B}$ des Hyperboloids H''. Der Schnittpunkt P von $B\mathfrak{B}$ und $C\mathfrak{C}$ gehört der gesuchten Fläche F an. Noch fünf weitere Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 des SBC angehörigen Kegelschnittes K' von F erhält man, wenn O der Reihe nach an die Stelle von A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 tritt. Irgend zwei der Punkte $P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ genügen zur Bestimmung von K'. Construirt man in analoger Art etwa den S, B, A_1 enthaltenden Kegelschnitt K'' von F, so ist die Fläche festgelegt (z. B. als Ort der Kegelschnitte, die S und O enthalten, K', K'' aufserhalb S nochmals treffen, überdies in S dieselbe Ebene berühren, wie K', K''). Man gelangt so zu einer zweiten Lösung der gestellten Aufgabe, welche Reye nach dem Vorgange v. Staudt's (vergl. a. a. O., Nr. 591, 592) an der bezeichneten Stelle gegeben hat.

die Schnittlinie $t_i^{(k)}$ von δ_i und $\varepsilon^{(k)}$ projicirt. $s_i^{(k)}$ und $\sigma_i^{(k)}$ schneiden sich in einem Punkte der gesuchten Fläche F*).

Augenscheinlich beschreibt nämlich $t_i^{(k)}$, wenn $s_i^{(k)}$ einen Strahlenbüschel durchläuft, eine zu demselben projectivische Regelschar, welche einen von O ausgehenden Strahl, die Schnittlinie p der Ebenen δ und ε enthält. Hiernach entspricht einem von $s_i^{(k)}$ durchlaufenen Strahlenbüschel ein projectivischer von $\sigma_i^{(k)}$ beschriebener Ebenenbüschel, welcher die dem Strahlenbüschel entsprechende, von $t_i^{(k)}$ beschriebene Regelschar von einem ihrer Leitstrahlen aus projicirt. $\sigma_i^{(k)}$ und $s_i^{(k)}$ sind homologe Elemente reciproker Strahlenbündel. Die von ihnen erzeugte Fläche zweiter Ordnung enthält alle H' und H'' gemeinsamen Punkte, da in jedem derselben sich zwei homologe Strahlen $s_i^{(k)}$ und $t_i^{(k)}$ treffen. Das Erzeugnis der beiden reciproken Bündel enthält hiernach aufser den Scheiteln S und O die Punkte B, C, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und ist die gesuchte Fläche. Falls sich die genannten Strahlen d und e treffen, verstehe man unter β_0 und $\gamma^{(0)}$ die zu der Verbindungsebene (d, e) homologen Ebenen. Durchläuft dann $s_i^{(k)}$ eine von $s_0^{(0)}$ ausgehende Ebene φ, so beschreibt $t_i^{(k)}$ eine von p ausgehende Ebene ψ. φ und ψ sind homologe Elemente projectivischer Ebenenbüschel, welche F erzeugen. Der bezeichnete besondere Fall tritt augenscheinlich ein, sobald O einer Sehne der Schnittcurve von H' und H'' angehört, deren einer Endpunkt der von S, B, C verschiedene Schnittpunkt P dieser Curve mit SBC ist.

Die durchgeführte Betrachtung läfst sich in folgender Weise umkehren. Die reciproke Beziehung zwischen zwei eine vorliegende Fläche F erzeugenden reciproken Strahlenbündeln mit den Scheiteln S und O werde durch die projectivischen Beziehungen

$$\beta\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3 \ldots \barwedge p\,p_1\,p_2\,p_3 \ldots,$$
$$\gamma\,\gamma'\,\gamma''\,\gamma''' \ldots \barwedge q\,q'\,q''\,q''' \ldots$$

zwischen je einem Ebenenbüschel des ersten Bündels und dem homologen Strahlenbüschel des zweiten Bündels zum Ausdruck gebracht.

*) Bereits Seydewitz hat an der bezeichneten Stelle eine von mir a. a. O. eingehend gewürdigte Methode gegeben, um aus zwei Paaren von Projectivitäten, welche H' und H'' erzeugen, zwei reciproke F erzeugende Strahlenbündel herzustellen. $s_i^{(k)}$ und $t_i^{(k)}$ sind bei ihm, da er d und e durch einen der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 hindurchführt, homologe Strahlen quadratisch verwandter Strahlenbündel. Jedem Strahle $s_i^{(k)}$ wird eine $t_i^{(k)}$ enthaltende Ebene $\sigma_i^{(k)}$ zugeordnet. Im übrigen vergleiche man über die bekanntlich sehr umfangreiche Litteratur der Aufgabe die Dissertation von Bögehold (Historisch-kritische Darstellung der Konstruktionen der Fläche 2. Ordnung aus 9 Punkten, Jena 1898).

Für den gemeinsamen Strahl der Strahlenbüschel seien p und q, für die gemeinsame Ebene der Ebenenbüschel β und γ verschiedene Bezeichnungen. Sind nun die Punktreihen $PP_1P_2P_3\ldots$ und $QQ'Q''Q'''\ldots$ auf den windschiefen Trägern $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ bezüglich zu $pp_1p_2p_3\ldots$ und $qq'q''q'''\ldots$ perspectivisch, so enthält F alle Schnittpunkte der Hyperboloide $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$, welche die beiden Paare projectivischer Ebenenbüschel

$$\beta\beta_1\beta_2\beta_3\ldots \barwedge \mathfrak{d}(PP_1P_2P_3\ldots),$$
$$\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''\ldots \barwedge \mathfrak{c}(QQ'Q''Q'''\ldots)$$

erzeugen. Enthält F die neun Punkte S, B, C, O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, so kann man $\mathfrak{H}'$ mit H' identisch machen. Bei Aufnahme der obigen Bezeichnungen kann man die vollkommen bestimmte Erzeugung von F benutzen, bei der die SC entsprechende Ebene von $qq'q''q'''\ldots$ mit δ zusammenfällt. Man lasse dann d mit $\mathfrak{d}$ identisch werden und verstehe unter $PP_1P_2P_3\ldots$ die Punktreihe, welche $pp_1p_2p_3\ldots$ und $\delta\delta_1\delta_2\delta_3\ldots$ offenbar erzeugen, da p der Ebene δ angehört. Es fällt jetzt nicht nur $\mathfrak{H}'$ mit H', sondern auch $\mathfrak{H}''$ mit H'' zusammen. $\mathfrak{H}''$ enthält nämlich aufser SC alle F und H' gemeinsamen Punkte. Die so sich ergebenden Punkte B, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 genügen aber mit SC zur Festlegung eines einschaligen Hyperboloids ($\mathfrak{H}'' = H''$). Die beiden F erzeugenden reciproken Bündel sind also, da $t_i^{(k)}$ mit $P_iQ^{(k)}$ zusammenfällt, auf die oben geschilderte Art mit Hülfe der Hyperboloide H' und H'' abgeleitet. In dem speciellen Falle, in dem die Ebene δ eine zu SB windschiefe Gerade p von F enthält, kann man nachweisen, dafs die beiden F erzeugenden projectivischen Ebenenbündel mit den Axen $s_0^{(0)}$ und p sicherlich mit Hülfe der Hyperboloide H' und H'' in der beschriebenen Art abgeleitet werden können. Man gewinnt eine neue sehr einfache Bestätigung des Satzes: „Neun Punkte S, B, C, O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 bestimmen im allgemeinen eindeutig eine Fläche F zweiter Ordnung, sicher dann, wenn einerseits SB und C, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, andererseits SC und B, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 je ein Hyperboloid eindeutig bestimmen, und O keinem von beiden angehört"*).

*) Bewegt man O über einen Strahl p, welcher den letzten H', H'' und SBC gemeinsamen Punkt P enthält, aber die Schnittcurve von H' und H'' nicht zum zweiten Male trifft, so erhält man alle Flächen des durch H' und H'' bestimmten Büschels. Auf den Strahlenbündel mit dem Scheitel S werden nach und nach die zu ihm collinearen Ebenenbündel eines Büschels bezogen. Alle diese Ebenenbündel sind zu einem linearen Strahlensystem perspectivisch, dem auch p angehört. Mit Hülfe der Regel-

Ein besonderer Bündel von dreidimensionalen Räumen zweiter Ordnung im Raum von vier Dimensionen.

Von **P. H. Schoute** in Groningen.

1. Im Raume R^4 von vier Dimensionen bestimmen drei willkürlich angenommene Geraden a_1, a_2, a_3 im allgemeinen bekanntlich eine einzige gemeinschaftliche Transversale b; sie wird erhalten, indem man in dem von a_1 und a_2 bestimmten dreidimensionalen Raume (a_1, a_2) durch den Schnittpunkt A_3 von a_3 mit diesem Raume die auf a_1 und a_2 ruhende Gerade legt. Wie unmittelbar einleuchtet, ist diese Gerade b zu gleicher Zeit die Schnittlinie der drei dreidimensionalen Räume (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_1, a_2).

Liegen im R^4 vier willkürliche Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben vor, so kann man für jedes aus ihnen zu bildende Tripel

$$(a_2, a_3, a_4), \quad (a_3, a_4, a_1), \quad (a_4, a_1, a_2), \quad (a_1, a_2, a_3)$$

die gemeinschaftliche Transversale b_1, b_2, b_3, b_4 bestimmen. Die so erhaltene Figur von acht Geraden mag ein „Doppelvier" heifsen; denn in der Anordnung

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \end{matrix}$$

kommt sie hierin mit dem bekannten Doppelsechs Schläfli's überein, dafs eine beliebige ihrer acht Geraden nur diejenigen drei anderen schneidet, welche mit ihr weder in derselben Horizontal- noch in derselben Verticalspalte stehen.

---

scharen des Strahlensystems, welche p enthalten, pflegt man bekanntlich diesen speciellen Büschel collinearer Ebenenbündel nachzuweisen (vergl. Reye, Die Geometrie der Lage, Band 2, Hannover 1868, S. 241). Diese Betrachtungsweise hat mich auf die oben angegebene Construction der Fläche F geführt. Die collinearen Ebenenbündel eines Büschels sind im allgemeinen zu der Sehnencongruenz einer Raumcurve dritter Ordnung perspectivisch, welche die Scheitel der Ebenenbündel enthält. Mit einem festen zu ihnen allen collinearen Strahlenbündel erzeugen auch die Ebenenbündel eines allgemeinen Büschels die Flächen zweiter Ordnung eines Büschels. In jedem Punkte seiner Grundcurve schneidet sich ein Strahl des Strahlenbündels mit der zugehörigen Sehne der Raumcurve. Bei der von mir gegebenen Construction artet letztere in den Inbegriff der Geraden p, d, e aus, die Sehnencongruenz in ein lineares Strahlensystem. Bei Seydewitz werden die collinearen Ebenenbündel concentrisch, die Raumcurve dritter Ordnung besteht jetzt aus den Schnittlinien der Ebenen, welche alle Ebenenbündel mit einander entsprechend gemein haben.

Beiläufig bemerken wir, dafs das Doppelsechs und das Doppelvier die einzigen vollständigen Figuren von Geraden sind, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen. Denn im Raum R^n ist die Bedingung des Schneidens zweier Geraden einerseits $n - 2$ einfachen Bedingungen äquivalent, indem die Gerade andererseits von $2n - 2$ einfachen Bedingungen bestimmt wird. Und nun ist $n - 2$ nur dann in $2n - 2$ enthalten, wenn $n - 2$ ein Factor ist von n, d. h. für $n = 3$ und $n = 4$.

2. Ein dreidimensionaler Raum Q_2^3 zweiter Ordnung ist durch 14 Punkte bestimmt. Es wird dies entweder aus der Gleichung der Q_2^3 abgelesen, oder aber geometrisch bewiesen mittels der Bemerkung, dafs zwei in verschiedenen Räumen R^3 liegende Flächen F_2^2 zweiter Ordnung, welche mit der Schnittebene dieser Räume R^3 den nämlichen Kegelschnitt gemeinsam haben und also von 13 Punkten abhängen, zusammen einen Büschel von Räumen Q_2^3 bestimmen. Nun gilt es bekanntlich für drei einfache Bedingungen, dafs eine Q_2^3 eine gegebene Gerade enthalte. Also bilden die durch die vier gegebenen Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 geführten Räume Q_2^3 eine zweifache Unendlichkeit, d. h. einen Bündel. Die nicht in einem R^3 liegende Basiscurve achter Ordnung dieses Bündels wird unmittelbar vorgezeigt; denn diese C_8 mufs offenbar nicht nur die vier Geraden a, sondern auch die vier Geraden b enthalten, da jede Gerade b drei Punkte gemeinsam hat mit dem Quadrupel der Geraden a. Es hat also der in Betracht genommene Bündel das Doppelvier zur Basis.

3. Der gefundene Bündel von quadratischen Räumen Q_2^3 im R^4 erinnert an den besonderen Büschel von quadratischen Flächen F_2^2 im R^3, dessen Basis, von den Seiten eines windschiefen Vierseits gebildet, man geneigt sein würde, ein „Doppelzwei" zu nennen, wenn nicht von den zwei Paaren Gegenseiten (a_1, a_2) und (b_1, b_2) jede Gerade a jede Gerade b schnitte. Es ist lohnend, die Analogie zwischen beiden Figuren ein wenig weiter zu verfolgen.

Der besondere Büschel von Flächen F_2^2 enthält zwei Ebenenpaare, mittels welcher man die Gleichung des Büschels unmittelbar entwickeln kann, sobald die Gleichungen der vier Basisgeraden gegeben sind. Ebenso enthält der von den vier Geraden a bestimmte Bündel von Räumen Q_2^3 drei Paare von linearen Räumen

$$[(a_2 a_3 b_1 b_4),\ (a_1 a_4 b_2 b_3)],\quad [(a_3 a_1 b_2 b_4),\ (a_2 a_4 b_3 b_1)],$$
$$[(a_1 a_2 b_3 b_4),\ (a_3 a_4 b_1 b_2)],$$

welche in Bezug auf die Bündelgleichung das nämliche leisten, sobald die Gleichungen der vier Geraden a gegeben sind. Ist $V_{2,3} = 0$ die Gleichung des Raumes $(a_2 a_3 b_1 b_4)$, u. s. w., so erscheint die Gleichung des Bündels in der Form

$$\lambda V_{2,3} V_{1,4} + \mu V_{3,1} V_{2,4} + \nu V_{1,2} V_{3,4} = 0.$$

Und sind nun die Gleichungen

$$x_i = p_{i,k} x_4 + q_{i,k} x_5, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

der vier Geraden a_k, $(k = 1, 2, 3, 4)$ gegeben, so erhält man die Gleichungen $V_{2,3} = 0, \ldots$ unmittelbar in Determinantenform, u. s. w.

4. Die Eigenschaft der Basiscurve C_4 eines gewöhnlichen Büschels von Flächen F_2^2 im R^3, durch irgend einen Punkt P dieses Raumes zwei Bisecanten zu schicken, geht bei der Ausartung von C_4 in die Seiten eines windschiefen Vierseits nicht verloren. Ebenso kann man im R^4 aus der Zahl von den irgend einer gegebenen Geraden g schneidenden Bisecanten des Doppelviers auf die Ordnung des Ortes der Bisecanten von der Basiscurve C_8 eines gewöhnlichen Bündels von quadratrischen Räumen schliefsen. Diese Zahl ist sechszehn; denn von den 28 aus den acht Geraden des Doppelviers zu bildenden Geradenpaaren sind 12 von zwei einander schneidenden und also 16 von zwei zu einander windschiefen Geraden aufgebaut.

Mit Hilfe der gefundenen Ordnung des Bisecantenraumes berechnet man das Geschlecht der Basiscurve C_8. Wir finden nämlich, dafs die Projection der C_8 aus irgend einer Geraden g auf irgend eine diese Gerade nicht schneidende Ebene ε eine Plancurve achter Ordnung mit sechszehn Doppelpunkten ist; deshalb hat diese Projection und also auch die Basiscurve C_8 selbst das Geschlecht fünf.

Bei der Ausartung der Basis C_4 in die Seiten eines Vierseits entstehen Ebenen, welche von allen Flächen F_2^2 des Büschels in dem nämlichen Kegelschnitt geschnitten werden, die vier Ebenen durch zwei aufeinanderfolgende Seiten des Vierseits. Offenbar gewinnt ebenso der Bündel von Räumen Q_2^3 bei der Ausartung seiner Basiscurve C_8 in das Doppelvier die Eigenschaft, sechs Räume $V_{2,3}$, u. s. w. aufweisen zu können, welche ihn in den Flächen F_2^2 eines Büschels schneiden. Hieraus ist zu entnehmen, dafs es nicht erlaubt ist, aus der Bemerkung, dafs durch einen gegebenen Punkt P von R^4 zwei jede der vier Geraden a schneidende Ebenen gehen, zu schliefsen, dafs es eine zweifach unendliche Menge von Ebenen giebt, welche C_8 in vier Punkten schneiden. Allein dieses Resultat ist

aus dem Geschlechte der C_8 abzuleiten. Denn projicirt man die C_8 aus irgend einer ihrer Bisecanten auf eine Ebene, so erhält man eine Curve sechster Ordnung, welche, da sie ebenfalls das Geschlecht fünf hat, einen Doppelpunkt besitzt. Und hieraus folgt, dafs die Projectionsbisecante von einer anderen Bisecante geschnitten wird, also durch jede Bisecante von C_8 eine Vierpunktsebene dieser Curve geht.

5. Es wird uns wohl erlaubt sein, den beim Vortrag nur aufgeworfenen Gedanken, das Doppelvier für das Studium der überhaupt möglichen Ausartungen der C_8 zu verwerten, hier näher zu entwickeln.

Beim Zerstückeln des windschiefen Vierseits $(a_1 b_1 a_2 b_2)$ treten nicht nur die bekannten Ausartungen der Basiscurve C_4 eines Büschels von Flächen F_2^2 im R^3 sammt ihren Geschlechtern zu Tage, sondern es ergeben sich auch unmittelbar die Zahlen, welche ausdrücken, durch wie viel von einander unabhängige Punkte irgend einer dieser Curven eine F_2^2 gehen soll, damit diese die Curve ganz enthalten mufs. Indem die von vier einander in vier Punkten schneidenden Geraden gebildete Figur $(a_1 b_1 a_2 b_2)$ zeigt, dafs die angedeutete Zahl von Bedingungen für C_4 selbst den Wert

$$4 \cdot 3 - 4 = 8$$

hat, liefert die Zerlegung $(a_1 b_1 a_2)$, b_2 die Raumcurve C_3 mit einer Bisecante und die Bedingungszahl $3 \cdot 3 - 2 = 7$, ebenso die Zerlegung $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ die Combination von zwei in verschiedenen Ebenen liegenden Kegelschnitten, die zwei Punkte gemeinsam und die Bedingungszahlen $2 \cdot 3 - 1 = 5$ haben, u. s. w.

Auf analoge Weise kann man, wie ich an einer anderen Stelle hervorheben werde, die von Sturm gefundenen Zergliederungen der Basiscurve C_9 eines Büschels von cubischen Flächen im R^3 und ihre Bedingungszahlen ableiten. Hier wenden wir zunächst das entwickelte Verfahren auf das Doppelvier an. Um dabei eine gröfsere Übersichtlichkeit der Resultate zu erzielen, ist es wünschenswert, 1. das Symbol der acht Buchstaben durch eine Figur von vier horizontalen Geraden a und vier verticalen Geraden b — oder sagen wir vier Geraden h und vier Geraden v — zu ersetzen, wobei man dann allerdings (Fig. 1) die auftretenden Schnittpunkte besonders anzudeuten hat, und 2. die zu erhaltenden Curven $C_{n,g,b}$ mittels dreier Zahlen n, g, b, die Ordnung n, das Geschlecht g und die Bedingungszahl b, zu kennzeichnen. Da das Doppelvier aus acht einander in zwölf Punkten schneidenden Geraden besteht, ist die Bedingungszahl b der C_8 also $8 \cdot 3 - 12 = 12$, was uns schon be-

kannt war, und kommt dieser Curve deshalb das Symbol $C_{8,5,12}$ zu. Wir betrachten nun nach einander alle möglichen Fälle.

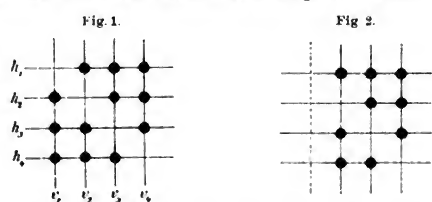
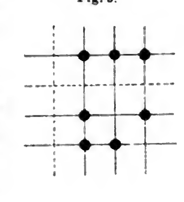


Fig. 1. Fig. 2.

Abtrennung von v_1. — Es zeigt die Spaltung Fig. 2. Der übrig bleibende Teil besteht aus sieben Geraden, aus welchen man $21 - 9 = 12$ Paare windschiefer Geraden bilden kann. Deshalb projicirt sich die bei der Abtrennung von v_1 entstehende C_7 aus irgend einer Geraden auf irgend eine Ebene als eine Plancurve siebenter Ordnung mit zwölf Doppelpunkten, welche also das Geschlecht drei hat. Und die Bedingungszahl ist $7 \cdot 3 - 9 = 12$, d. h. wir finden eine $C_{7,3,12}$ mit einer Trisecante.

Dafs die abgetrennte Gerade v_1 eine Trisecante der erhaltenen C_7 sein mufs, wird auch auf die folgende Weise gezeigt. Es werden irgend drei den Bündel bestimmende Räume Q_2^3 von einem R^3 durch v_1 in drei durch v_1 gehenden Flächen F_2^2 geschnitten, und diese haben bekanntlich vier aufserhalb v_1 liegende Punkte gemeinsam; also müssen die anderen drei Schnittpunkte dieses Raumes R^3 mit C_7 auf v_1 liegen. Und ist v_1 Trisecante von C_7, so mufs jede Q_2^3 durch C_7 auch v_1 enthalten, woraus hervorgeht, dafs die Bedingungszahlen von C_7 und C_8 einander gleich sein müssen, und v_1 die einzige Trisecante der C_7 sein mufs.

Abtrennung von v_1, h_2. — Es zeigt die Spaltung (Fig. 3). Man erhält eine C_6 vom Geschlechte $10 - (15 - 7) = 2$ mit der Bedingungszahl $6 \cdot 3 - 7 = 11$, also eine $C_{6,2,11}$, mit zwei einander schneidenden Bisecanten. Es hat diese C_6 überhaupt keine Trisecante.


Fig. 3.

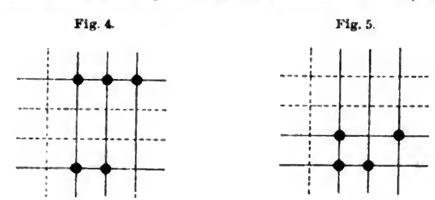
Abtrennung eines Kegelschnittes. — Das Resultat wird dem vorhergehenden Falle entnommen, indem man die Combination (v_1, h_2) als einen Kegelschnitt betrachtet. Man findet also eine $C_{6,2,11}$, welche dem Kegelschnitt in vier Punkten begegnet.

Dass die beiden Teile der C_8 einander hier in vier Punkten schneiden, wird auch leicht direct bewiesen. Irgend drei den Bündel bestimmende Räume Q_2^3 werden von einem die Ebene ε des Kegelschnittes enthaltenden Raume R^3 in drei durch den Kegelschnitt gehenden Flächen F_2^2 geschnitten, und diese haben, wie das bekannte Beispiel von drei Kugeln zeigt, aufserhalb des Kegelschnittes zwei Punkte gemeinsam; also müssen die anderen vier Schnittpunkte dieses Raumes R^3 mit C_6 auf dem Kegelschnitte liegen.

Wir bemerken beiläufig, dafs die Betrachtung des abgetrennten Teils (v_1, h_2) für den Kegelschnitt das Symbol $C_{2,0,5}$ liefert, wie es sein soll.

Abtrennung von v_1, v_2. — Man erhält eine $C_{6,1,12}$ mit zwei zu einander windschiefen Trisecanten; diese Curve läfst offenbar keine dritte Trisecante zu.

Abtrennung von v_1, h_2, h_3. — Man erhält eine $C_{5,1,10}$, welche v_1 zur Unisecanten und h_2 und h_3 zu Bisecanten hat (Fig. 4).


Fig. 4. Fig. 5.

Abtrennung der Raumcurve $C_{3,1}$. — Da (v_1, h_2, h_3) eine Ausartung von $C_{3,1}$ ist, findet man, dem vorhergehenden Falle entsprechend, eine $C_{5,1,10}$, welche fünf Punkte mit $C_{3,1}$ gemein hat.

Aus der Bemerkung, dafs irgend drei Flächen F_2^2 durch $C_{3,1}$ aufserhalb dieser Curve keinen Punkt gemeinsam haben, kann das Resultat der fünf Schnittpunkte der hier gefundenen beiden Teile von C_8 wieder bestätigt werden.

Beiläufig weisen wir darauf hin, dafs die Ausartung (v_1, h_2, h_3) die cubische Raumcurve als eine $C_{3,0,7}$ kennzeichnet, wie es sein soll.

Abtrennung von v_1, v_2, h_1. — Man erhält (Fig. 5) eine $C_{5,0,11}$, welche v_1 zur Trisecante und v_2 und h_1 zu einander schneidenden Bisecanten hat.

Es hat offenbar irgend eine nicht in einem R^3 liegende C_5 höchstens nur eine Trisecante; denn die Voraussetzung, dafs es zwei Trisecanten gäbe, führt immer zu einem Raume R^3, der sechs Punkte der Curve enthält. Weiter lehrt eine specielle Untersuchung, die wir hier unterdrücken, dafs eine C_5 ersten Geschlechts keine Trisecante haben kann, dagegen die rationale C_5 immer eine Trisecante aufzuweisen hat.

Abtrennung von v_1, v_2, v_3, h_4. — Bei der Abtrennung von v_1, v_2, v_3 trennt sich offenbar auch h_4 ab; der Fall der Abtrennung von v_1, v_2, v_3 wird hier also nur scheinbar übergangen. Man erhält eine $C_{4,0,9}$, welche v_1, v_2, v_3 zur Bisecante hat, h_4 dagegen gar nicht schneidet (Fig. 6).

Fig. 6.

Abtrennung von $C_{4,0}$. — Es bilden v_1, v_2, v_3, h_4 zusammen eine $C_{4,0,9}$. Dem vorhergehenden Falle entsprechend erhält man also eine zweite $C_{4,0,9}$, welche mit der ersten sechs Punkte gemein hat.

Die anderen besonderen Fälle, welche im vorhergehenden Falle enthalten sind, übergehen wir.

Abtrennung von v_1, v_2, h_3, h_4. — Man erhält eine $C_{4,1,8}$, Allein, da jede nicht in einem R^3 enthaltene C_4 immer rational ist, mufs die gefundene Curve in einem R^3 liegen und dort, ihrem Geschlechte nach, die Basiscurve eines Büschels von Flächen F_2^2 sein. Und dann enthält der Bündel auch eine Q_2^3, welcher dieser Raum angehört, woraus hervorgeht, dafs die abgetrennten Geraden in einem anderen R^3 liegen müssen. Wirklich ist dies der Fall; denn sie bilden eine zweite in ein windschiefes Vierseit ausgeartete $C_{4,1}$.

Es ist offenbar richtig, dafs die Bedingungszahl der $C_{4,1}$ acht beträgt; denn im R^3 gilt es für acht einfache Bedingungen, dafs eine F_2^2 eine gegebene $C_{4,1}$ enthalte.

Abtrennung von $C_{4,1}$. — Man findet eine andere $C_{4,1,8}$, welche mit der ersten vier Punkte gemein hat, die natürlich in der Schnittebene ihrer Räume R^3 liegen.

Dieser Fall, welcher von allen aus der Abtrennung von v_1, v_2, h_3, h_4 zu bildenden Fällen allein hervorgehoben wird, bildet im R^4 das Analogon der in zwei einander in zwei Punkten schneidende Kegelschnitte zerfallenen Basiscurve $C_{4,1}$ eines Büschels von Flächen F_2^2 im R^3.

Zusammenfassung der Resultate. — Nennen wir eine Curve „gewrungen“, wenn sie nicht in einem Raume R^3 liegt, und deuten wir abkürzend die Curve $C_{n,g,b}$ durch das Symbol (n, g, b) an, so können wir die betrachteten Curven folgendermaſsen tabellarisch ordnen:

a) gewrungene Curven: (8, 5, 12), (7, 3, 12), (6, 1, 12).
(6, 2, 11), (5, 0, 11), (5, 1, 10), (4, 0, 9);

b) Raumcurven: (4, 1, 8), (3, 0, 7);

c) Plancurve: (2, 0, 5);

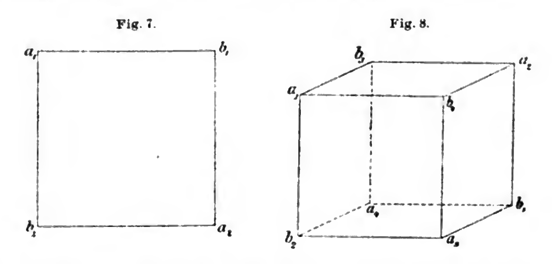
d) Gerade: (1, 0, 3).

6. Von der Bemerkung ausgehend, daſs drei willkürlich im R^4 angenommene Geraden eine einzige gemeinschaftliche Transversale bestimmen, haben wir das Doppelvier gefunden, und nachher mit Hilfe dieser Figur die allgemeine Basiscurve $C_{8,5}$ eines Bündels von Räumen Q_2^3 auf alle mögliche Weisen zerlegt. Beim Nachschlagen der betreffenden Literatur hat sich aber herausgestellt, daſs diese Resultate nicht alle neu sind, wie ich erst meinte. Denn schon in der 1882 erschienenen inhaltsreichen Abhandlung des Herrn G. Veronese über das Princip des Projicirens und des Schneidens (Math. Ann., Bd. 19) ist von den in zwei „complementäre Geradenquadrupel“ zerfallenen Durchschnitten dreier Räume Q_2^3 (S. 191), von den kennzeichnenden Zahlen der Basiscurve $C_{8,5}$ (S. 204), ja sogar von einzelnen der oben gefundenen Curven, $C_{5,1}$, $C_{6,2}$, $C_{7,3}$ (S. 206) die Rede. Es treten diese Ergebnisse dort als vereinzelte Beispiele einer viel weiter ragenden allgemeinen Theorie auf, die u. a. die Relationen liefert, welche obwalten zwischen den Plücker-schen Zahlen der vollständigen Schnittcurve irgend dreier gegebener Räume und zwischen den Systemen von Plücker'schen Zahlen der beiden Teile, in welche diese Curve eventuell zerfällt. Zu solcher Höhe können die auf der schmalen Basis des Doppelviers ruhenden Betrachtungen sich selbstverständlich nicht emporheben. Im Gegenteil muſs hier sogar anerkannt werden, daſs die vom Princip der Erhaltung der Zahl beherrschte Methode, die Basiscurve aus ihrer nur aus Geraden gebildeten Ausartung zu studiren, wesentlich eine sehr beschränkte ist, da sie, wie ich an einer anderen Stelle betonen will, sich im R^3 überhaupt nur auf Büschel von quadratischen und cubischen Flächen, in den höheren Räumen ohne weiteres nur auf den Bündel von quadratischen Räumen Q_2^3 anwenden läſst. Und diese Beschränktheit steht in keinerlei Ver-

bindung mit der die Analogie verletzenden Thatsache, dafs, wie oben nachgewiesen wurde, das windschiefe Vierseit nicht ganz genau als „Doppelzwei“ zu deuten ist. Denn es ist ein Leichtes, eine neue Symbolik einzuführen, worin die Symbole des windschiefen Vierseits und des Doppelviers zwei aufeinander folgende Glieder einer allgemeinen Reihe bilden. Bei der in Geraden zerfallenen Basiscurve eines $(m-2)$fach unendlichen Systems von quadratischen Räumen Q_2^{m-1} im R^m handelt es sich nämlich um die 2^{m-1} Geraden, welche $m-1$ Paaren von Räumen R^{m-1} gemeinsam sind, und diese Geraden können offenbar eindeutig bezogen werden auf die 2^{m-1} Punkte, welche in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in einem R^{m-1} den 2^{m-1} Coordinatenwerten

$$(\pm 1, \ \pm 1, \ \pm 1, \ldots, \pm 1)$$

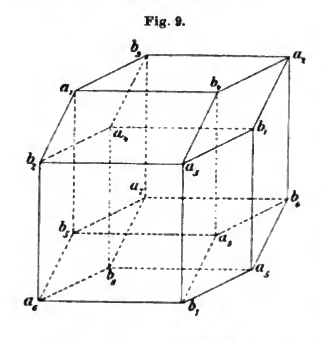
entsprechen und also die Eckpunkte der regelmäfsigen Figur bilden, welche im R^{m-1} das über der doppelten Längeneinheit beschriebene Mafs des Inhalts ist. Es werden dann offenbar die etwa vorhandenen Schnittpunkte der Geraden des Systems von den Kanten dieser regelmäfsigen Figur abgebildet. So findet man den Basiscurven in R^3, R^4, R^5, ... entsprechend nach einander die Figuren Vierseit, Sechsflach, Achtzell, ... in R^2, R^3, R^4... und dabei ist die Verletzung der Analogie ganz beseitigt. Sogar bilden die als eingeschriebene „Zweiecke“ zu deutenden Diagonalen $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ des Quadrates (Fig. 7), welche den Paaren gegenüberliegender Seiten



des windschiefen Vierseits entsprechen, genau das Analogon der beiden dem Hexaeder (Fig. 8) eingeschriebenen Tetraeder $a_1 a_2 a_3 a_4$, $b_1 b_2 b_3 b_4$, welche die „complementären Geradenquadrupel“ abbilden, und wird diese Serie von Zwillingsformen beim Achtzell (Fig. 9) weiter verfolgt von den beiden eingeschriebenen Sechszehnzellen

$a_1 a_2 \dots a_8$, $b_1 b_2 \dots b_8$, um in noch höheren Dimensionen in zwei weniger regelmäfsige Figuren überzugehen, wovon die eine den Eckpunkt $(1, 1, 1 \dots, 1)$, und alle durch eine grade Anzahl von Zeichenwechseln hieraus hervorgehenden, die andere alle durch eine ungrade Anzahl von Zeichenwechseln entstehenden Punkte zu Eckpunkten hat. Allein, ohne weiteres ist sogar die Figur des Achtzelles schon nicht mehr zu verwerten, da die auf einer Geraden des Systems liegende Schnittpunktezahl drei übertrifft.

Fig. 9.



7. Wir brechen deshalb unsere Untersuchung hier ab und wenden uns zum Schlufs zu der Beantwortung der Frage nach den verschiedenen Abbildungen der geschlossenen Figur des Doppelviers auf unseren Raum von drei Dimensionen. Dabei denken wir in erster Linie an die von Lie und Darboux herrührende Transformation, worin den Punkten, Geraden, Ebenen und linearen Räumen von R^4 die Kugel, Kugelbüschel, Kugelbündel und Kugelsysteme oder wenn man will die Kugel, Kreise, Punktepaare und Orthogonalkugel von R^3 entsprechen Hierdurch wird der Satz, dafs drei willkürliche Geraden von R^4 eine gemeinschaftliche Transversale bestimmen, übergeführt in den Satz, dafs es im R^3 eine einzige Kreislinie giebt, welche sich mit jeder von drei gegebenen Kreislinien durch eine Kugel verbinden läfst. Und die Construction dieses Kreises wird unmittelbar aus der Construction der gemeinschaftlichen Transversale abgelesen; sie lautet: man bestimme zuerst zu jedem der drei aus den drei gegebenen Kreisen zu bildenden Paare die gemeinsame Orthogonalkugel, deren Centrum auf der Schnittlinie der Ebenen des Kreispaares liegt, und nachher den in der Ebene dieser drei neuen Centra liegenden Orthogonalkreis dieser drei Kugeln. Deshalb wird das Bild des Doppelviers von zwei complementären Quadrupeln

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4$$
$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \beta_4$$

von Kreisen gebildet, wovon ein beliebiger mit jedem der drei anderen, die weder im Buchstaben noch im Index mit ihm übereinstimmen,

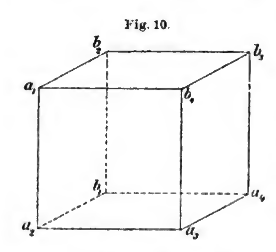
durch eine Kugel verbunden werden kann. Ein solches System von ganz regelmäſsigem Bau wird z. B. erhalten mittels eines rechtwinkligen Axensystems, indem man irgend einen Kreis, dessen Axe keine der drei Coordinatenaxen schneidet, durch Drehungen von 180 Grad um jede dieser drei Axen zu vier Kreisen α vervielfältigt und diesen vier Kreisen α mittels Spiegelung in die Coordinatenebenen vier Kreise β anreiht. Es bilden dann, wie man leicht findet, die den Schnittpunkten der Geraden a und b entsprechenden Kugeln drei Quadrupel von Kugeln gleicher Gröſse, deren vier Mittelpunkte die Eckpunkte eines in einer Coordinatenebene liegenden Rechtecks sind, dessen Centrum und Seiten mit dem Ursprunge zusammenfällt bez. den Coordinatenaxen parallel sind; mithin liegen die Centra dieser zwölf Kugeln auf einer zu den Coordinatenebenen symmetrischen quadratischen Fläche.

8. In aller Kürze weisen wir noch auf zwei andere dreidimensionale Abbildungen des Doppelviers hin, welche beide auf dem von Herrn F. Klein aufgedeckten Zusammenhange zwischen Liniengeometrie und metrischer Geometrie basiren. Es ist nämlich das vierfach unendliche System von Strahlen eines Raumes R^3 sofort projectivisch zu beziehen auf das System der Punkte eines im R^5 liegenden quadratischen Raumes Q_2^4 von vier Dimensionen, indem letzteres System aus irgend einem auf Q_2^4 liegenden Punkt C als Centrum auf irgend einen Raum R^4 von R^5 abgebildet werden kann. Dabei spielt allerdings der Strahl c des Raumes R^3, welcher dem Projectionscentrum C von Q^4 entspricht, eine besondere Rolle. So bildet sich das sechsfach unendliche System der Geraden des Raumes R^4 mittels des natürlich ebenfalls sechsfach unendlichen Systems der den Strahl c enthaltenden Regelscharen ab, wobei immer nur an dasjenige System der Generatricen der tragenden quadratischen Fläche zu denken ist, welchem c mit angehört. Auf diese Weise transformirt sich das Doppelvier in zwei complementäre Systeme von Regelscharenquadrupeln $Q_{a_i}^2$ und $Q_{b_i}^2$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, welche die Eigenschaft besitzen, daſs irgend eine dieser acht den Strahl c gemeinsam habenden Scharen jede der drei anderen, die weder im Buchstaben a, b noch im Index 1, 2, 3, 4 mit ihr übereinstimmen, in einem anderen Strahl schneidet. Mit Ausnahme der Bedingung, daſs die vier Scharen Q_a^2 einen Strahl gemein haben sollen, sind sie ganz willkürlich im R^3 anzunehmen, und können nachher die vier Scharen Q_b^2 aus ihnen abgeleitet werden.

9. Eine dritte Abbildung des Doppelviers wird erhalten, wenn man — auf die stereographische Projection des quadratischen Raumes

Q_2^4 verzichtend — im R^5 neben diesem Q_2^4 einen linearen Raum R^4 und noch zwei andere quadratische Räume S_2^4 und T_2^4 von vier Dimensionen derart annimmt, dafs die quadratischen Schnittflächen F_2^2 vom R^4 mit den drei quadridimensionalen quadratischen Räumen einen Bündel mit einem Doppelvier zur Basis bestimmen. Man erhält dann im R^3 drei Strahlencomplexe, einen linearen und zwei quadratische, welche sich in zwei Quadrupeln von ebenen Strahlenbüscheln durchdringen. Dabei bilden die acht Mittelpunkte und die acht tragenden Ebenen die Eckpunkte und Seitenflächen von zwei einander sowohl um- als eingeschriebenen Tetraedern, welche bekannte Figur man sich, wie Herr J. de Vries nachgewiesen hat, am einfachsten mittels eines Hexaeders (Fig.10) verwirklichen kann. Natürlich können hier die vier Strahlenbüschel des einen Quadrupels nur insofern willkürlich gewählt werden als innerhalb der Beschränkung, dafs sie einem nämlichen linearen Complexe angehören sollen, möglich ist. Und hier gilt dann offenbar der Satz: Alle quadratischen Strahlencomplexe, welche vier in einem linearen Complex willkürlich gewählte Strahlenbüschel enthalten, haben noch ein zweites Quadrupel von Strahlenbüscheln des nämlichen linearen Complexes mit einander gemein; zwischen den Strahlenbüscheln dieser beiden Quadrupel walten die bei den complementären Geradenquadrupeln des Doppelviers nachgewiesenen Beziehungen ob.

Fig. 10.



Zum Schlufs sei bemerkt, dafs wir in Fig. 10, wie eine Vergleichung mit Fig. 8 lehrt, fast ganz auf unsere Symbolik vom Artikel 6 zurückgefallen sind; denn in beiden Figuren bilden die acht Würfeleckpunkte die acht Geraden des Doppelviers ab, u.s.w.

Beweis eines Satzes über Krümmungslinien.

Von **A. Wangerin** in Halle a. S.

Für den bekannten Satz, dafs bei der Transformation durch reciproke Radien die Krümmungslinien einer Fläche in die Krümmungslinien der transformirten Fläche übergehen, läfst sich ein anschaulicher und übersichtlicher Beweis geben, wenn man als bekannt

voraussetzt: 1. den Dupin'schen Satz über dreifach orthogonale Flächenscharen, 2. den leicht zu beweisenden Satz, dafs, wenn sich zwei Flächen senkrecht schneiden, auch die reciproken Flächen aufeinander senkrecht stehen. Der Beweis wird folgendermafsen geführt: Nimmt man zu der gegebenen Fläche F die Parallelflächen sowie diejenigen abwickelbaren Flächen, welche von den Flächennormalen in den Krümmungslinien von F gebildet werden, so hat man ein dreifach orthogonales Flächensystem, das bei Transformation durch reciproke Radien nach Satz 2 in ein eben solches übergeht. Wendet man auf letzteres den Dupin'schen Satz an, so folgt unmittelbar der zu beweisende Satz.

Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen.

Von **Hermann Minkowski** in Zürich.

1. Der Begriff des Ausdehnungsintegrals in einer Mannigfaltigkeit: $\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, d. i. für $n = 3$ der Begriff des Volumens eines Körpers, gehört zu den elementarsten Begriffen in der Analysis des Unendlichen; es knüpft dieser Begriff unmittelbar an den Begriff der Anzahl an. (Vergl. C. Jordan, Cours d'Analyse, 2e éd., t. I p. 18—31.)

Wesentlich schwieriger als die Einführung des Volumenbegriffs ist die Begründung der Länge einer Curve als Grenze der Länge von Polygonen, die der Curve geeignet eingeschrieben sind, und der Oberfläche einer krummen Fläche als Grenze der Oberfläche von Polyedern, die in Bezug auf die Fläche geeignet construirt sind.

Man kann jedoch diese anderen Begriffe Länge und Oberfläche auch allein aus dem Begriffe des Volumens mittelst eines einfachen Grenzüberganges entwickeln:

Es sei C eine Curve. Um jeden Punkt von C als Mittelpunkt denke man sich eine Kugel mit dem Radius r abgegrenzt, unter r eine feste positive Gröfse verstanden. Die Menge aller derjenigen Punkte des Raumes, welche in das Innere oder die Begrenzung von wenigstens einer dieser Kugeln zu liegen kommen, definirt uns den Bereich der Entfernung $\leqq r$ von der Curve C. Es sei $V(r)$ das Volumen dieses Bereichs (falls ihm ein bestimmtes Volumen zukommt), so kann der Grenzwert von $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ für ein nach Null abnehmendes r (falls dieser Grenzwert existirt), als die Länge der Curve C eingeführt werden. — Es sei F eine Fläche. Man con-

struire in entsprechender Weise den Bereich der Entfernung $\leqq r$ von F. Es sei $V(r)$ das Volumen dieses Bereichs, so kann der Grenzwert von $\frac{V(r)}{2r}$ für ein nach Null abnehmendes r (vorausgesetzt, dafs die Gröfse $V(r)$ sowie dieser Grenzwert existirt), als die Oberfläche der Fläche F eingeführt werden.

Es ist einleuchtend, dafs hierbei zunächst die Länge einer geradlinigen Strecke und die Oberfläche eines ebenen Dreiecks genau mit den gewöhnlich dafür angenommenen Werten sich ergeben; infolgedessen werden überhaupt in regulären Fällen Längen und Oberflächen in dem eben erklärten und andererseits in dem üblichen Sinne die gleichen Werte vorstellen.

2. Die soeben gegebene Definition einer Oberfläche führt uns zu einer bemerkenswerten Verallgemeinerung des Begriffs Oberfläche, indem wir an Stelle von Kugeln beliebige einander ähnliche und ähnlich gelegene convexe Körper verwenden. Ich werde mich hier auf die Betrachtung geschlossener Flächen beschränken.

Unter einem convexen Körper verstehe ich eine Punktmenge im Raume, welche abgeschlossen ist, die Eigenschaft hat, mit einer beliebigen Geraden stets entweder eine Strecke oder einen Punkt oder keinen Punkt gemein zu haben, und endlich nicht ganz in einer Ebene liegt. Eine convexe Fläche bedeute die vollständige Begrenzung eines convexen Körpers. Denken wir uns nun einen beliebigen convexen Körper K zu Grunde gelegt. Es sei G die Begrenzung von K und O irgend ein bestimmter innerer Punkt von K. Ich will G die Fläche der Distanz 1 von O nennen (auch die Aichfläche der Distanzen). Ist P ein beliebiger Punkt und r eine positive Gröfse, so soll dann unter der Fläche der Distanz r von P diejenige convexe Fläche H verstanden werden, welche P umschliefst und mit G ähnlich und ähnlich gelegen ist derart, dafs je zwei gleichgerichtete Radienvectoren von P nach H und von O nach G stets in ihren Längen das constante Verhältnifs $r:1$ darbieten. Der von dieser Fläche H umschlossene convexe Körper ist dann der Bereich der Distanz $\leqq r$ von P.

Es sei nun F eine beliebige, ganz im Endlichen gelegene geschlossene Fläche, d. h. eine Punktmenge, mittelst deren der ganze Raum sich in zwei abgeschlossene Mengen, A und J, zerlegt, von denen eine jede die Menge F als vollständige Begrenzung besitzt und welche sonst unter einander keinen Punkt gemein haben; dasjenige von diesen zwei durch F geschiedenen Raumgebieten, in dem keine Grenzen für die Coordinaten der Punkte

vorhanden sind, A, heiße der äußere Raum von F, das andere, J, der innere Raum von F. Wir denken uns um jeden Punkt von F den Körper der Distanz $\leqq r$ von dem Punkte abgegrenzt. Es sei $Q_A(r)$, bez. $Q_J(r)$ der Teil des Gebiets A, bez. des Gebiets J, welcher von der Gesammtheit aller dieser Körper überdeckt wird, weiter $V_A(r)$, bez. $V_J(r)$ das Volumen von $Q_A(r)$, bez. von $Q_J(r)$, so heiße der Grenzwert von $\frac{V_A(r)}{r}$, bez. $\frac{V_J(r)}{r}$ für ein nach Null abnehmendes r die verallgemeinerte Außenoberfläche, bez. Innenoberfläche (abgekürzt v. AO. bez. v. JO.) von F, immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die betreffenden Volumina und Grenzen existiren. Die halbe Summe aus v. AO. und v. JO. von F heiße die verallgemeinerte Oberfläche von F.

3. Die Existenz der hier in Frage kommenden Grenzwerte läßt sich in einfacher Weise darthun, wenn die zu behandelnde Fläche F, ebenso wie die Aichfläche der Distanzen G, eine convexe Fläche ist. Dann ist der innere Raum J von F ein convexer Körper, und es sei C_0 sein Volumen. Der Raum $Q_A(r)$ wird hier jedesmal außer von F noch von einer zweiten convexen Fläche $F_A(r)$ begrenzt, der Fläche derjenigen Punkte in A, für welche die kleinste Distanz von den Punkten in F gleich r ist.

Sind zunächst sowohl J wie K Polyeder, d. h. je von einer endlichen Anzahl von Ebenen vollständig begrenzt, so wird auch der von $F_A(r)$ begrenzte convexe Körper bei beliebigem Werte des r ein Polyeder sein. Bei Zugrundelegung irgend eines Parallelcoordinatensystems erweisen sich alsdann die Coordinaten der Ecken von $F_A(r)$ als ganze lineare Funktionen von r, und vermöge der dreireihigen Determinanten für Volumina von Tetraedern erscheint hernach $V_A(r)$ als eine bestimmte ganze Function dritten Grades von r, d. h. der vierte Differenzenquotient der Function $V_A(r)$ ist gleich Null.

Nun kann man eine beliebige convexe Fläche stets durch zwei Polyederflächen annähern, von denen die eine ganz im inneren Raume, die andere ganz im äußeren Raume der Fläche verläuft, und welche mit einander ähnlich und ähnlich gelegen sind, und zwar noch derart, daß dabei das lineare Dilatationsverhältnis zur Erzeugung der zweiten Polyederfläche aus der ersten beliebig nahe an 1 liegt. (Vergl. meine Geometrie der Zahlen S. 33). Wenden wir diesen Hülfssatz sowohl in Bezug auf die eine Fläche F, wie auch in Bezug auf die Aichfläche G an, so zeigt sich, daß jene Eigenschaft des Verschwindens des vierten Differenzenquotienten von $V_A(r)$ sich

von Polyederflächen sofort auf zwei beliebige convexe Flächen F, G überträgt. Danach wird in allen Fällen das Volumen des von $F_A(r)$ begrenzten Körpers einen Ausdruck haben:

$$W(r) = C_0 + V_A(r) = C_0 + 3C_1 r + 3C_2 r^2 + C_3 r^3,$$

wo C_0, C_1, C_2, C_3 gewisse von r unabhängige Constanten sind.

Nunmehr wird $3\,C_1$ die verallgemeinerte Aufsenoberfläche von F.

Man erkennt leicht, dafs bei Veränderung des Punktes O im Inneren von K die Gröfsen C_0, C_1, C_2, C_3 sich nicht ändern, dafs sie also nur von den zwei Flächen F und G, nicht von dem Punkte O abhängen. Vertauscht man die Rollen dieser zwei Flächen, so treten an die Stelle von C_0, $3\,C_1$, $3\,C_2$, C_3 die Werte C_3, $3\,C_2$, $3\,C_1$, C_0. Es ist also C_3 das Volumen von K und $3\,C_2$ die v. Aufsenoberfläche von G, wenn F als Aichfläche der Distanzen benutzt wird. Alle Gröfsen C_0, C_1, C_2, C_3 sind danach positiv.

Für den hier eingeführten Begriff der v. Aufsenoberfläche heben wir als in gewissem Sinne charakteristisch die Eigenschaft hervor:

Enthält ein convexer Körper einen anderen convexen Körper in sich, so besitzt stets die Begrenzung des ersteren Körpers eine grössere v. Aufsenoberfläche.

Weiter läfst sich zeigen: Die v. Innenoberfläche einer convexen Fläche F ist gleich dem Werte, der für ihre v. Aufsenoberfläche entsteht, wenn die Aichfläche der Distanzen G durch die zu ihr in Bezug auf den Punkt O symmetrische Fläche ersetzt wird. Danach erweisen sich v. Aufsenoberfläche und v. Innenoberfläche für eine convexe Fläche F stets als gleich, wenn die Aichfläche eine Fläche mit Mittelpunkt ist.

Wird nunmehr als Aichfläche eine Kugelfläche vom Radius 1 genommen, so erweist sich $3C_1$ als die Oberfläche der convexen Fläche F im üblichen Sinne, während alsdann $3C_2$ die gesammte mittlere Krümmung von F darstellt.

Endlich machen wir die folgende Bemerkung:

Sind F und G mit einander ähnlich und ähnlich gelegen (worunter der Fall einzubegreifen ist, dafs die Flächen durch blofse Parallelverschiebung auseinander hervorgehen), so ergiebt sich

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2}{C_3} = \sqrt[3]{\frac{C_0}{C_3}}.$$

4. Von diesen Betrachtungen will ich hier hauptsächlich Gebrauch machen, um einen neuen und strengen Beweis für den

Satz zu geben, dafs unter allen convexen Körpern von gleichem Volumen die Kugel die kleinste Oberfläche hat, und um zugleich diesen Satz auf einen inhaltreicheren und analytisch einfacheren zurückzuführen.

Ich stütze mich dabei auf den folgenden, von Herrn H. Brunn*) bewiesenen Satz:

Es seien J_0 und J_1 zwei beliebige convexe Körper, die nicht mit einander sowohl ähnlich wie ähnlich gelegen sind, vom Volumen W_0 bez. W_1. Verbindet man jeden Punkt von J_0 mit jedem von J_1 und teilt die Verbindungsstrecke jedesmal in einem festen Verhältnisse $t : 1 - t$, wobei $0 < t < 1$ ist, so erfüllt die Menge aller verschiedenen solchen Teilpunkte wieder einen convexen Körper J_t und gilt für dessen Volumen W_t die Ungleichung:

$$\sqrt[3]{W_t} > (1-t)\sqrt[3]{W_0} + t\sqrt[3]{W_1}.$$

Wir nehmen nun an, es seien die Flächen F und G nicht einander ähnlich und ähnlich gelegen, und können alsdann diesen Satz in der Weise anwenden, dafs wir für J_0 und J_1 die zwei convexen Körper nehmen, welche von zwei der oben betrachteten Flächen $F_A(r)$ für irgend zwei Werte $r = r_0$ und $r = r_1$ begrenzt werden; für J_t erscheint hierbei der von $F_A(r)$ für $r = (1-t)r_0 + tr_1$ begrenzte Körper. Die entstehende Ungleichung kommt nun darauf hinaus, dafs die durch

$$w = \sqrt[3]{W(r)}$$

für $r \geqq 0$ dargestellte Curve, wenn man r und w als Abscisse und Ordinate in einer Ebene deutet, überall convex auf ihrer der r-Axe abgewandten Seite ist, oder anders formulirt, dafs

$$\frac{d^2\sqrt[3]{W(r)}}{dr^2} < 0$$

ist im ganzen Bereiche $r \geqq 0$.

Führen wir den in 3. gewonnenen Ausdruck von $W(r)$ ein, so mufs danach

$$-\frac{1}{2}[W(r)]^{\frac{5}{3}} \frac{d^2[W(r)]^{\frac{1}{3}}}{dr^2}$$

$$= (C_1^2 - C_0C_2) + (C_1C_2 - C_0C_3)r + (C_2^2 - C_1C_3)r^2$$

*) Inauguraldissertation, München 1887, S. 31. — Herr Brunn hat freilich an der angeführten Stelle ausdrücklich die Meinung geäufsert: „Zum Beweise der Maximaleigenschaft der Kugel läfst sich dieser Satz nicht verwenden“.

für alle Werte $r \geqq 0$ stets > 0 sein. Hierfür wieder sind die zwei Bedingungen

$$\text{I)} \qquad C_1^2 - C_0 C_2 > 0,$$

$$\text{II)} \qquad C_2^2 - C_1 C_3 > 0$$

oder also die Ungleichungen

$$\frac{C_0}{C_1} < \frac{C_1}{C_2} < \frac{C_2}{C_3}$$

erforderlich und hinreichend.

Beachten wir, dafs wir die Rollen der beiden Flächen F und G vertauschen können und dafs alsdann an Stelle der Gröfsen C_0, C_1, C_2, C_3 diese Gröfsen in umgekehrter Folge treten, so sehen wir, dafs vermöge dieser Reciprocität die Ungleichung I), für zwei beliebige convexe Flächen genommen, bereits die Ungleichung II) in sich schliefst.

Nun leiten wir aus I):

$$C_1^4 > C_0^2 C_2^2,$$

dann aus II):

$$C_0^2 C_2^2 > C_0^2 C_1 C_3,$$

also mit Elimination von C_2:

$$C_1^3 > C_0^2 C_3$$

her. Nehmen wir jetzt für die Aichfläche der Distanzen eine Kugelfläche vom Radius 1, so ist

$$C_3 = \frac{4\pi}{3},$$

ferner C_0 das Volumen und $3C_1$ die Oberfläche des von F begrenzten Körpers im gewöhnlichen Sinne; setzen wir

$$C_0 = \frac{4\pi}{3} R^3,$$

so folgt daher $3C_1 > 4\pi R^2$, d. i. der Satz, dafs unter allen convexen Körpern von gleichem Volumen die Kugel die kleinste Oberfläche besitzt.

Diese Eigenschaft der Kugel erscheint aber hier als Ausflufs des weit allgemeineren und analytisch einfacheren Theorems

$$C_1^2 > C_0 C_2,$$

welches sich auf zwei beliebige convexe Körper bezieht. Dieses Theorem liefert im Speciellen, wenn man für einen der Körper die Kugel nimmt, zwei neue, die Kugel unter allen convexen Körpern charakterisirende Beziehungen: Nämlich unter allen convexen

Körpern von gleicher Oberfläche besitzt die Kugel erstens **die kleinste mittlere Krümmung**, zweitens **das gröfste Product aus Volumen und mittlerer Krümmung**. Aus beiden Sätzen zugleich resultirt als Folgerung jene bekannte isoperimetrische Eigenschaft der Kugel.

5. Der Schlufs des Vortrags brachte noch ein Theorem über die Bestimmung einer geschlossenen convexen Fläche, wenn für sie in jedem Punkte die Gaufsische Krümmung als Funktion der Normalenrichtung in dem Punkte beliebig vorgeschrieben ist.

Zur Theorie der geodätischen Linien.

Von **Paul Stäckel** in Kiel.

1. Ein bekanntes, in die Lehrbücher übergegangenes Theorem von J. Liouville (Journal de Mathém. [1] XI. S. 345. 1846) besagt, dafs die geodätischen Linien der Flächen, bei denen das Quadrat des Linienelementes ds auf die Form

$$ds^2 = [U(u) - V(v)]\ (du^2 + dv^2)$$

gebracht werden kann, sich durch Quadraturen bestimmen lassen. Bewegt sich nämlich auf einer solchen Fläche ein materieller Punkt ohne den Einflufs äufserer Kräfte, so wird seine Bewegung bei geeigneter Wahl der (constanten) Geschwindigkeit durch die Gleichungen dargestellt:

$$\int \frac{U du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int \frac{V dv}{\sqrt{\alpha - V}} = t - \tau,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}} = \beta,$$

in denen t die Zeit bedeutet, während α, β, τ Constanten bezeichnen, deren Werte durch die Anfangsbedingungen der Bewegung bestimmt sind.

Unter gewissen, sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Functionen $U(u)$ und $V(v)$ kann man, wie im Folgenden gezeigt werden soll, aus den Gleichungen von Liouville Schlüsse auf den Verlauf der geodätischen Linien ziehen.

2. Es seien $\varphi(u)$, $\chi(u)$, $f(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$, $g(v)$ Functionen des hingeschriebenen Argumentes, die folgenden Bedingungen genügen: In einem Gebiete $\mathfrak{G}$ der Veränderlichen u und v, das durch die Ungleichheiten

$$a \leqq u \leqq A, \quad b < v \leqq B$$

erklärt ist, sollen **erstens** alle sechs Functionen eindeutig, endlich und stetig sein. **Zweitens** sollen die Functionen $f(u)$ und $g(v)$ in $\mathfrak{G}$, die Grenzen eingeschlossen, wesentlich positive, von Null verschiedene Werte haben, während **drittens** $\varphi(u)$, $\chi(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$ in $\mathfrak{G}$ ebenfalls das Vorzeichen nicht wechseln, jedoch an einzelnen Stellen verschwinden dürfen. Endlich soll **viertens** die Determinante $\varphi\omega - \psi\chi$ in $\mathfrak{G}$ beständig positiv oder beständig negativ sein und niemals gleich Null werden.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt ein von Herrn Staude (Math. Annalen 29. S. 469. 1887, Journal für Mathem. 105. S. 303. 1890) bewiesenes Theorem, wonach durch das Umkehrproblem

$$\int_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}} = x,$$

$$\int_a^u \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}} = y$$

die Veränderlichen u und v für das Gebiet $\mathfrak{G}$ als eindeutige, endliche, stetige, gerade Functionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente x und y definirt werden, welche zweifach periodisch sind mit den Periodensystemen:

$$2\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}}, \qquad 2\omega_{12} = 2\int_b^B \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}}$$

und

$$2\omega_{21} = 2\int_a^A \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}}, \qquad 2\omega_{22} = 2\int_b^B \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}};$$

den Wurzeln ist überall das positive Vorzeichen zu geben. Dabei werden alle Wertepaare x, y, die dasselbe dem Gebiete $\mathfrak{G}$ angehörige Wertepaar u_1, v_1 liefern, dargestellt durch die Formeln:

$$x = \pm x_1 + 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21},$$
$$y = \pm y_1 + 2m_1\omega_{12} + 2m_2\omega_{22},$$

wo m_1 und m_2 beliebige ganze Zahlen bedeuten und das Wertepaar x_1, y_1 dem Gebiete

$$x = \varrho\omega_{11} + \sigma\omega_{21}, \quad y = \varrho\omega_{21} + \sigma\omega_{22} \quad [\varrho,\ \sigma = (0\ldots 1)]$$

angehört und das einzige der verlangten Art in diesem Gebiete ist.

3. Dafs man das vorstehende Theorem für die Untersuchung der geodätischen Linien auf den betrachteten Flächen verwerten kann, ist bereits bemerkt worden (Stäckel, Math. Annalen 25. S. 95. 1889, Staude, Journal für Mathematik 105. S. 322. 1890), ohne dafs jedoch dieser Gedanke genauer durchgeführt worden wäre. Das soll jetzt geschehen, und es soll im Besonderen der Satz bewiesen werden, dafs die geodätischen Linien, sobald das Theorem von Herrn Staude anwendbar ist, entweder geschlossen sind oder ein gewisses Gebiet der Fläche überall dicht bedecken.

Damit die beiden Systeme von Gleichungen, um die es sich handelt, in Übereinstimmung gebracht werden, hat man

$$\varphi(u) = U(u), \qquad \psi(v) = -V(v),$$
$$\chi(u) = 1, \qquad \omega(v) = -1,$$
$$(u-a)(A-u)f(u) = U(u) - \alpha, \quad (v-b)(B-v)g(v) = \alpha - V(v)$$

zu setzen und zu untersuchen, wann die vier Bedingungen erfüllt sind, die bei dem Theorem von Herrn Staude vorausgesetzt werden.

Da der Ausdruck

$$[U(u) - V(v)](du^2 + dv^2)$$

das Quadrat des Linienelementes der betrachteten Fläche darstellt, so versteht sich von selbst, dafs $U(u)$ und $V(v)$ eindeutig sind. Dagegen wird die Endlichkeit und Stetigkeit in gewissen singulären Punkten und Curven aufhören können, die auf der Fläche markirt werden mögen. Ebenso erkennt man, dafs $U(u) - V(v)$ im Allgemeinen positiv sein mufs und nur in singulären Punkten verschwinden kann, die ebenfalls zu markiren sind. Endlich denke man sich als singuläre Curven auch diejenigen Curven $u =$ const. und $v =$ const. ausgezeichnet, in denen $U(u)$ und $V(v)$ mit Zeichenwechsel verschwinden. Alsdann sind in einem Flächenstücke $\mathfrak{F}$, das keine der genannten singulären Punkte und Curven enthält, die Bedingungen 1), 3) und 4) erfüllt.

Betrachtet man jetzt einen Punkt u_0, v_0, der innerhalb eines solchen Flächenstückes $\mathfrak{F}$ liegt, so gehen von ihm unendlich viele geodätische Linien aus, von denen jede einzelne durch die Richtung ihrer Tangente im Punkt u_0, v_0 oder, was dasselbe ist, durch den Wert des Verhältnisses

$$p = \frac{dv}{du}$$

charakterisirt ist, der im Punkte u_0, v_0 für sie statt hat. Befindet

sich der bewegte Punkt zur Zeit $t = 0$ an der Stelle u_0, v_0, so lauten die Integralgleichungen der Bewegung:

$$\int_a^u \frac{U du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^v \frac{V dv}{\sqrt{\alpha - V}} = t + \int_a^{u_0} \frac{U du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

$$\int_a^u \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^v \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}} = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}};$$

hierin ist die Constante α durch den Anfangswert p_0 von p eindeutig bestimmt, denn aus der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{U(u_0)-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha - V(v_0)}} \cdot p_0 = 0$$

ergiebt sich:

$$\alpha = \frac{V(v_0) + U(u_0) p_0^2}{1 + p_0^2}.$$

Durchläuft also p_0^2 das Intervall $(0 \ldots + \infty)$, so durchläuft α stetig die Werte von $V(v_0)$ bis $U(u_0)$.

Wird der Constanten α ein bestimmter Wert des Intervalles $[V(v_0) \ldots U(u_0)]$ beigelegt, so hat man die Ausdrücke

$$U(u) - \alpha = \frac{U(u) - V(v_0) + [U(u) - U(u_0)] p_0^2}{1 + p_0^2}$$

und

$$\alpha - V(v) = \frac{V(v_0) - V(v) + [U(u_0) - V(v)] p_0^2}{1 + p_0^2}$$

zu untersuchen. Beide haben im Punkte u_0, v_0 einen wesentlich positiven Wert, und es kommt daher alles darauf an, ob die Gleichungen $U(u) - \alpha = 0$ und $\alpha - V(v) = 0$ je zwei der Gröfse nach aufeinander folgende einfache Wurzeln a und A, b und B besitzen, zwischen denen beziehungsweise u_0 und v_0 liegt. Dann und nur dann, wenn diese Forderung erfüllt ist, besteht die Bedingung 2). Damit aber die Bedingungen 1), 3) und 4) erfüllt bleiben, mufs das Gebiet

$$a \leqq u \leqq A, \quad b \leqq v \leqq B,$$

das mit $\mathfrak{G}_\alpha$ bezeichnet werde, ganz innerhalb eines Flächenstückes $\mathfrak{F}$ der vorher definirten Beschaffenheit liegen. Wenn das zutrifft, soll α ein zulässiger Wert und $\mathfrak{G}_\alpha$ ein zulässiges Gebiet heifsen.

Nunmehr sei α_0 ein zulässiger Wert von α, also

$$U(u) - \alpha_0 = (u - a_0)(A_0 - u) f_0(u),$$
$$\alpha_0 - V(v) = (v - b_0)(B_0 - v) g_0(v),$$

wo $f_0(u)$ und $g_0(v)$ in dem Gebiete $\mathfrak{G}_{\alpha_0}$ wesentlich positiv ausfallen. Läfst man alsdann α von α_0 zu einem hinreichend nahen benach-

barten Werte α_1 übergehen, so folgt aus der Stetigkeit von $U(u)$ und $V(v)$, dafs auch zu α_1 Wurzelpaare a_1 und A_1, b_1 und B_1 der verlangten Beschaffenheit gehören, und es wird auch bei gehöriger Kleinheit der Differenz $\alpha_1 - \alpha_0$ das Gebiet $\mathfrak{G}_{\alpha_1}$ zulässig sein. Mithin wird sich das Theorem von Herrn Staude, wenn es für einen Anfangswert p_0 anwendbar ist, auch auf ein ganzes Intervall von Anfangswerten $p = (p_1 \dots p_2)$ anwenden lassen, innerhalb dessen p_0 liegt, oder es wird, geometrisch gesprochen, einen gewissen Winkelraum zulässiger Anfangsrichtungen geben, die von dem Punkte u_0, v_0 ausgehen. Möglicherweise umfafst dieser Winkelraum sämtliche Anfangsrichtungen, möglicherweise nur einen Teil, und in diesem Falle kann es auch mehrere getrennte Winkelräume zulässiger Anfangsrichtungen geben, die entweder an einander stofsen oder durch Winkelräume unzulässiger Anfangsrichtungen getrennt sind.

4. Nach diesen Vorbereitungen sei α ein Wert, zu dem ein zulässiges Gebiet $\mathfrak{G}_\alpha$ gehört. Denkt man sich in den Integralgleichungen der Bewegung die rechten Seiten durch x und y ersetzt, so werden dadurch, nach dem Theorem von Herrn Staude, u und v als eindeutige, endliche, stetige, gerade Functionen der Argumente x und y definirt, die zweifach periodisch sind mit den Periodensystemen:

$$2\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{U du}{\sqrt{U-\alpha}}, \quad 2\omega_{12} = 2\int_b^B \frac{V dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

und

$$2\omega_{21} = 2\int_a^A \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}}, \quad 2\omega_{22} = 2\int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

In diesen Functionen u und v von x und y ist alsdann

$$x = t + \int_a^{u_0} \frac{U du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

$$y = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-a}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

zu setzen, sodafs sich u und v als eindeutige, stetige, endliche Functionen von t ergeben. Da sich u und v, als Functionen von x

und y angesehen, in Fourier'sche Reihen zweier Veränderlicher entwickeln lassen, die nach Vielfachen der Variablen

$$\xi = \pi \cdot \frac{x\omega_{22} - y\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \qquad \eta = \pi \cdot \frac{-x\omega_{21} + y\omega_{11}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}$$

fortschreiten, so werden u und v als Functionen von t sich als zweifach unendliche trigonometrische Reihen darstellen lassen, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von zwei linearen Functionen der Zeit t fortschreiten (vergl. auch Staude, Math. Annalen 29. S. 484. 1887).

Es läfst sich zeigen, dafs die Curven, die man erhält, indem u und v gleich den so definirten Functionen von t gesetzt werden, entweder geschlossen sind oder das Gebiet $\mathfrak{G}_\alpha$ überalldicht bedecken.

Ist nämlich u_1, v_1 irgend eine Stelle des Gebietes $\mathfrak{G}_\alpha$, die auch mit der Stelle u_0, v_0 zusammenfallen darf, so werden u und v, wenn man sie zunächst wieder als Functionen von x und y ansieht, die Werte u_1 und v_1 für

$$x = x_1 + 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21},$$
$$y = y_1 + 2m_1\omega_{12} + 2m_2\omega_{22}$$

annehmen, wo m_1 und m_2 wieder beliebige ganze Zahlen bedeuten und wo x_1 und y_1 dem Gebiete

$$x = \varrho\omega_{11} + \sigma\omega_{21}, \quad y = \varrho\omega_{12} + \sigma\omega_{22} \quad [\varrho, \sigma = (0 \ldots 1)]$$

angehören. Bei der weiteren Untersuchung sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Hat erstens das Verhältnis

$$\frac{\omega_{12}}{\omega_{22}} = q$$

keinen rationalen Wert, so lassen sich nach einem bekannten Satze (vergl. etwa Kronecker, Berliner Sitzungsberichte 1884. S. 107; Werke Bd. 3. S. 31) beliebig viele Paare ganzer Zahlen μ_1, μ_2 derart bestimmen, dafs

$$y_1 + 2\mu_1\omega_{12} + 2\mu_2\omega_{22}$$

irgend einem gegebenen Werte y_2 beliebig nahe kommt. Hieraus folgt aber vermöge der Stetigkeit der Functionen u und v von x und y, dafs zu den Werten

$$x = x_1 + 2\mu_1\omega_{11} + 2\mu_2\omega_{21},$$
$$y = y_2$$

Werte u_2 und v_2 von u und v gehören, die sich von u_1 und v_1 beliebig wenig unterscheiden.

Geht man nunmehr zu den geodätischen Linien zurück und wählt

$$y_2 = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - U}},$$

so folgt, dafs zur Zeit

$$t = x_1 + 2\mu_1\omega_{11} + 2\mu_2\omega_{21} - \int_a^{u_0} \frac{U du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^{v_0} \frac{V dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

der bewegte Punkt eine Stelle u_2, v_2 erreicht, die der gegebenen Stelle u_1, v_1 beliebig nahe kommt, und das tritt sogar beliebig oft ein, da es ja beliebig viele Paare ganzer Zahlen μ_1, μ_2 der verlangten Beschaffenheit giebt. Hieraus folgt unmittelbar, dafs die betrachtete geodätische Linie das Gebiet $\mathfrak{G}_\alpha$ überalldicht erfüllt.

Hat zweitens q einen rationalen Wert, so seien g_1 und g_2 diejenigen beiden ganzen Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, für die

$$2g_1\omega_{12} + 2g_2\omega_{22} = 0$$

wird, während

$$2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21} = 2\Omega$$

positiv ausfällt; da

$$\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21} = \int_a^A \int_b^B \frac{(U-V)\,du\,dv}{\sqrt{U-\alpha}\,\sqrt{\alpha - V}}$$

einen wesentlich positiven, von Null verschiedenen Wert hat, so kann Ω nicht verschwinden. In diesem Falle werden u und v zur Zeit

$$t = 2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21}$$

genau dieselben Werte u_0 und v_0 annehmen, die sie zur Zeit $t = 0$ hatten, denn das Wertepaar u_0, v_0 gehört ja bei ganzzahligem g_1 und g_2 zu

$$x = 2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21} + \int_a^{u_0} \frac{U du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{u_0} \frac{V dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

$$y = 2g_1\omega_{12} + 2g_2\omega_{22} + \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int^{u_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

Mithin ergiebt sich eine periodische Bewegung mit der Periode 2Ω, und die geodätischen Linien werden ge-

schlossene Curven, die innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}_\alpha$ verlaufen.

Wird α variirt, sodafs es stetig von einem zulässigen Werte α_0 zu einem benachbarten zulässigen Werte α_1 übergeht, so erfahren auch, wie man ohne Mühe beweist, die Perioden $2\omega_{12}$ und $2\omega_{22}$ stetige Änderungen, und dasselbe gilt, da

$$\omega_{22} = \int_b \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

von Null verschieden ist, auch von dem Quotienten

$$q = \frac{\omega_{12}}{\omega_{22}},$$

es sei denn, dafs q von α unabhängig ist und beständig denselben Wert behält. Um diesen Ausnahmefall vorweg zu erledigen, so giebt es in ihm für die zulässigen Werte von α, die dem Werte α_0 benachbart sind, je nachdem q rational oder irrational ist, entweder lauter geschlossene oder lauter überalldichte Bahnen des bewegten Punktes. Wenn aber q wirklich von α abhängt, so wird q stetig ein Intervall $(q_0 \ldots q_1)$ durchlaufen. Weil darin die rationalen Werte von q überalldicht verteilt sind, so gilt dasselbe von denjenigen Werten der Gröfse α in dem Intervall $(\alpha_0 \ldots \alpha_1)$, die geschlossene Bahnen liefern, oder mit anderen Worten: Abgesehen von dem schon erledigten Ausnahmefall sind in einem Winkelraum zulässiger Anfangsrichtungen diejenigen Anfangsrichtungen, die geschlossene Bahnen liefern, überalldicht verteilt, und zwar haben sie die Mächtigkeit des Inbegriffes der ganzen Zahlen.

5. Es möge noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dafs es Flächen der betrachteten Art giebt, bei denen die Bedingung 2) für keinen einzigen Punkt erfüllt ist. Das tritt zum Beispiel ein, wenn U oder V sich auf eine Constante reducirt, also wenn die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist. Die genauere Untersuchung läfst für diese Flächen eine Erscheinung erkennen, die erwähnt zu werden verdient. Ist die Fläche eine Rotationsfläche, so haben die geodätischen Linien unter gewissen Voraussetzungen, die in meiner Inauguraldissertation (Berlin 1885) präcisirt sind, die Eigenschaft, im Allgemeinen ein von zwei Parallelkreisen begrenztes Gebiet entweder überalldicht zu bedecken oder innerhalb eines solchen Gebietes geschlossen zu verlaufen. Betrachtet man aber die von Bour bestimmten Schraubenflächen, die durch Biegung aus der

Rotationsfläche hervorgehen (Journal de l'École polytechnique, Cahier 39, S. 82. 1862), so besitzen die entsprechenden geodätischen Linien im allgemeinen keine von beiden Eigenschaften. Es beruht das darauf, dafs die Rotationsfläche als aus unendlich vielen, aufeinander liegenden Schichten bestehend aufzufassen ist, die bei der Biegung aus einander gerollt werden.

Zum Beispiel läfst sich das Catenoid:

$$x = \sqrt{u^2 + a^2} \cdot \cos v, \quad y = \sqrt{u^2 + a^2} \cdot \sin v, \quad z = \int \frac{a\,du}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

durch Biegung in die geradlinige Schraubenfläche:

$$x = u \cdot \cos v, \qquad y = u \cdot \sin v, \qquad z = a v$$

überführen, wobei die Parallelkreise in Schraubenlinien, die Meridiane in gerade Linien verwandelt werden. Läfst man hierbei v von v_0 bis $v_0 + 2\pi$ wachsen, so ist klar, dafs bei der Rotationsfläche ein Meridian sich um 360^0 drehend die ganze Fläche durchläuft, während bei der Schraubenfläche eine Gerade um 360^0 gedreht und um eine Strecke der Länge a gehoben wird, sodafs man nur einen Gang der Fläche von der Höhe a erhält. Eine geodätische Linie, die auf der Rotationsfläche denselben Meridian zum zweiten Mal passirt, geht also auf der Schraubenfläche in einen neuen Gang über, sie kann sich daher nicht schliefsen oder wieder in die Nähe des Anfangspunktes der Bewegung kommen.

Hieraus folgt, dafs die Betrachtung der allen Biegungsflächen gemeinsamen Differentialgleichung der geodätischen Linien nicht immer ausreicht, um deren gestaltliche Verhältnisse zu erkennen, vielmehr kann auch die Beschaffenheit der gerade betrachteten besonderen Biegungsfläche von wesentlichem Einflufs sein.

Eine andere Frage wäre die, was an die Stelle des Theorems von Herrn Staude tritt, wenn die Bedingungen für die Functionen $\varphi(u)$, $\chi(u)$, $f(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$, $g(v)$ nicht erfüllt sind. Die genauere Untersuchung ergiebt, dafs das Theorem im Wesentlichen unverändert gilt, wenn die Determinante $\varphi\omega - \psi\chi$ in isolirten Punkten verschwindet, sodafs die Stellen der Fläche, an denen $ds = 0$ ist, nicht als singulär ausgeschieden zu werden brauchen. Dagegen ist die Bedingung, dafs $\varphi(u)$, $\chi(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$ das Zeichen nicht wechseln dürfen, von wesentlicher Natur, und es eröffnet sich hier ein Feld für weitere Untersuchungen, die zunächst an einfachen Beispielen, dann für allgemeinere Typen vorzunehmen eine lohnende Aufgabe sein wird.

Geodätische Linien und Poncelet'sche Polygone.

Von Wilh. Wirtinger in Innsbruck.

Im Anschlufs an die vorstehende Note des H. Stäckel ist es vielleicht von Interesse darauf hinzuweisen, dafs die Theorie der geschlossenen geodätischen Linien auf einer Fläche zweiter Ordnung als Grenzfall die Theorie der Poncelet'schen Polygone enthält. Dadurch wird nicht nur die Verbindung zwischen einem vielbehandelten Problem der synthetischen Geometrie und der Flächentheorie hergestellt, sondern man gewinnt auch an dem Grenzfall eine typische, in allen Einzelheiten ohne Mühe auszuführende Vorstellung von dem Verlauf der geodätischen Linien und der geschlossenen unter ihnen.

Man hat nur nötig, die gewöhnlichen Formeln und Sätze über geodätische Linien auf Flächen zweiter Ordnung auf die Focalellipse eines Systems von confocalen Flächen zweiter Ordnung anzuwenden, um zu sehen, dafs hier die geodätischen Linien in gebrochene, geradlinige Züge übergehen, deren Ecken eben auf der Focalellipse liegen und deren Winkel von den Normalen der Ellipse halbirt werden. Dieses Verhalten steht auch in voller Übereinstimmung mit der bekannten Fermat'schen Formulirung des Reflexionsgesetzes und der statischen Erklärung der geodätischen Linie als Gleichgewichtsfigur eines gespannten Fadens, sobald man nur die Ellipse als Lamelle auffafst und den Faden von einem Punkte der obern Seite der Lamelle über den Rand hin nach einem Punkte der untern Seite gespannt denkt.

Aus den elementaren Focaleigenschaften folgt dann unmittelbar, dafs ein solcher geodätischer Zug aus lauter Tangenten eines zur Ellipse confocalen Kegelschnittes besteht, und zwar einer Hyperbel, wenn eine und infolge dessen jede Seite des Zuges die Brennpunktstrecke kreuzt, sonst aber einer Ellipse. Das ist auch der Grenzfall eines bekannten Satzes über das Verhalten von geodätischen Linien und Krümmungslinien.

Man sieht also: Die geschlossenen geodätischen Linien des Ellipsoides gehen in diesem Grenzfall über in Poncelet'sche Polygone, welche der Ellipse eingeschrieben und einem confocalen Kegelschnitt umgeschrieben sind, und es können die Polygone von gerader Seitenzahl unmittelbar, diejenigen von ungerader Seitenzahl erst nach zweimaliger Umlaufung als geschlossene geodätische Linien aufgefafst werden.

Man hat sich nämlich zu denken, dafs bei jedesmaliger Begegnung mit der Ellipse der Zug von einer Seite der Lamelle auf die andere übertritt.

Ist die zu Grunde gelegte Ellipse ein Kreis, so werden die geschlossenen geodätischen Linien einfach die regulären eingeschriebenen Polygone, denen auch die Durchmesser beizuzählen sind.

Selbstredend kann man dieselben Betrachtungen für eine Parabel oder Hyperbel anstellen. Dabei ergeben sich für die Parabel gar keine geschlossenen geodätischen Linien, sondern diese erstrecken sich sämtlich ins Unendliche.

Das besprochene Grenzverfahren hat auch für complicirtere Fälle heuristischen Wert, denn beim Grenzübergang zu einer ebenen Lamelle gehen die geodätischen Linien immer in geradlinige Züge über, welche — singuläre Stellen ausgenommen — da, wo sie der Begrenzung der Lamelle begegnen, sich nach dem Reflexionsgesetz, aber auf der andern Seite der Lamelle fortsetzen.

Numerische Berechnung von Determinanten.

Von **E. Jürgens** in Aachen.

Trotz der Einfachheit und Übersichtlichkeit, welche das Bildungsgesetz der Determinanten auszeichnet, ist die numerische Berechnung derselben eine mühevolle Arbeit, welcher man am liebsten aus dem Wege geht, sobald der Grad der Determinante nicht ganz niedrig ist und ihre Elemente vielstellige Zahlen sind. So kommt es denn, dafs die Determinanten bei allgemeinen Untersuchungen zwar fortwährend gebraucht werden, für numerische Beispiele aber wenig Verwendung finden. Und doch kann man in der fundamentalen Bedeutung der Determinanten eine Aufforderung erblicken, auch die Frage ihrer numerischen Berechnung nicht ganz zu vernachlässigen.

Die folgende auf der Formel

$$D = \frac{\Delta}{x}$$

beruhende Methode, wo Δ die durch Weglassen der ersten Zeile und Colonne entstehende Unterdeterminante und x die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \cdots &= 1 \\ a_2 x + b_2 y + \cdots &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

bedeutet, ist offenbar dann von Vorteil, wenn die Berechung von x erheblich leichter geschieht wie die von D, was eintritt, sobald die Diagonalglieder die Summe der absoluten Werthe der andern Glieder in derselben Reihe überwiegen; denn dann hat man ein bequemes und sicheres Verfahren, um x mit jeder gewünschten Genauigkeit zu berechnen, und zwar braucht man nur Substitutionen allereinfachster Art nach einander anzuwenden. Wie die Rechnung dann verläuft, zeigt ein Beispiel.

$$\text{I)}\quad \begin{cases} 4671x - 112y - 274z - 37u = -200 \\ -102x + 2568y - 21z - u = -400 \\ 18x + 233y + 2750z + 147u = 300 \\ -54x + 219y + 134z + 3430u = 1000. \end{cases}$$

Da die rechten Seiten klein sind, so werden dieselben erst mit 1000 multiplicirt, darauf wird x durch $-43 + x$ ersetzt, d. h. man wendet die Substitution $x = -43 + \xi$ an und setzt wieder x an die Stelle von ξ; dadurch ändern sich die rechten Seiten und gehen über bez. in 853, -404386, 300774, 997678. Um nun auch in der zweiten Gleichung die rechte Seite zu verkleinern, wird $-157 + y$ für y gesetzt, wodurch die rechten Seiten bez. -16731, -1210, 337355, 1032061 werden. In dieser Weise führen die acht Substitutionen $-43 + x$, $-157 + y$, $123 + z$, $296 + u$, $-16 + z$, $5 + x$, $1 + y$, $-1 + u$, welche sich in die vier Substitutionen $-38 + x$, $-156 + y$, $107 + z$, $295 + u$ zusammenziehen lassen, die rechten Seiten über in die kleinen Werte 259, -726, -583, -936. Nachdem diese mit 1000 multiplicirt worden sind, werden die rechten Seiten von 259000, -726000, -583000, -936000 durch die Substitutionen $36 + x$, $-283 + y$, $-188 + 13 + z$, $-247 + u$ herabgedrückt auf 2059, 988, 150, -1419.

Hieraus folgt, dafs

$$\begin{aligned} x &= -0{,}038 + 0{,}000036 = -0{,}037964 \\ y &= -0{,}156 - 0{,}000283 = -0{,}156283 \\ z &= 0{,}107 - 0{,}000175 = 0{,}106825 \\ u &= 0{,}295 - 0{,}000247 = 0{,}294753 \end{aligned}$$

auf sechs Decimalen genau die Lösungen von I) sind und in die linken Seiten eingesetzt die Ergebnisse

$$\begin{aligned} &-200 - 0{,}002059 \\ &-400 - 0{,}000988 \\ &300 - 0{,}000150 \\ &1000 + 0{,}001419 \end{aligned}$$

liefern.

Die für das Gleichungssystem hier gebrauchte Voraussetzung wird nun aber für gewöhnlich nicht erfüllt sein, z. B. nicht für

$$\text{II)}\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{5}x + \sqrt{8}y + 3z + 4u = 1 \\ 6x + \sqrt{3}y + 4z + \frac{1}{6}\sqrt{2}u = 0 \\ 3x + 5y + \sqrt[3]{7}z + 2\frac{1}{3}u = 0 \\ \sqrt{2}x + (6+\sqrt{3})y + 5\frac{1}{8}z + (1+\sqrt{2})u = 0. \end{array}\right.$$

Dann kommt es darauf an, das Gleichungssystem passend umzuformen und zwar mit Hülfe von Multiplicatoren; bei ihrer Aufsuchung wird man sich den Vorteil nicht entgehen lassen, für die Coefficienten nur ganz roh angenäherte Werte zu benutzen; im vorliegenden Falle findet man für

$$\begin{array}{l} 1{,}7x + 2{,}8y + 3z + 4u = 1 \\ 6x + 1{,}7y + 4z + 0{,}24u = 0 \\ 3x + 5y + 1{,}9z + 2{,}33u = 0 \\ 1{,}4x + 7{,}7y + 5{,}1z + 2{,}4u = 0 \end{array}$$

als geeignetes System von Multiplicatoren:

$$\text{M)}\quad \left\{\begin{array}{r|r|r|r} -2 & -4 & 3 & 10 \\ 5 & -2 & 3 & -3 \\ 10 & 5 & -10 & 2 \\ -7 & 2 & 5 & -4. \end{array}\right.$$

Diese Multiplicatoren wandeln II) in I) um, falls die Coefficienten von II) auf zwei Decimalen genau genommen werden; benutzt man jedoch bis auf acht Decimalen genaue Werte, wobei dann $\sqrt{2} = 1{,}41421356$; $\sqrt{3} = 1{,}73205081$; $\sqrt[3]{5} = 1{,}70997595$; $\sqrt[3]{7} = 1{,}91293118$ ist, so erhält man das Gleichungssystem:

$$\text{III)}\quad \left\{\begin{array}{l} 46{,}680553x - 1{,}120956y - 2{,}745688z \\ \qquad - 0{,}387650u = -2 \\ -1{,}011477x + 25{,}686292y - 0{,}185344z \\ \qquad + 0{,}023680u = -4 \\ 0{,}200996x + 2{,}341687y + 27{,}495688z \\ \qquad + 1{,}444842x = 3 \\ -0{,}557094x + 2{,}159916y + 1{,}325862z \\ \qquad + 34{,}302706u = 10. \end{array}\right.$$

Da dieses Gleichungssystem angenähert mit dem oben aufgelösten übereinstimmt, so werden auch die Lösungen in den ersten Decimalstellen übereinstimmen. In der That multiplicirt man zunächst auf beiden Seiten mit 10^6, um das Komma zu beseitigen, und darauf die rechten Seiten allein mit 10^3, um die drei ersten Decimalen zu finden, so erteilen die Werte -38, -156, 107 und 295 für x, y, z und u eingesetzt den linken Seiten die Werte -2007137244, -3981471634, 2995325986, 9945388180; oder mit anderen Worten das Gleichungssystem ändert sich durch die Substitutionen $-38+x$, $-156+y$, $107+z$, $295+u$ in der Weise, dafs die rechten Seiten von den ursprünglichen Werten -2000000000, -4000000000, 3000000000, 10000000000 übergehen in die ihrem absoluten Werte nach erheblich kleineren 7137244, -18528366, 4674014, 54611820. Weiter werden die rechten Seiten herabgedrückt durch die Substitutionen $-1+y$ und $2+u$ für y und u auf 6791588, 7110566, 4126017, -11833676, und da diese Werte erheblich kleiner sind als die Hälften der Diagonalelemente in den zugehörigen Gleichungen, so sind die Lösungen bis auf drei Decimalen ganz genau:

$$\begin{aligned} x &= -0{,}038 \\ y &= -0{,}157 \\ z &= 0{,}107 \\ u &= 0{,}297. \end{aligned}$$

Zur successiven Bestimmung der weiteren Decimalen werden die rechten Seiten zunächst mit 10 multiplicirt und darauf durch die Substitutionen $1+x$, $3+y$, $1+z$, $-4+u$ erniedrigt, dann wieder die übrig bleibenden Reste mit 10 multiplicirt und durch die Substitutionen $5+x$, $4+u$, $4+z$, $-2+y$, $1+x$, $-1+u$ erniedrigt, dann die Reste wieder mit 10 multiplicirt und durch die Substitutionen $-3+x$, $4+y$, $4+z$, $4+u$, $1+x$ erniedrigt und endlich die mit 10 multiplicirten Reste durch $-3+x$, $4+y$, $-1+z$ erniedrigt.

Man findet so für x den auf sieben Decimalen genauen Wert

$$x = -0{,}038 + 0{,}0001 + 0{,}00006 - 0{,}000002 - 0{,}0000003$$

oder

$$x = -0{,}0378423.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\begin{aligned} y &= -0{,}1567156 \\ z &= 0{,}1071439 \\ u &= 0{,}2966340. \end{aligned}$$

Aus der angestellten Rechnung gehen aufserdem noch die beim Einsetzen dieser Werte rechts verbleibenden Reste hervor.

Da für die zu II) zugehörige Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{5} & \sqrt{8} & 3 & 4 \\ 6 & \sqrt{3} & 4 & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ 3 & 5 & \sqrt[3]{7} & 2\frac{1}{3} \\ \sqrt{2} & 6+\sqrt{3} & 5\frac{1}{8} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

die unmittelbare Ausrechnung der Unterdeterminante $\varDelta$ den Wert

$$\varDelta = 13{,}7217209$$

liefert, so ist

$$D = -\frac{13{,}7217209}{0{,}0378423} = -362{,}6027.$$

Sollte nun für den Wert D eine noch gröfsere Genauigkeit verlangt werden, so müfsten zunächst die Elemente von D auf mehr wie acht Decimalen berechnet werden. Das alte Multiplicatorensystem M) würde dann bleiben, und auch das Gleichungssystem III) würde sich nur wenig ändern, so dafs die neu anzustellende Rechnung nicht allzugrofs sein würde.

An dem gewählten Beispiele ist das Verfahren bis zu Ende durchgeführt worden; wie freilich die Aufsuchung der Multiplicatoren rationell geschehen kann, dieses wird erst aus der folgenden Betrachtung erhellen.

Zur Berechnung der Determinante fünften Grades

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & \sqrt[3]{5} & \sqrt{8} & 3 & 4 \\ a_3 & 6 & \sqrt{3} & 4 & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ a_4 & 3 & 5 & \sqrt[3]{7} & 2\frac{1}{3} \\ a_5 & \sqrt{2} & 6+\sqrt{3} & 5\frac{1}{8} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix},$$

deren Unterdeterminante den bereits gefundenen Wert $-362{,}6027$ hat, mufs man zunächst geeignete Multiplicatoren für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 u + \varepsilon_1 v &= 1 \\ \alpha_2 x + 1{,}7y + 2{,}8z + 3u + 4v &= 0 \\ \alpha_3 x + 6y + 1{,}7z + 4u + 0{,}24v &= 0 \\ \alpha_4 x + 3y + 5z + 1{,}9u + 2{,}33v &= 0 \\ \alpha_5 x + 1{,}4y + 7{,}7z + 5{,}1u + 2{,}4v &= 0 \end{aligned}$$

suchen, wo α_1 den Hauptteil von a_1, β_1 den Hauptteil von b_1 u. s. w. bezeichnet. Ein Teil dieser Arbeit ist bereits geleistet, indem offenbar das obige Multiplicatorensystem M) auf die vier letzten Gleichungen angewandt, diesen nahezu bereits die gewünschte Form ertheilt; nur die Coefficienten von x werden im allgemeinen der Voraussetzung nicht genügen, klein genug zu sein. Man wird nun zunächst geeignete Multipla der neuen vier letzten Gleichungen von der ersten abziehen, so dafs man eine erste Gleichung erhält, in welcher der Coefficient von x die andern Coefficienten stark überwiegt, und die so gewonnene Gleichung dann ihrerseits weiter benutzen, damit für die vier letzten Gleichungen der erste Coefficient klein genug ausfalle. Hat man auf diese Weise ein geeignetes Multiplicatorensystem gefunden, so kann man es oft zweckmäfsig dann noch durch ein anderes mit kleineren Zahlen, die ungefähr dieselben Verhältnisse haben, ersetzen.

Wie das Verfahren fortschreitet zu Determinanten sechsten und höheren Grades, leuchtet ein; und zwar treten, je höher der Grad der Determinante wird, die demselben innewohnenden Vorzüge um so mehr hervor. Was die dabei aufzuwendende Arbeit anbetrifft, so spielt bei der Aufsuchung der Multiplicatoren die Vielstelligkeit der Elemente keine Rolle; sie macht sich, um an das gewählte Beispiel anzuknüpfen, erst bei Aufstellung und Auflösung des Gleichungssystems III) geltend, aber doch in bescheidenem Mafse. Hervorzuheben ist, dafs die Rechnung gleichmäfsig und sicher vorschreitet und eine nachträgliche Steigerung der Genauigkeit verhältnifsmäfsig leicht ermöglicht; auch gestattet sie eventuell wünschenswerte kleine Änderungen an den Elementen der Determinante am Schlufs noch anzubringen und den Einflufs dieser Änderungen zu überschlagen.

Über eine Aufgabe der kaufmännischen Arithmetik.

Von **H. v. Mangoldt** in Aachen.

Wenn ein Kapitalist ein 4prozentiges Wertpapier, dessen Rückzahlung nach einem gegebenen Plane zum Nennwert erfolgt, zum Kurse von 80 Prozent erwirbt, so machen die Zinsen, welche er jährlich erhält, nicht nur 4 Prozent, sondern 5 Prozent des Ankaufspreises aus. Und zu den Zinsen tritt noch die Aussicht auf einen einmaligen Gewinn von 20 Prozent des Nennwertes bei der Rückzahlung. Ist nun die Aussicht auf einen solchen einmaligen

Gewinn bei dem oben erwähnten oder irgend einem anderen Geschäft ähnlicher Art als gleichwertig mit einer weiteren Erhöhung des Zinsertrages des in dem Geschäft steckenden Kapitales anzusehen?

In dem — bei amerikanischen Eisenbahn-Schuldverschreibungen die Regel bildenden — Fall, dafs der Nennwert des Wertpapiers zu einem im Voraus festgesetzten Zeitpunkt zurückgezahlt wird, kann hierüber kaum ein Zweifel bestehen. Denn in diesem Fall könnte ein dem Ankauf des Wertpapieres genau entsprechendes Geschäft auch mit einer Sparkasse abgeschlossen werden, welche die Zinsen in bestimmten Zeitabschnitten, etwa jährlich, gutschreibt und mit dem übrigen Guthaben weiter verzinst, sobald nur der Zinsfufs, den sie gewährt, richtig bemessen wird. Wenn beispielsweise dem Kapitalisten, welcher Gelegenheit hat, eine 4prozentige nach 30 Jahren zum Nennwert rückzahlbare Schuldverschreibung zum Kurse 80 Prozent zu erwerben, eine Sparkasse zur Verfügung stände, welche auf die gemachten Einlagen jährlich mehr als 5 Prozent vergütete, und er, anstatt den in Erwägung gezogenen Ankauf des Wertpapiers wirklich abzuschliefsen, das dafür bestimmte Geld bei der Sparkasse einlegte, so könnte er auf je 80 M. ursprüngliche Einlage jährlich 4 M. Zinsen abholen, ohne dadurch die gutgeschriebenen Zinsen völlig zu erschöpfen. Sein Guthaben würde also trotz der regelmäfsigen Erhebung jener 4 M. Zinsen allmählich wachsen, und durch richtige Bemessung des Zinsfufses der Sparkasse würde sich erreichen lassen, dafs nach 30 Jahren auf je 80 Mark der ursprünglichen Einlage aufser den dann zum letzten mal zu erhebenden 4 M. Zinsen ein Guthaben von genau 100 M. vorhanden wäre. Der unbekannte Zinsfufs, den die Sparkasse gewähren müfste, um diese Bedingungen zu erfüllen, stimmt mit demjenigen überein, den der Kapitalist, falls er die Schuldverschreibung unter den angegebenen Umständen ankaufte, auf sein in diesem Geschäft steckendes Geld thatsächlich erzielen würde.

Erfolgt die Tilgung einer Reihe von Schuldverschreibungen nicht auf einmal zu einem bestimmten Zeitpunkt, sondern allmählich im Wege jährlicher Ausloosungen, so ist der Erwerber eines einzelnen Stückes allerdings dem Spiel des Zufalls unterworfen, indem sein Stück möglicherweise schon nach einem Jahre, vielleicht aber auch erst nach 2 oder 3 oder noch mehr Jahren ausgeloost werden kann. Aber wenn die Tilgung nach einem feststehenden Plane erfolgt, so haben alle diese Möglichkeiten bestimmte zahlenmäfsig angebbare Wahrscheinlichkeiten, und wenn man die Hoffnungen, welche der Erwerber eines einzelnen Stückes sich vernünftigerweise machen darf,

mit ihren mathematischen Werten in Ansatz bringt, so findet man, daſs er für sein Anlagekapital auf genau denselben Ertrag Aussicht hat wie ein Groſskapitalist, der sämtliche Stücke der betrachteten Anleihe auf einmal erwerben und sich dadurch den Wirkungen des Zufalls entziehen würde. Ein solcher Groſskapitalist würde durch Bezahlung des Ankaufspreises einfach den Anspruch erwerben, bis zum Ende der Laufzeit der Anleihe Jahr für Jahr diejenigen im Voraus festgesetzten Beträge zu erhalten, welche der Schuldner zum Zweck der Verzinsung und Tilgung der Anleihe zugesichert hat. Ein derartiges Geschäft könnte aber wieder ganz ebenso gut mit einer Sparkasse abgeschlossen werden, wenn diese einen genügend hohen Zinsfuſs gewährte. Auch im gegenwärtigen Fall ist also die Zusicherung eines einmaligen Gewinns bei der Rückzahlung als gleichwertig mit einer Erhöhung des Zinsertrages anzusehen.

Der unbekannte Zinsfuſs π, zu welchem sich das in einem Geschäft der in Rede stehenden Art steckende Kapital thatsächlich verzinst, ist am einfachsten dadurch zu finden, daſs man nicht für π selbst, sondern statt dessen für den zugehörigen Zinsfactor

$$r = 1 + \frac{\pi}{100}$$

eine Gleichung ansetzt.

Wenn ein Kapitalist Stücke einer Anleihe, welche mit p Prozent jährlich verzinst und nach einer ganzen Zahl n von Jahren zum Nennwert zurückgezahlt wird, zum Kurse c erwirbt, so ergiebt sich der Zinsfactor r, welcher dem von ihm thatsächlich erzielten Zinsertrage entspricht, aus der Gleichung

$$c r^n - p(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1) - 100 = 0,$$

die durch Multiplication mit $(r-1)$ auf die einfachere Form

$$(1) \qquad r^n[cr - (c+p)] - [100r - (100+p)] = 0$$

gebracht werden kann.

Diese Gleichung hat, da die Reihe der Coefficienten nur 2 Zeichenwechsel darbietet, auſser der Wurzel $r = 1$ nur noch eine reelle positive Wurzel. Diese letztere liegt oberhalb 1 und ist eben der gesuchte Zinsfactor. Da man von vorn herein weiſs, in welcher Gegend man sie zu suchen hat, so kann sie durch wenige Proben in kürzester Zeit mit groſser Schärfe bestimmt werden.

Bei anderen Arten der Tilgung treten an die Stelle der Gleichung (1) verwickeltere Gleichungen, welche sich indessen in den praktisch vorkommenden Fällen selbst dann noch, wenn besondere Neben-

umstände wie z. B. eine dem Beginn der Tilgung vorangehende Wartezeit oder ein von den Zinsen abgehender Steuerabzug zu berücksichtigen sind, auf solche Formen bringen lassen, dafs die Ermittelung des unbekannten Zinsfactors durch Probiren keine übermässige Rechenarbeit erfordert. Der Umstand, dafs der Grad der aufzulösenden Gleichung in der Regel hoch ist, indem derselbe mit der Anzahl der bis zum Ende der Tilgung noch bevorstehenden Zinszahlungstermine übereinstimmt oder dieselbe gar noch um einige Einheiten übersteigt, bildet für die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens kein Hindernis.

In den Lehrbüchern der kaufmännischen Arithmetik wird die Berechnung des Zinsertrages eines Wertpapieres unter Berücksichtigung der Verloosungschance in der Regel nicht behandelt. Dies gilt auch von dem auf die Berechnungen im Effektengeschäft besonders ausführlich eingehenden Lehrbuch von W. Christians, Das Rechnen im Bankgeschäft, Berlin, 4. Aufl. 1899. Doch ist hier ein besonderer Abschnitt (S. 83—90) der folgenden mit der obigen verwandten Aufgabe gewidmet: Welchen Kurs darf man für eine jährlich mit p Prozent vom Nennwert zu verzinsende und nach n Jahren zu pari rückzahlbare Anleihe bieten, wenn man eine πprozentige Verzinsung des in dem Geschäft steckenden Kapitals beansprucht? Und mit Hülfe der S. 141—144 beigegebenen Kurswert-Tabellen läfst sich, wenn die ganze Anleihe nach einer gegebenen Anzahl von Jahren auf einmal zurückgezahlt wird, auch die umgekehrte Aufgabe der Berechnung des Zinsertrages bei gegebenem Ankaufskurse näherungsweise lösen. Aber auf den praktisch besonders wichtigen Fall, dafs der Schuldner die Verzinsung und Tilgung der Anleihe durch Zahlung einer Reihe gleichbleibender Annuitäten bewirkt, sind diese Tabellen nicht anwendbar. Allerdings sagt Christians (S. 91), man könne diesen Fall dadurch erledigen, dafs man zunächst den Zeitpunkt ermittelt, zu welchem die Hälfte der Anleihe getilgt ist, und dann so rechnet, als ob die Rückzahlung der ganzen Anleihe zu diesem Zeitpunkt auf einmal erfolgte. Doch liefert dieses Verfahren nur eine rohe Annäherung und kann unter Umständen zu einem Werte des Zinsertrages führen, der von dem wirklichen Werte erheblich abweicht.

Als Beispiel werde eine 4prozentige Anleihe von 1000000 M. betrachtet, zu deren Verzinsung und Tilgung der Schuldner am Ende eines jeden Jahres 48915,05 M. aufwendet. Dann hat der Schuldner zur vollständigen Tilgung diese Annuität 43 Jahre lang und am Ende des 44. Jahres noch einen Restbetrag von 20003,00 M.

zu bezahlen, und die Hälfte der Anleihe ist nach 30 Jahren getilgt. Nimmt man nun an, dafs ein Käufer Stücke dieser Anleihe zum Kurse 78,20 Prozent erwirbt, so liefert das angegebene Näherungsverfahren mit Hülfe der Christians'schen Tabellen einen Ertrag von nur 5,500 Prozent, während die genaue Berechnung 5,688 Prozent ergiebt.



Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Hervorgegangen aus dem seit Jahren empfundenen Bedürfnisse nach einem engeren wissenschaftlichen und persönlichen Zusammenschluſs der Fachgenossen, hat sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gebildet mit der Aufgabe: „in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem collegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten“.

Dementsprechend bringen die Jahresberichte u. a. über die geschäftlichen Angelegenheiten und über die auf den Jahresversammlungen gehaltenen Vorträge Berichte, ferner alljährlich ein Verzeichnis der Mitglieder mit genauer Adressenangabe, Nekrologe über die verstorbenen Mitglieder mit beigefügten Bildnissen und enthalten auſserdem gröſsere Referate über einzelne Zweige der gesamten mathematischen Wissenschaften. Diese Referate, welche den gegenwärtigen Stand unserer bez. Kenntnisse in historisch-kritischer Darstellung zusammenfassen, sind von anerkanntem wissenschaftlichen Werte; sie bieten jedem die Möglichkeit, einen Einblick in die geistigen Bestrebungen der Gegenwart zu gewinnen, wie ihn auch derjenige besitzen sollte, der durch seinen Beruf mehr oder weniger an der selbstthätigen Fortbildung der Wissenschaft gehindert ist.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. gr. 8. geh.
I. Band. 1891. Im Auftrage des Vorstandes hrsg. von G. Cantor, W. Dyck und E. Lampe. 1892. n. *M.* 7.60.

Enthaltend: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1891, sowie die auf der Versammlung in Halle a. S. gehaltenen Vorträge [IV u. 78 S.], ferner
W. F. Meyer: Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. [V u. S. 81—292.]

——— ——— II. Band. 1892. Hrsg. von G. Cantor, W. Dyck und E. Lampe. 1893. n. *M.* 4.50.

Enthaltend: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1892, sowie die auf der Versammlung in Nürnberg gehaltenen Vorträge [III u. 74 S.], ferner
Fr. Kötter: Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck. Mit zwei Figurentafeln. [S. 75—156.]

——— ——— III. Band. 1893. Hrsg. von W. Dyck und E. Lampe. 1894. n. *M.* 16.—

Enthaltend: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1893, sowie die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge. [IV u. 106 S.] Mit 12 Figuren im Text, ferner
B. Brill u. M. Noether: Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. [XXIII u. S. 109—566.]
L. Henneberg: Über die Entwickelung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. Mit zwei Figurentafeln. [S. 567—601.]

——— ——— IV. Band. 1894. 1895. Hrsg. von A. Wangerin und A. Gutzmer. 1897. n. *M.* 16.—

Enthaltend: Chronik der Vereinigung für die Jahre 1894 und 1895, sowie die auf den Versammlungen in Wien und Lübeck gehaltenen Vorträge [V u 174 S.], ferner
D. Hilbert: Die Theorie d. algebraischen Zahlkörper. [XVIII u S. 177—546.]

——— ——— V. Band. 1896. Hrsg. von A. Wangerin und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1898/99. n. *M.* 7.20.

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1896, sowie die auf der Versammlung in Frankfurt a. M. gehaltenen Vorträge. [94 S.] 1897. n. *M.* 2.80.
2. — **E. Kötter:** Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. In zwei Teilen. I. Teil. 1. Lieferung. [128 S.] 1897. n. *M.* 4.40.
2. Lieferung. 1901. [Unter der Presse.]
[Der II. Teil erscheint in einem späteren Bande.]

——— ——— VI. Band. 1897. Hrsg. von G. Hauck und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1899. n. *M.* 8.—

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1897, sowie die auf der Versammlung in Braunschweig gehaltenen Vorträge. [142 S.] 1898. n. *M.* 4.—
2. — **S. Finsterwalder:** Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Mit 19 Figuren im Text. [41 S.]
S. Finsterwalder: Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation. Mit 33 Figuren im Text. [S. 43—90.]
G. Bohlmann: Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. [S. 91—110.]
[IV u. 110 S.] 1899. n. *M.* 4.—

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. gr. 8. geh.
VII. Band. 1898. Hrsg. von G. Hauck und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1899. n. *M.* 12.80.

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1898, sowie die auf der Versammlung in Düsseldorf gehaltenen Vorträge. [159 S.] 1899. n. *M.* 4.80.
2. — E. Czuber: Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. [VIII u. 279 S.] 1899. n. *M.* 8.—

——— ——— VIII. Band. 1899. Hrsg. von G. Hauck und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1900. n. *M.* 16.—

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899, sowie die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge. Mit den Bildnissen von C. L. Gerhardt, Sophus Lie, E. v. Lommel, Friedr. Meyer, H. Schapira, Karl Schober. [IV u. 231 S.] 1900. n. *M.* 8.—
2. — A. Schoenflies: Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Mit 8 Figuren im Text. [IV u. 251 S.] 1900. n. *M.* 8.—

——— ——— IX. Band. 1900. Hrsg. von K. Hensel und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1901.

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1900, sowie die auf der Versammlung in Aachen gehaltenen Vorträge. Mit den Bildnissen von K. Bobek, R. Hoppe und E. Wiltheifs. [IV u. 140 S.] 1901. n. *M.* 5.—
2. — K. Heun: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Mit 18 Figuren im Text. [VI u. 123 S.] 1900. n. *M.* 4.—

Von gröfseren Referaten sind für die nächsten Bände u. a. in Vorbereitung:

Burkhardt: Die Ausbildung der Methode der Reihenentwicklungen an physikalischen Problemen. Erster Hauptteil. [Unter der Presse.]
R. Haussner: Numerische Auflösung von Gleichungen.
A. Kneser: Bericht über die Variationsrechnung.
E. Kötter: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. Teil II.
G. Kowalewski, G. Scheffers: Referate über die Arbeitsgebiete von Sophus Lie.
R. Mehmke: Bericht über die graphischen Methoden.
Müller-Breslau: Über die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Bauconstructionen.
L. Schlesinger: Über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen.
A. Schoenflies: Über Curven- und Punktmannigfaltigkeiten. II.
P. Stäckel: Über die allgemeine Dynamik.
E. Steinitz: Bericht über die Theorie der endlichen Gruppen.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. 500 Mitglieder, von denen fast ein Drittel Ausländer sind. Die Mitglieder erhalten obige Publication bei directem Bezuge von der Mathematiker-Vereinigung zu einem Vorzugspreise. Anmeldungen zur Mitgliedschaft nimmt Prof. Dr. **A. Gutzmer** in Jena, Wildstrafse 2, entgegen. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

Leipzig, März 1901.
Poststrafse 3.

B. G. Teubner.

Ferner ist im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben im Auftrage des Vorstandes der Mathematiker-Vereinigung von Dr. Walther Dyck, Professor an der technischen Hochschule in München. [XVI u. 430 S.] Lex.-8. 1892. geh. n. *M.* 14.—

——— ——— Nachtrag. [X u. 135 S.] Lex.-8. 1893. geh. n. *M.* 4.—



Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Neunter Band. Zweites Heft.

Enthaltend:

Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik.

Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

von

Karl Heun
in Berlin.

Mit 18 Figuren im Text.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

K. Hensel in Berlin. und **A. Gutzmer** in Jena.

BG

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1900.

Ausgegeben am 13. September 1900.

☞ Jeder Käufer verpflichtet sich zum Bezuge des ganzen, aus zwei Heften bestehenden Bandes.
☞ Des IX. Bandes Erstes Heft wird Ende dieses Jahres erscheinen.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

VIII. Band. 2 Hefte. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von G. Hauck in Berlin und A. Gutzmer in Jena. gr. 8. 1900. geh.

Inhalt des I. Heftes:

I. Die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899.

1. Bericht über die Jahresversammlung zu München am 17. bis 22. September 1899. — 2. Geschäftlicher Bericht. — 3. Kassenbericht.
4. Statuten u. Geschäftsordnung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
5. Mitglieder-Verzeichnis nach dem Stande vom 31. December 1899.
6. Zum Gedächtnis:
   Louis Gonzaga Gascó.
   C. J. Gerhardt. Von **M. Cantor.** Mit Porträt.
   Sophus Lie. Von **Friedrich Engel.** Mit Porträt.
   Eugen von Lommel. Von **Ludwig Boltzmann.** Mit Porträt.
   Friedrich Meyer. Von **G. Riehm.** Mit Porträt.
   Hermann Schapira. Von **C. Koehler.** Mit Porträt.
   Karl Schober. Von **W. Wirtinger.** Mit Porträt.

II. Die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge.

Boltzmann, L., über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit.
Weber, H., Wirkung der neuen preufsischen Prüfungsordnung für Lehramtscandidaten auf den Universitätsunterricht.
Hauck, G., Correferat.
Klein, F., Bemerkungen zu den vorstehenden Referaten.
Krazer, A., über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an der Universität Strafsburg.
Study, E., einige Bemerkungen zu der neuen preufs. Prüfungsordnung.
Berichte und Discussion über die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen. (Von Mehmke, Bauschinger, Schülke u. A.)
Noether, M., über Riemann's Vorlesungen von 1861—62 über Abel'sche Functionen.
Gordan, P., über die symmetrischen Functionen.
——, über homogene Functionen.
Hilbert, D., über den Zahlbegriff.
——, über das Dirichlet'sche Princip.
Sommerfeld, A., Bemerkungen zur Variationsrechnung.
Sommer, J., über Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen.
Engel, Fr., zwei merkwürdige Gruppen des Raumes von fünf Dimensionen.
Zindler, K., über Complexcurven und ein Theorem von Lie.
Doehlemann, K., über hyperboloidische Gerade.
Brill, A., über ein Beispiel des Herrn Boltzmann zu der Mechanik von Hertz.
Study, E., die Geometrie der Dynamen.
Schimpf, E., Einführung eines Mafses der Convergenz in die Lehre von der Convergenz der unendlichen Processe.
Lerch, M., Arithmetisches über unendliche Reihen.
Horn, J., divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen.
Weber, E. v., eine fundamentale Classification der Differentialprobleme.
Hensel, K., über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen.

Inhalt des II. Heftes:

III. Referat, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung:

Schoenflies, A., die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

DIE KINETISCHEN PROBLEME DER WISSENSCHAFTLICHEN TECHNIK.

BERICHT,

ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

KARL HEUN

IN BERLIN.

Vorwort.

Kinetische Probleme aus dem Bereich der theoretischen Maschinenlehre sind in neuerer Zeit von hervorragenden Technikern mehrfach behandelt worden und haben in Fachkreisen ein lebhaftes Interesse erregt. Immer häufiger werden von der Praxis theoretische Fragen gestellt, zu deren Beantwortung die Principien der rationellen Dynamik erforderlich sind und eigenartige Anwendungen finden, welche den üblichen Darstellungen der Bewegungslehre fremd geblieben sind.

Auf die systematische Mechanik, die bisher unter dem vorwiegenden Einflufs astronomischer und physikalischer Probleme stand, wird durch dieses Hervortreten specifisch technischer Aufgabengruppen eine schon jetzt deutlich merkbare — die früheren Gesichtspunkte erweiternde — Rückwirkung ausgeübt.

Gleichzeitig erwächst dem Mathematiker, soweit er die allgemeine Mechanik als Wissenschaft vertritt, die Pflicht, diese Erscheinungen auf einem rasch fortschreitenden Nachbargebiete objectiv zu verfolgen und innerhalb seines Ideenkreises die Tragweite der überlieferten, klassisch formulirten Principien der Dynamik angesichts der neuen Sachlage eingehend zu prüfen und nötigenfalls auf zweckentsprechende Erweiterungen derselben zu sinnen.

Das vorliegende Referat ist auf Anregung der im Jahre 1897 in Braunschweig gemeinsam mit der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte tagenden „Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ entstanden.

Die wesentlichen Gesichtspunkte kamen in einem auf der Versammlung in München gehaltenen Vortrage des Verfassers zur Aussprache.

Für die Form der Darstellung waren zwei Rücksichten maſsgebend. Einmal schien es geboten, dem Mathematiker hinreichendes, sachlich orientirendes Material zu liefern, wodurch die Auswahl der Litteraturangaben vorwiegend bedingt wurde. Andererseits waren die kinetischen Problemgruppen und die zugehörigen Lösungsmethoden soweit zu entwickeln, daſs dem Fachtechniker der systematische Zusammenhang mit den vorhandenen mathematischen Theorien ersichtlich wird.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

A. Die technische Mechanik als Zweig der allgemeinen Mechanik.

1. *Begründung der systematischen Mechanik.* Die rationelle Mechanik hat mit dem Erscheinen von D'Alembert's Dynamik (1743) insofern einen gewissen Abschlufs erreicht, als hiermit alle principiellen Schwierigkeiten, welche früher gegebenenfalls das Ansetzen der Bewegungsgleichungen körperlicher Systeme veranlafste, ein und für allemal beseitigt waren. D'Alembert sagt selbst, dafs er die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung der Körper auf die kleinstmögliche Zahl zurückgeführt habe, und dafs sein Princip zur Auffindung der Bewegung der Körper, die in beliebiger Weise auf einander wirken, vollkommen ausreichend sei. Die Weiterentwicklung der Mechanik hat zwar die Wahrheit dieser Erkenntnis nicht umgestofsen, aber auch gezeigt, dafs die Beschränkung der allgemeinen Principien auf die kleinste Anzahl keineswegs allen Anforderungen entspricht, welche eine möglichst vielseitige Vertiefung des mechanischen Forschens verlangt hat. D'Alembert's Behandlung der dynamischen Probleme ist eine vorwiegend synthetische, und es blieb dem grofsen Genie Lagrange's vorbehalten, das ganze Gebäude der Mechanik auf festen analytischen Grundlagen aufzubauen und hierdurch den allgemeinen Principien erst diejenige handliche und feste Gestaltung zu geben, welche sie zu unveränderlichen Werkzeugen bei allen mechanischen Untersuchungen gemacht hat. Lagrange war sich der Erreichung dieses Zieles klar bewufst. In der Vorrede seiner Mécanique analytique (1788) kennzeichnet er seine Leistung mit den Worten: „Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujéties à une marche régulière et uniforme.“ Diese einseitige Hervorhebung der rein analytischen Methode hat in der Folge freilich eine bedeutsame Rückwirkung erfahren müssen, die namentlich der technischen Mechanik zu gute gekommen ist. Aber hierdurch ist der eminente Wert des Lagrange'schen Grundwerkes keineswegs beeinträchtigt. Es ist und bleibt das kanonische Buch des Mechanikers — sowohl als unvergleichliches systematisches Lehrgebäude wie auch als unerschöpfliche

Fundgrube für den Forscher. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, die analytische Fassung des D'Alembert'schen Princips — die Grundlage der technischen Dynamik —, der Satz von der kleinsten Action, die Bewegungsgleichungen für allgemeine Coordinaten, die Variation der Constanten in ihrer Anwendung auf das Problem der kleinen Schwingungen und auf die genäherte Lösung allgemeinerer dynamischer Probleme, die Wirkung impulsiver Kräfte, die Statik der inneren Systemkräfte bewegter Körper sind hier mit einer Gründlichkeit und Klarheit auseinandergesetzt, die von den modernen Darstellungen nur ausnahmsweise übertroffen, meist nicht annähernd erreicht wird. Besonders auffallend ist die Bevorzugung astronomischer Probleme und die hiermit in Verbindung stehende Beschränkung auf conservative Kräfte und Vernachlässigung der Reibung. Das lag aber im Sinne der Zeit, in der Lagrange lebte, und für die er arbeitete. Die Mechanik des Himmels stand seit dem Erscheinen von Newton's „Principien" im Vordergrund des wissenschaftlichen Interesses. Erst an zweiter Stelle kamen die Probleme der theoretischen Physik — namentlich das Problem der schwingenden Saite — und ganz im Hintergrunde — mit den Hilfsmitteln der Empirie sich begnügend — begann die Technik ihre Laufbahn, eben erst ihrer Wiege entwachsen.

2. Es war infolgedessen naheliegend, dafs die *astronomische Mechanik* nach Lagrange eine vielseitige und energische Ausbildung erfuhr. Laplace fafste das gesamte Wissen auf diesem Gebiet in seiner „Mécanique céleste" zusammen, Poisson erweiterte die Theorie der Variation der Constanten und Hamilton knüpfte an das Princip der kleinsten Action an und schuf das Princip der variirenden Action, wodurch es möglich wurde, auch die Integrale der Bewegungsgleichungen in eine kanonische Form zu bringen. Diese weitumfassenden Gesichtspunkte wandte er auf das Störungsproblem an und führte hiermit jedes dynamische Problem auf die Aufsuchung der nach ihm benannten Hauptfunction zurück. Ist diese durch irgend welche Mittel bekannt, so ergiebt sich daraus durch einfache Differentiation das Integralsystem, welches die Bewegung in ihrem Zeitverlauf vollständig darstellt. In mathematischer Beziehung ist das Hamilton'sche Resultat von Jacobi, Bertrand, Bour u. a. bis auf die neuste Zeit vereinfacht, weitergeführt und jenseits des ursprünglichen Anwendungsgebietes verallgemeinert worden. In den letzten Jahren ist die astronomische Mechanik einer durchgreifenden kritischen Revision von Herrn Poincaré unterzogen worden, die namentlich die Convergenz der gebräuchlichen Reihenentwicklungen einer strengen Prüfung unterworfen hat. So kann sich dieser Zweig der Mechanik einer hohen Ausbildung rühmen, zu deren Erreichung während zweier Jahrhunderte rüstig gearbeit wurde.

3. Die *physikalische Mechanik* ist durch Poisson und Green als selbständiger Zweig begründet worden. Sie hat ihre eigentümlichen Methoden erhalten, die namentlich durch Lamé, Stokes, Maxwell, Lord Kelvin, Kirchhoff und v. Helmholtz in überraschender Weise gefördet und weitergebildet wurden, so dafs sie in ihrer Gesamtheit ein festgeschlossenes System von Werkzeugen geworden sind, mit deren Benutzung alle Probleme der theoretischen Physik, sobald die notwendigen hypothetischen Grundlagen geklärt und anerkannt sind, erfolgreich in Angriff genommen werden können. Im Mittelpunkt dieser Entwicklungen steht der Satz von der Erhaltung der Energie, welcher im Hamilton'chen Princip die bequemste analytische Formulirung erhalten hat. Ist die Form der kinetischen und potentiellen Energie bekannt, so führt die Ausführung der Variationen ohne besondere Schwierigkeit zu den Differentialgleichungen des Problems, die meist mehrere abhängige und unabhängige Veränderliche enthalten. Die Integration mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen ist allerdings fast stets nur in den einfachsten — aber meistens auch den wichtigsten — Fällen mit den jetzigen Mitteln der Analysis ausführbar.

Nachdem durch Routh und v. Helmholtz die verborgenen Massen in die physikaliche Mechanik eingeführt wurden, hat Hertz den kühnen Versuch unternommen, die mechanischen Principien im Sinne dieser modernen Anschauungen mit Zugrundelegung des Princips der Erhaltung der Energie unter der Annahme „vollständiger“ Systeme in ein abgeschlossenes System zu bringen. Das mit Geist und Geschick durchgeführte Unternehmen hat in den weitesten Kreisen Bewunderung hervorgerufen, scheint aber nicht einmal von den Physikern zur Lösung neuer Probleme benutzt zu werden, da sich seiner Anwendung schon bei den trivialsten Aufgaben die Durchführung erschwerende Hindernisse in den Weg stellen. Für die technische Mechanik ist eine nutzbringende Anwendung dieser — an und für sich ganz berechtigten — Anschauungen vorläufig aussichtslos, obwohl sie in gewissem Sinne das Ideal eines Systems der physikalischen Mechanik verwirklicht haben.

4. *Geometrische Mechanik.* Gewissermafsen als Reaction gegen die einseitige analytische Ausbildung der Mechanik durch Lagrange, Poisson und Hamilton ist das Bestreben hervorragender Geometer zu betrachten, als gleichberechtigt neben dieselbe eine geometrische zu setzen. Dieser Weg wurde von Poinsot und Chasles mit grofsem Erfolg betreten. Er bot den Vorteil einer unmittelbaren Anschaulickeit und erleichterte die Anwendung graphischer Hilfsmittel zur expliciten Durchführung mechanischer Probleme. In der Statik waren die synthetisch-geometrischen Methoden am naheliegendsten, da diese mit der Reduction der Streckensysteme, soweit es sich um

starre Syteme handelt, vollkommen identisch ist. Die systematische Ausbildung dieses Gebietes verdanken wir vornehmlich Moebius, Minding und Culmann. Für die Festigkeitslehre haben sie in der Technik eine ausgedehnte Bedeutung erlangt. Aber auch für die Fortentwicklung der Dynamik haben sich die geometrischen Methoden sehr fruchtbar erwiesen. Nachdem durch die Arbeiten von Plücker und Herrn F. Klein die Theorie der Liniencomplexe und Congruenzen geometrisch begründet war, gelang es Sir R. Ball diese Lehren auf die Mechanik des starren Körpers zu übertragen und durch Einführung des Begriffs der conjugirten Schrauben namentlich den Impulsproblemen einen ungeahnten Grad der Anschaulichkeit zu geben. Natürlich lassen sich dieselben Resultate auch rein analytisch mit Hilfe der Vectoranalysis, wie es von Everett geschehen ist, gewinnen. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs die Anwendung dieser Lehren auch für die technische Kinetik in gewissen Fällen grofse Vorteile hat, doch würden hier vorwiegend Probleme von mehreren Graden der Freiheit in Betracht kommen, welche in der theoretischen Maschinenlehre erst spärlich behandelt sind. Jedenfalls steht die geometrische Mechanik den Bedürfnissen der Technik näher als die im Hertz'schen Sinne ausgebildete physikalische Mechanik. Selbst die vorläufige Beschränkung auf impulsive Kräfte vermindert die Bedeutung der Ball'schen Resultate nur scheinbar. Denn mit Benutzung der Variation der Constanten wird es nicht unüberwindlich schwer sein, den Fall stetiger Kräftewirkung — namentlich, wo es sich um concrete Probleme der Praxis handelt — auf den ersteren Fall zurückzuführen.

5. Welche Stellung nimmt nun die *technische Mechanik* zu den eben kurz gekennzeichneten drei Zweigentwicklungen der allgemeinen Mechanik ein? Ist sie eine coordinirte Disciplin mit selbständigen Methoden oder nur eine Zusammenfassung einzelner — ohne inneren Zusammenhang stehender — Anwendungen der allgemeinen mechanischen Principien auf Bauconstructionen, Maschinenelemente, praktisch vorliegende Kraftfelder u. dergl., wie sie sich grade — nachdem die reine Empirie ihre Dienste versagte — einer theoretischen Behandlung aufgedrängt haben? Schon ein Vergleich der technischen Festigkeitslehre mit den mathematischen Theorien der Elasticität sowie der Hydraulik mit der rationellen Hydrodynamik zeigt, dafs wir es hier nicht mehr mit zusammenhangslosen Anwendungen allgemeiner theoretischer Sätze auf Einzelprobleme zu thun haben, dafs vielmehr auf diesen — sich längerer historischer Entwicklung erfreuenden — Gebieten ganz entschieden ausgeprägte individuelle Behandlungsweisen und Resultate vorliegen, die ihre unverleugbare praktische Physiognomie sofort erkennen lassen und deutlich zeigen, dafs sie in einen gewissen selbständigen Gegensatz zu den verwandten rein theoretischen Disciplinen getreten sind. Wenn sie den letzteren auch vieles ver-

danken, so haben doch — namentlich in den letzten zwanzig Jahren — hervorragende Techniker klar erkannt, dafs die Voraussetzungen der älteren mathematischen Theorien den thatsächlichen Verhältnissen im allgemeinen nicht entsprechen, und dafs planmäfsige Versuche für die Erkenntnis der Veränderungen und Beanspruchungen der technischen Materialien anzustellen waren, um zu gesicherten Grundlagen zu gelangen. Diese Bestrebungen sind noch lange nicht abgeschlossen, da sich mit der Zahl der experimentellen Resultate auch die Schwierigkeiten vermehren, in der grofsen Mannigfaltigkeit derselben einfache und allgemein brauchbare Gesetzmäfsigkeiten zu erkennen, welche allein eine mathematische Verarbeitung zulassen. Aber der eingeschlagene Weg hat gesunden Boden, was den endlichen Erfolg — trotz aller Hindernisse — bei wackrer Arbeit sichert. Auch für die technische Dynamik ist die Sachlage keine wesentlich andere. Hier steht die mathematische Theorie in grofser Vollendung zur Verfügung bereit. Eine blofse Kenntnis derselben scheint hinzureichen, um sie auf jeden möglichen praktischen Fall ohne weiteres anzuwenden. Wenn man sich — wie es natürlich in den ersten Stadien der Entwicklung geschah — auf die Betrachtung von Maschinenelementen beschränkt, die aus ihrem natürlichen Zusammenhang gerissen sind, dann mag dieses naive Vorgehen einige brauchbare Resultate liefern, aber eine tiefere Erkenntnis der dynamischen Wirkung des Ganzen ist so nicht erreichbar. Hierzu ist es unbedingt nötig, den vorliegenden Mechanismus als vollständiges mechanisches System zu behandeln und gleichzeitig die veränderlichen statischen Verhältnisse in der Mannigfaltigkeit der Lagen der einzelnen Maschinenteile aufs gründlichste zu erforschen. Neben die Dynamik, die nur das Bewegungsgesetz festzustellen erlaubt, tritt eine, im System der rationellen Mechanik nur nebensächlich gestreifte Disciplin — die „Kinetostatik“, welche es sich zur Aufgabe stellt, nicht allein die Zapfen- und Lagerdrücke, die Kupplungsspannungen und Fundamentreactionen während der veränderlichen Bewegungs- und Kraftverhältnisse zu verfolgen, sondern auch die Kräfte und Momente der inneren Beanspruchungen eines beliebigen Querschnittes jedes einzelnen Maschinenelementes für jede Lage und Stellung desselben erkennen läfst. Es ist hier gleichgültig, ob die vorliegende Entwickelung der technischen Kinetik dieses Ziel für alle in Frage kommenden verwirklichten oder nur projectirten dynamischen Systeme zur Zeit schon erreicht hat — entscheidend ist bereits die klare Stellung eines Problems, dessen endgültige und allgemeine Lösung principiell als möglich erkannt wird und dessen praktischer Nutzen von keinem Techniker in Frage gestellt werden kann. Im weiteren Verlauf dieser Darstellung wird aufserdem gezeigt, dafs der Durchführung des dynamischen und des kinetostatischen Problems durchaus keine principiellen Schwierigkeiten im Wege stehen.

6. *Das materielle System in der technischen Mec'anik.* Wenn wir den specifischen Eigentümlichkeiten der maschinellen Organismen näher treten, so bemerken wir zunächst eine aufserordentliche Mannigfaltigkeit der mechanischen Systemgestaltungen. Wohl läfst sich die Dampfmaschine mit dem physischen Pendel in Parallele bringen, denn beide haben eine oscillatorische Bewegung, welche nicht allein durch das Kraftfeld sondern auch durch die Massenverteilung bestimmt ist. Aber in dem einen Falle ist das Sytem ein einfacher starrer Körper, im anderen eine weit verwickeltere Gelenkverbindung, bei welchem schon die Bewegung der Pleuelstange, wenn ihre Massenverteilung berücksichtigt wird, Umständlichkeiten in der dynamischen Behandlung notwendig macht. Weit gröfsere Verwicklungen treten ein, wenn der Regulator in seiner natürlichen Verbindung mit dem Kurbelgetriebe und der Steuerung behandelt werden soll. Im Vergleich hiermit erscheint selbst das Dreikörperproblem der Astronomen als ein einfacheres. Noch schwieriger gestaltet sich die Übersicht des mechanischen Systems bei den im Geleise geführten Transportmaschinen, also bei der Untersuchung der Bewegung eines Eisenbahnzuges. In der Gefällcurve haben wir eine doppeltgekrümmte Bahnaxe zu berücksichtigen, die hinundhergehenden Massen der Maschine, die Gegengewichte, die Elasticität der Schienen, die drehbaren Radaxengestelle, die Wagenkupplungen und vieles Andere erschweren die Formulirung und Übersicht des mechanischen Systems so sehr, dafs man bisher eine vollständige dynamische und kinetostatische Durcharbeitung unterlassen und sich mit der Behandlung einiger hierhingehörigen ganz elementaren Teilprobleme begnügt hat. In Bezug auf die Gestaltung des materiellen Systems, dessen Bewegung und statische Verhältnisse untersucht werden sollen, unterscheidet sich also die technische Mechanik ganz wesentlich von der rationellen, welche es meistens von vorn herein in der Hand hat, die Constellation desselben so einfach vorauszusetzen, dafs unnötige Schwierigkeiten bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen überhaupt vermieden werden.

7. *Die Kraftfelder in der technischen Mechanik.* Zu analogen Ergebnissen führt der Vergleich der Kraftfelder in der technischen Mechanik mit den anderwärts auftretenden. Die ganze theoretische Astronomie gründet sich auf das Newton'sche Fernwirkungsgesetz, und wo in der Physik nach den Anschauungen Faraday's und Maxwell's scheinbar weniger einfache Kraftfelder vorkommen, finden dieselben in den technischen Verwertungen magnetischer und elektrischer Wirkungen ihre Stelle. Die Dampfdiagramme, die Explosionsdiagramme bei den Wärmemotoren, die hydraulischen Kraftdiagramme bei den Turbinen sind graphische Darstellungen des Feldes der treibenden Kräfte, welche durch Versuche festgestellt sind. Die „Charakteristik“

der Elektromotoren enthält in der Zuglinie oder Drehmomentlinie gleichfalls das Schaubild des Kraftverlaufs, wie er als Unterlage für die weitere dynamische Behandlung des betreffenden Problems Verwendung findet. In allen diesen Fällen ist kein analytisches Gesetz der Kraftwirkung gegeben — es können deshalb die allgemeinen Integrationsmethoden, welche durch Hamilton und Jacobi ausgebildet sind, unmittelbar nicht gebraucht werden. Dazu kommt noch der weitere Umstand, dafs der Kraftverlauf bei einem Motor, dessen Tourenzahl zwischen weiten Grenzen schwankt, im allgemeinen eine Function der Geschwindigkeit ist. Mit diesem Falle hat sich aber die rationelle Mechanik — soweit es sich um systematische Darstellungen der Integrale der Bewegungsgleichungen handelt — so gut wie gar nicht befafst. Höchstens könnten in dieser Beziehung einige Beispiele in Betracht kommen, bei denen schon frühzeitig der Luftwiderstand berücksichtigt ist. Aber die Widerstandsfelder bei den Transportmaschinen haben aufser diesem Factor noch viele andere Momente wie Reibung, Adhäsion, Ungleichförmigkeiten im Belastungswiderstand in Rechnung zu bringen. Endlich mögen auch häufig eintretende Unstetigkeiten in den technischen Kraftfeldern Erwähnung finden. So haben wir z. B. bei der im Viertact arbeitenden Gasmaschine nur eine Periode, in welcher die treibende Kraft wirksam ist. Selbst die nach den Regeln der Statik ausführbare Reduction der verschiedenen Kräftesysteme, welche an demselben Mechanismus thätig sind, ist nur in dem Falle statthaft, wo lediglich die Kenntnis der Bewegungsvorgänge verlangt wird. Handelt es sich aber um die Bestimmung der Lagerdrücke und der Festigkeitsbeanspruchungen in den einzelnen Maschinenelementen, so würde dieselbe zu ganz falschen Resultaten führen.

8. *Die Probleme der technischen Mechanik verlangen eine explicite Lösung.* Nehmen wir nun an, es sei bei einem technischen Problem gelungen, die Bewegungsgleichungen in brauchbarer Form aufzustellen, so verlangt die Praxis naturgemäfs eine solche Integration derselben, dafs die resultirenden Lösungen in expliciter, aber zugleich möglichst einfacher, für die Auswertung fertiger Form erscheinen. Die rationelle Mechanik begnügt sich statt dessen häufig mit transcendenten Functionen oder Quadraturen, durch deren Discussion dann nach langer mühevoller Rechnung einige Eigenchaften der betrachteten Bewegung gefolgert werden können. Für die Bedürfnisse des Technikers ist hiermit nichts gewonnen, er mufs sogar peinlichst bestrebt sein, gerade in den Endresultaten alle analytischen Formen zu vermeiden, die sich nicht unmittelbar für die bequeme Handhabung tabelliren lassen oder die numerische Ausrechnung im gegebenen Falle ohne Zeitverlust gestatten. Dies sind alles Anforderungen, welche der technischen Kinetik eigentümlich sind. Sie gipfeln in dem einfachen

Satze: Die Technik kann ihre theoretischen Bewegungsprobleme nicht nach Belieben stellen, wie die rationelle Mechanik ihre Übungsbeispiele. Sie mufs die Massensysteme, die Kräftesysteme nehmen, wie sie die Bedürfnisse der Praxis hinstellen. Ihre Lösungsmethoden dienen nicht zur Illustration eleganter mathematischer Theorien, sondern müssen vor allem sich durch die gröfste erreichbare Einfachheit auszeichnen.

B. Die ersten Versuche zur systematischen Begründung der technischen Dynamik.

9. *Watt* bezeichnet sich in seinen Patentschriften sowie in einigen Briefen zu wiederholten Malen und mit einer gewissen Emphase als „philosopher“. Das bedeutet soviel als Naturforscher oder in noch engerem Sinne Physiker. Er will damit ausdrücken, dafs die Motive zu seiner grofsen Reform im Dampfmaschinenbau nicht planlos einem blofs erfinderischen Kopfe entsprungen sind, sondern dafs sie vielmehr die Frucht eines langjärigen exact-wissenschaftlichen Forschens darstellen. Manche Vorschläge Watts haben sich auch in der Technik nicht ohne weiteres verwirklichen lassen, während der Condensator, die Stopfbüchse, der doppeltwirkende Kolben, der Indicator, das Parallelogramm zur Geradführung sowie der Centrifugalregulator (governor) die Überlegenheit der Dampfmaschine als Motor bis heute begründet haben. Mit der gröfsten Ausdauer untersuchte er die calorischen Grundeigenschaften des Dampfes, und es gelang ihm, mit den einfachsten Hilfsmitteln das nach ihm benannte Verdampfungsgesetz aufzustellen, welches später von Regnault weiter ausgebildet wurde. Mit der theoretischen Untersuchung der dynamischen Massenwirkungen der oscillirenden Teile der Dampfmaschine hat sich Watt gar nicht befafst, obwohl die erforderlichen mechanischen Principien hinreichend entwickelt waren. Hierzu hatte er aber auch keine zwingende Veranlassung, denn die damals gebräuchlichen Kolbengeschwindigkeiten waren verhältnismäfsig kleine, und das Schwungrad genügte — bei den nicht zu hoch gespannten Anforderungen an den gleichmäfsigen Gang der Maschine —, um ihren Einflufs auf erträgliche Grenzen herabzudrücken.

10. *Vorgänger Poncelet's.* Dem kinetischen Problem wandten sich erst französische Mathematiker und Techniker mit Entschiedenheit zu. Coriolis war wohl der erste, welcher den Einflufs der oscillirenden Teile bei den Balancirmaschinen untersuchte. Er vernachlässigte aber hierbei den Einflufs der Trägheit der Lenkstange. Coriolis hat sich durch seine Entdeckung der Gesetze der relativen

Beschleunigung einen bleibenden Namen in der Geschichte der Dynamik erworben. Sein „Calcul de l'effet des machines" (1829), später unter dem ausführlicheren Titel „Mécanique des corps solides et calcul de l'effet des machines" in erweiterter Bearbeitung erschienen, hat hauptsächlich dazu beigetragen, dem Arbeitsbegriff und dem Princip der Erhaltung der Energie die gebührende Stellung in der technischen Mechanik zu verschaffen. In gleichem Sinne wirkte auch Navier durch die Herausgabe seines „Résumé des leçons sur l'application de la mécanique aux machines". Die analytische Behandlung ist in diesen Schriften mit grofser Gewandtheit durchgeführt, aber wir vermissen darin ein tieferes Eingehen auf die realen Verhältnisse der Technik. Sie können sich noch nicht von dem Boden der rationellen Mechanik losreifsen und vermeiden es ängstlich, auf concrete Maschinenprobleme näher einzugehen. Dies blieb Poncelet vorbehalten.

11. *T. V. Poncelet* ist der eigentliche Begründer der systematischen technischen Mechanik, sowohl des statischen als auch des dynamischen Teiles derselben. Seine Theorie der zusammengesetzten Festigkeit elastischer Körper ist bis heute unübertroffen und bildet immer noch die Grundlage zur Berechnung der mehrfach beanspruchten Maschinenelemente. Die Navier'sche Theorie verbesserte er in den wichtigsten Punkten. Die Deformation der Querschnitte gebogener oder verdrehter Balken, die gegenseitige Wirkung der gespannten Fasern, die Reactionen der befestigten Stellen, sowie die Einflüsse der Gleitungen auf die Spannungserscheinungen hat Poncelet im 8. Abschnitte seiner „Applications de la mécanique aux machines" für die Bedürfnisse des Technikers in unübertroffener Weise behandelt. Selbst die vom mathematischen Standpunkte strengeren Untersuchungen De St. Venant's über die Torsion und Biegung der Prismen scheinen nicht mehr Brauchbares für die Praxis geliefert zu haben als die einfacheren Poncelet'schen Methoden. Es ist nur zu bedauern, dafs die von Poncelet gewählte Darstellungsform dem Studium so beträchtliche Schwierigkeiten bereitet und eigentlich nur für diejenigen in vollem Mafse verständlich ist, die sich vorher mit den einschlägigen späteren Arbeiten auf diesem Gebiete gründlich bekannt gemacht haben. Dann erkennt man aber auch, dafs die Vorwürfe, die Clebsch in seiner „Theorie der Elasticität" der üblichen technischen Festigkeitslehre an verschiedenen Stellen macht, nur zutreffend sind, wenn man das Poncelet'sche Werk ausschliefst.

12. *Poncelet's Verdienste um die allgemeine technische Kinetik.* Der dynamische Teil der „Applications" ist einfach und leicht verständlich geschrieben. Poncelet unterscheidet bei jeder Arbeitsmaschine den Operator und den Receptor, heute würden wir sagen

das treibende Kraftfeld und das widerstehende Lastfeld. Dazwischen liegen gleichsam die passiven Widerstände, wie Reibung und Adhäsion der Maschinenteile. Auf Grund des Princips der lebendigen Kräfte hat der Mechanismus die Aufgabe der Übertragung oder Fortpflanzung der mitgeteilten Energie zu übernehmen. Alsdann sind alle Umstände einer genauen Analyse unterworfen, die bei dem Bewegungsvorgang in Betracht kommen. Da nun die Kraft- und Belastungsfelder fast immer als unveränderliche Daten zu betrachten sind, so beginnt Poncelet mit einer gründlichen Untersuchung des dynamischen Verhaltens der Regulatoren, welche den stationären Gang ermöglichen. Hierbei sind alle Massenwirkungen sorgfältig berücksichtigt und der notwendige Unempfindlichkeitsgrad klar hervorgehoben. Überhaupt ist die wichtige Erkenntnis der gegenseitigen Beziehungen und der andererseits getrennten Functionen des Regulators und des Schwungrades klar und mustergültig hervorgehoben. Da die Construction des Centrifugalreglers in der Folge mannigfache Änderungen und principielle Umbildungen erfahren hat, so kann man natürlich keinen Aufschlufs hierüber in einem Werke suchen, dessen Grundlagen schon vor achtzig Jahren durch Vorlesungen in Metz gelegt wurden. Aber gerade der erfahrene Techniker, der sich durch Constructionsabänderungen nicht beirren läfst, vielmehr Principien von bleibendem Werte ohne Schwierigkeit von einer constructiv veralteten Form auf eine verwandte zu übertragen versteht, kann heute noch die classische Darstellung Poncelet's mit Erfolg gebrauchen.

In dem Gang der Maschine unterscheidet Poncelet die Anlaufsperiode, den stationären Zustand und die Auslaufsperiode. Demnach zerfällt auch die dynamische Theorie des Kurbelsystems in zwei Abschnitte. Während der stationären Periode bleibt die Gröfse der Winkelbeschleunigung in engen Grenzen, die durch den Ungleichförmigkeitsgrad bestimmt sind. Während des Anlaufs oder Auslaufs können die positiven resp. negativen Beschleunigungen sehr beträchtliche Werte annehmen und hierdurch auch bei der kinetostatischen Berechnung des Schwungrades und der Welle zu berücksichtigende, nicht unbeträchtliche Biegungs- und Torsionsmomente hervorrufen. Sobald das treibende und widerstehende Kraftfeld bekannt ist, lassen sich in jedem Falle — nach den gewöhnlichen Regeln der Mechanik — die beiden Grundgleichungen aufstellen, die zur Bestimmung der Winkelbeschleunigung und der Winkelgeschwindigkeit hinreichen. Dies alles ist von Poncelet in einer Weise durchgeführt, dafs jeder Leser der „Applications“ sich unwillkürlich die Frage stellen wird, warum gerade dieser fundamentale Teil des Werkes in der späteren technischen Litteratur eine so geringe Beachtung gefunden hat. Hierfür läfst sich jedoch unschwer eine völlig ausreichende Erklärung geben. Das allgemeine Interesse für die Berücksichtigung der

Trägheitskräfte bei den Motoren mit Kurbelgetriebe erwachte bekanntlich erst nach dem Erscheinen von Radinger's Theorie der Maschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit (1869). Jetzt liefs sich erst klar erkennen, was Poncelet in seiner Darstellung versäumt hatte. Er hatte nämlich nicht daran gedacht, die Drücke der Massenbeschleunigungen mit dem Expansionsdiagramm der Dampfwirkung *anschaulich* zu combiniren und war deshalb auch nicht in der Lage, die praktisch wichtigen Folgerungen aus seiner im übrigen ganz exacten kinetischen Theorie zu ziehen. Zu diesem Schritte, welchen Radinger gethan hat, war eben die Zeit, in welcher Poncelet lebte, noch nicht hinreichend impulsiv.

13. *Die Stofswirkungen bei Poncelet.* Für die Berechnung der Masse des Schwungrades sowie der kinetostatischen Beanspruchung desselben hat Poncelet in jeder Hinsicht Ausgezeichnetes geleistet. Gründlich vorbereitet durch die vorangehende dynamische Behandlung des Kurbelsystems entspricht diese Theorie allen Anforderungen, welche die moderne Technik an die Lösung dieses Problems stellen kann. Zur bequemeren Handhabung derselben hat Poncelet eine graphische Durchführung gegeben, die sich natürlich auf die analytischen Ableitungen stützt.

Seine neue Theorie der Zahnräder hat sich in ihren Grundzügen bis jetzt bewährt, doch legt man neuerdings mit Recht gröfseren Wert auf eine gleichmäfsigere Verteilung der Auflagedrücke und gewinnt durch das Studium der Abnützungsergebnisse neue Gesichtspunkte zu geometrischen Verbesserungen in Gestalt und Anordnung der Verzahnungen.

Poncelet hat auch den Maschinen, bei deren Wirkung plötzliche Geschwindigkeitsänderungen auftreten, wie Stampfen, Hammerwerken, Stofsmaschinen, ein hervorragendes Interesse entgegengebracht. Nirgends ist die theoretische Behandlung mit so eigentümlichen, heute noch nicht überwundenen Schwierigkeiten verbunden wie hier. Der Grund liegt in der ungenügenden Ausbildung der Stofsgesetze. Lagrange hat sich in seiner „Mécanique analytique" gar nicht damit beschäftigt, obwohl D'Alembert von neuem die Aufmerksamkeit der Mathematiker darauf gelenkt hatte. Man erkennt aber leicht, dafs die Untersuchung der Stofswirkungen gar nicht in den Bereich der rationellen Mechanik gehört, sondern ein specifisch physikalisches Problem ist. Zu dieser Auffassung mufste schon eine richtige Deutung des Carnot'schen Principes führen. Bevor die kinetischen Grundlagen in dem ganzen Verlauf des Stofsprocesses je nach der materiellen Constitution der sich treffenden Körper physikalisch bekannt sind, kann die Mechanik nicht eintreten. Eine neue Arbeit von Herrn A. Korn zeigt uns aber zur Genüge, welche Verwickelungen bei einer exacten Behandlung schon in dem ver-

hältnismäfsig einfachen Falle des elastischen Stofses auftreten. Poncelet war sich dieser Schwierigkeiten wohl bewufst, hat sich aber bei diesem Teile seiner dynamischen Untersuchungen so geschickt geholfen, als es überhaupt möglich war. Der von ihm eingeschlagene Weg läfst sich vielleicht am klarsten durch die Wiedergabe seiner eigenen Worte charakterisiren. „Um die in dem Systeme stattfindenden Verluste an lebendiger Kraft zu berechnen, mufs man sich die Maschine in ihre verschiedenen einzelnen Bestandteile zerlegt denken und untersuchen, was für jeden dieser Bestandteile gesondert stattfindet. Denn man sieht leicht ein, dafs, wenn irgend zwei Bestandteile einer zusammengesetzten Maschine zusammenstofsen, in jedem derselben Compressionskräfte P, P' hervorgerufen werden, welche nach der Normalen in dem Berührungspunkte wirken, sowie bewegende Kräfte $\varphi = m\frac{dv}{dt}$, welche von der Geschwindigkeitsänderung jeder Masse herrühren. Aufserdem veranlassen diese verschiedenen Kräfte an den Lagern und Zapfen Reactionen, welche wir allgemein mit N bezeichnen wollen und welche Reibungen hervorrufen, die durch fN ausgedrückt werden können. Nun findet aber nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten jeden Augenblick zwischen den in jedem Falle nach einer entsprechenden und leicht zu bestimmenden Richtung genommenen verschiedenen Kräften P, P', φ, fN das Gleichgewicht statt, und da der Körper nur eine einzige geometrische Bewegung annehmen kann, so giebt es auch nur eine einzige Gleichung des Gleichgewichts. Aber da es nicht darauf ankommt, den Wert der Kräfte P, P' und der Geschwindigkeit für jeden Augenblick der Stofsperiode zu bestimmen, und da aufserdem das Gesetz der bewegenden Kräfte φ unbekannt ist, so untersucht man nur, was in dem Augenblicke der gröfsten Zusammendrückung stattfindet, um daraus die Geschwindigkeit der verschiedenen Massen m und den Verlust an lebendiger Kraft abzuleiten. Die oben erwähnte Gleichgewichtsgleichung ist aber zu diesem Zwecke hinreichend, wenn sie auf die verschiedenen Bestandteile der Maschine angewendet wird, und wenn man sie von dem Augenblicke des Anfangs der Compression bis zum Ende derselben integrirt annimmt. Diese Gleichung giebt also, wenn die Geschwindigkeit eines Teiles vor dem Stofs als bekannt vorausgesetzt wird, die Geschwindigkeit desselben nach dem Stofs und folglich die aller anderen Punkte der Maschine. Wenn man demnach von der lebendigen Kraft, welche vor dem Stofs stattfindet, die in dem Moment der gröfsten Compression stattfindende abzieht, so erhält man den Ausdruck der verlorenen lebendigen Kräfte.“ In diesem Sinne hat nun Poncelet den Stofs der Hebedaumen und Stampfer, die impulsiven Wirkungen bei den Hammerwerken und bei den Maschinen zum Durchschlagen, Schneiden und Prägen eingehend behandelt. Die Grundlagen der

Berechnungen sind nicht an allen Stellen völlig einwurfsfrei, aber solange nicht umfangreiche, durch geeignete theoretische Gesichtspunkte geleitete Experimentaluntersuchungen planmäfsig in Angriff genommen werden, ist eine Consolidirung dieses Gebietes der technischen Mechanik nicht zu erwarten.

14. *Die Durchführung der Reibungsprobleme bei Poncelet.* Die Berücksichtigung der Reibung bei den kinetischen Problemen der Technik verursacht ebenfalls aufserordentliche Schwierigkeiten. Wie im Falle des Stofses haben wir es auch hier mit einem Vorgange zu thun, dessen specifische Eigentümlichkeiten — weil auf physikalischer Grundlage ruhend — nur durch experimentelle Methoden erkannt werden können. Die Versuche von Coulomb und Morin führten nun allerdings zu sehr einfachen Gesetzen, die sich auch in einigen Fällen der Praxis innerhalb zulässiger Grenzen als brauchbar erwiesen haben. Aber genauere Beobachtungen haben gar bald gezeigt, dafs dieselben meistens so erheblich von der Wirklichkeit abweichen, dafs sie nicht einmal als Grundlage oberflächlicher Überschläge dienen können, geschweige denn als sichere Daten für eine langwierige theoretische Untersuchung. Über die neueren Versuchsergebnisse ist erst in einem späteren Abschnitt dieses Referates zu berichten. Hier genügt es, die Leistungen Poncelet's in kurzen Zügen zu kennzeichnen. Da sich Poncelet der ungewöhnlichen Schwierigkeiten auf diesem Gebiete klar bewufst war, so hat er sich in der Behandlung desselben von vornherein eine wesentliche Beschränkung auferlegt. Die einfachen Coulomb'schen Erfahrungssätze für richtig haltend, sah er doch sofort ein, dafs ein wechselndes Regime im Verlauf der Geschwindigkeiten einer arbeitenden Maschine wegen der hiermit verbundenen Veränderungen der Reactionen in den Gelenken und Auflageflächen — auch bei seinen einfachen Voraussetzungen — unüberwindbare analytische Schwierigkeiten herbeiführen würde. Er entschlofs sich deshalb bei der Berechnung der passiven Widerstände in den Maschinenteilen sowohl eine gleichmäfsige Bewegung als auch eine nahezu unveränderliche Kräftewirkung von vornherein vorauszusetzen. Ferner führt er die Untersuchung unmittelbar nur für Maschinenelemente durch. Aber seine Darstellung, welche mit der Umsicht und Gewandtheit eines genialen Forschers ausgeführt ist, läfst doch deutlich genug erkennen, dafs er über eine statische Behandlung des Gegenstandes nicht wesentlich hinausgekommen ist. Die Frictionsdynamik ist heute noch in einer sehr rückständigen Verfassung, ja man thut vielleicht gut, die Ansätze, welche bis jetzt für die starren Systeme vorliegen, gar nicht weiter zu verfolgen, denn sie leiden an einem unverbesserlichen Grundübel, auf welches Herr Painlevé aufmerksam gemacht hat. Die Dynamik starrer Systeme kennt nämlich nur die geometrische

Berührung zweier Körper in einem, zwei oder drei Punkten, in einer geraden Linie oder bei nicht völliger Übereinstimmung der Krümmungen in einem infinitesimalen Flächenelement. Die praktisch vorkommenden Berührungen, denen man doch gern eine möglichst grofse Ausdehnung giebt, sind fast durchweg geometrisch überstimmt, setzen also nicht mehr die absolute Starrheit der berührenden Körper voraus, die auch praktisch gar nicht vorkommt. Da wir auf diesen wichtigen Gegenstand später noch einmal ausführlicher zurückkommen, so mögen diese Andeutungen jetzt genügen. Poncelet hat auch den verwandten Untersuchungen über die Reibung und Steifigkeit der Seile einen breiten Raum gewidmet, da sie aber in neueren Darstellungen der technischen Mechanik fast ganz unverändert wiedergegeben sind, so können wir sie — weil allgemein bekannt — hier übergehen. Auch die ausführlichen Auseinandersetzungen Poncelet's über die calorischen und ökonomischen Verhältnisse der damals gebräuchlichen Dampfmaschinen sind nicht eingehend zu besprechen, denn sie schliefsen sich in Form und Inhalt aufs engste an die Pambour'sche Darstellung an.

15. *Poncelet's Verdienste um die Hydraulik.* Auf dem Gebiete der Hydraulik hatte Poncelet bedeutende Vorgänger, wie Daniel Bernoulli, D'Alembert, Prony, Eytelwein, Girard und Navier. Seine Thätigkeit war deshalb hier besonders darauf gerichtet, die grofse Menge der ihm vorliegenden Resultate kritisch zu sichten und die hydrodynamischen Gesichtspunkte, welche die mathematischen Theorien beherrschten, systematisch auszubilden. Daneben hat er durch zahlreiche, sorgfältig ausgeführte Versuche das Beobachtungsmaterial erheblich bereichert. Besonders eingehend sind die Stauungsverhältnisse fliefsender Gewässer behandelt, wobei er jedoch vorwiegend der trefflichen Arbeit Belanger's gefolgt ist. Vor allem sind aber hier Poncelet's Verdienste um die Ausbildung der Theorie der Wasserräder hervorzuheben. Die analytische Durchführung derartiger Probleme stützt sich auf die Bernoulli'sche Hypothese paralleler Querschnitte des bewegten Wassers. Hierdurch wird es möglich, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte zum Ausgangspunkt der Rechnung zu machen. Dabei sind aber die Verluste kinetischer Energie des Wassers beim Eintritt und Austritt sorgfältig in Betracht zu ziehen. Poncelet gelangt auf die Weise zu dem Satze, dafs der Nutzeffect der gesamten Wirkung, welche dem verfügbaren Gefälle entspricht, vermindert um die lebendige Kraft, welche das Wasser bei dem Verlassen der Maschine noch behält, und um diejenige lebendige Kraft, welche dasselbe beim Eintritt durch den Stofs verliert, gleich ist. Nachdem diese Principien auf die Wirkung der verticalen Wasserräder mit ebenen Schaufeln angewendet und gezeigt ist, dafs ihr Nutzeffect zwischen 0,2 und 0,3

liegt, giebt Poncelet die Theorie der nach ihm benannten Wasserräder mit gekrümmten Schaufeln. Hier ist bekanntlich der Verlust des Wassers an kinetischer Energie beim Eintritt in das Gerinne fast verschwindend. Die Gleichung der lebendigen Kräfte zeigt, dafs der praktische Nutzeffect bei dieser Construction 0,75 des theoretischen beträgt. Auch die Theorie der horizontalen Turbinen, die damals noch wenig verbreitet waren, hat Poncelet ausgearbeitet und das von Navier geleistete in mancher Beziehung überholt.

16. Das Vorstehende mag genügen, um Poncelet's grundlegende Bedeutung für die technische Mechanik und insbesondere für den kinetischen Teil derselben erkennen zu lassen. Nach ihm haben viele mit Erfolg auf diesem Gebiete weitergearbeitet. Redtenbacher hat in seinem „Maschinenbau" (1862—1865) ganz besonders dazu beigetragen, dafs auch deutsche Geistesarbeit einen integrirenden Teil zu diesem Bau geliefert hat. Seine mechanische und analytische Durchbildung steht derjenigen Poncelet's nicht nach, aber da das Fundament zu seiner Zeit einmal gelegt war, so war sein Bestreben vornehmlich darauf gerichtet, die bereits in Angriff genommenen Probleme in der Form eleganter zu gestalten — worin er den französischen Ingenieuren nichts nachgab — und andererseits Aufgaben zu bearbeiten, die erst für ihn zeitgemäfs waren, wie das wichtige Problem der oscillatorischen Bewegung der Locomotive während der Fahrt. Auch hatte unterdes die Physik ein neues Gebiet eröffnet — die mechanische Wärmetheorie, deren Bedeutung für den Bau calorischer Maschinen Redtenbacher wohl zuerst erkannt und erfolgreich verwertet hat.

In England hat man sich während der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts um Probleme der technischen Dynamik wenig bekümmert, vielmehr den auf empirischen Grundlagen betriebenen Maschinenbau einträglicher gefunden. Auch waren die geschäftlich günstigsten Zeiten nicht besonders geeignet, speculative Forschungen zu fördern, deren Erfolg in der Technik doch nur ausnahmsweise ein unmittelbarer ist. Erst nach dem Erscheinen von Rankine's Manual of applied Mechanics (London 1858) ist das Interesse für theoretische Behandlung technischer Probleme auch hier ein allgemeineres geworden.

C. Übersicht der allgemeinen Kinetik des Kurbelgetriebes.

17. Ehe wir zur Darstellung von Radinger's Theorie der Massenwirkungen in der Dampfmaschine übergehen, erscheint es zweckmäfsig, gewisse Principien und Methoden der rationellen Mechanik eingehender zu betrachten, die für die Beurteilung der dynamischen Grundlagen dieser Theorie und der sich hieran anschliefsenden Arbeiten

feststehende Gesichtspunkte gewähren. Von hier aus läfst sich dann auch das Wesentliche dieser Leistungen von dem minder Wichtigen leichter absondern, und es wird gleichzeitig ein weiterer Gesichtskreis für eine objective Beurteilung der später in Betracht kommenden Litteraturerscheinungen gewonnen.

18. *Die Bewegungsgleichungen von Lagrange.* Wir beginnen mit einer Discussion der Lagrange'schen Differentialgleichung für die vorliegenden Zwecke. Bezeichnet man in üblicher Weise die Coordinaten des dynamischen Systems mit $q_1, q_2, \cdots$, die entsprechenden Componenten des Kraftfeldes mit $Q_1, Q_2, \cdots$ und setzen $\frac{d q_\iota}{d t} = \dot{q}_\iota$, dann ist die Bewegung des Systems mit der kinetischen Energie E bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\iota} - \frac{\partial E}{\partial q_\iota} = Q_\iota, \quad \iota = 1, 2, \cdots$$

In unserem Falle setzt sich die Gröfse E aus drei Teilen zusammen, so dafs wir $E = E_0 + E_{01} + E_1$ setzen können, wenn nur eine Kurbel vorliegt. E_0 bezeichnet die kinetische Energie der rotirenden Teile (Welle, Schwungrad, Kurbel und etwa vorhandene Gegengewichte, Excenter und dergleichen). E_{01} ist die Energie der Lenkstange und E_1 diejenige der translatorischen Teile (Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben). Sind mehrere Kurbeln mit gegebenen Schränkungswinkeln vorhanden, so wird der Gang der Rechnung hierdurch nicht wesentlich beeinflufst. Q bestimmt sich in bekannter Weise aus den Diagrammen des treibenden und des effectiven Widerstandes. Von dem Einflufs der Reibung soll hier noch abgesehen werden. Handelt es sich nun nur um die Erkenntnis des Bewegungsvorganges in dem Kurbelmechanismus, so führt man als einzige Coordinate am bequemsten den Winkel der Kurbelerhebung über eine der Totlagen ein, setzt also $q = \theta$ und bringt E auf die Form $E = \frac{1}{2} F \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$. Hierin ist F eine bekannte Function des Trägheitsmomentes der rotirenden Teile und der Lenkstange sowie der Masse der translatorischen Teile und der Lenkstange. Als veränderliche Gröfse tritt nur der Positionswinkel θ auf. Die Lagrange'sche Gleichung wird jetzt:

$$F\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\theta}\cdot\dot{\theta}^2 + Q, \quad \text{wo } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \text{ ist.}$$

Sie gestattet also die Bestimmung der Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ für jeden Zeitmoment, wenn $\dot{\theta}$ für denselben bekannt ist. Da sich nun $\dot{\theta}$ aus der Gleichung, welche das Princip der Erhaltung der Energie liefert, als Function von θ durch eine Quadratur bestimmen läfst,

so kann man auch $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ als bekannt ansehen. Der wirklichen Ausführung der Rechnung stellen sich allerdings mancherlei Hindernisse in den Weg, aber diese sollen erst später betrachtet werden.

Weniger einfach ist der Gang der analytischen Behandlung, wenn die Gröſsen und Richtungen der Zapfen- und Auflagedrücke für jeden Kurbelwinkel verlangt werden. Doch geben auch in diesem Falle die Lagrange'schen Gleichungen die übersichtlichste Form der Lösung.

Wir denken uns nämlich zunächst auſser θ auch r veränderlich, dann kann man E als Function von θ, r, $\dot{\theta}$ und $\dot{r}$ ausdrücken. Ebenso wollen wir auch annehmen, l sei neben θ variabel, so daſs man noch einen zweiten Ausdruck für E bilden kann. Statt der wirklichen Bewegung, welche nur einen Grad der Freiheit besitzt, substituirt man also der Reihe nach zwei virtuelle Bewegungen mit zwei Graden der Freiheit, deren Natur ohne weiteres aus den Annahmen verständlich ist. Die betreffenden kinetischen Energien haben die Form

$$F' = \tfrac{1}{2} L' \dot{\theta}^2 + M' \dot{\theta}\dot{r} + \tfrac{1}{2} N' \dot{r}^2 \text{ und } F'' = \tfrac{1}{2} L'' \dot{\theta}^2 + M'' \dot{\theta}\dot{l} + \tfrac{1}{2} N'' \dot{l}^2.$$

Zu den Lagrange'schen Gleichungen für die Variablen r und l treten jetzt noch die Bedingungsgleichungen $r = \text{const.}$ und $l = \text{const.}$, so daſs dieselben die folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F'}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial F'}{\partial r} = Q_r + S_r, \quad r = \text{const.}\ \dot{r} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F''}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial F''}{\partial l} = Q_l + S_l, \quad l = \text{const.}\ \dot{l} = 0,$$

Die mit Indices versehenen Gröſsen Q sind die Componenten der treibenden und widerstehenden Kräfte bezogen auf die virtuellen Veränderungen der betreffenden Coordinaten. S_r und S_l sind die Componenten des Kurbelzapfendruckes in der Richtung des Kurbelarmes und der Lenkstange. Die Ausdrücke für dieselben lassen sich in eine noch übersichtlichere Form bringen. Durch Einführung des Wertes von F' und Differentiation erhält man nämlich

$$M'\ddot{\theta} + \left(\frac{\partial M'}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial L'}{\partial r}\right)\dot{\theta}^2 = Q_r + S_r.$$

Nun ist aber nach der ursprünglichen Bewegungsgleichung

$$F\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \theta}\dot{\theta}^2 + Q_\theta.$$

Folglich lassen sich die Componenten des Drucks auf den Kurbelzapfen in die Form bringen:

$$S_r = A'\dot{\theta}^2 + B', \; S_l = A''\dot{\theta}^2 + B''.$$

Hierin bezeichnen die Gröfsen A und B bekannte Functionen des Winkels θ. Für die Bedürfnisse der Praxis kann man sich selbstverständlich weitgehende Vereinfachungen in diesen Ausdrücken erlauben, dagegen ist es in vielen Fällen nicht statthaft, den Einflufs der Winkelbeschleunigung von vornherein zu vernachlässigen.

Kennt man die Drücke auf den Kurbelzapfen, so hat die Berechnung der Reactionskräfte am Kreuzkopfzapfen und im Wellenlager keine erwähnenswerte Schwierigkeit.

19. *Die Beanspruchung eines bewegten starren Körpers und eines aus starren Gliedern bestehenden Systems.* Wir wenden uns nun zu einer Discussion des D'Alembert'schen Princips, welches der natürliche Ausgangspunkt für die Behandlung kinetostatischer Probleme ist. Bezeichnet man mit X, Y, Z die Componenten der auf die Volumeinheit ($V = 1$) bezogenen körperlichen Kräfte, mit $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ die auf die Flächeneinheit ($O = 1$) bezogenen Oberflächenkräfte und mit U, V, W die Reactionscomponenten im Massen-Elemente $\sigma d V$, welche durch die Systemverbindung bedingt sind, dann lauten die Bewegungsgleichungen für ein beliebiges Element bei Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems[1]):

$$(a)\qquad \begin{cases} \sigma d V \dfrac{d^2 x}{d t^2} = X \sigma d V + (\overline{X} d O) + U \sigma d V \\ \sigma d V \dfrac{d^2 y}{d t^2} = Y \sigma d V + (\overline{Y} d O) + V \sigma d V \\ \sigma d V \dfrac{d^2 z}{d t^2} = Z \sigma d V + (\overline{Z} d O) + W \sigma d V \end{cases}$$

Für eine mit den geometrischen Bedingungen des Systems vereinbare Verrückung (δx, δy, δz) ist dann nach D'Alembert's Princip

$$(b)\qquad \int (U \delta x + V \delta y + W \delta z) \sigma d V = 0,$$

wenn das Integral über die ganze Masse des Systems erstreckt wird. Das System möge zunächst als ein starres vorausgesetzt werden, das aber in einem beliebigen Bewegungszustand begriffen sein, also 6 Grade der Freiheit besitzen kann. In dem Körper nehmen wir ein mit demselben festverbundenes Coordinatensystem (x', y', z') an und legen durch einen beliebig gewählten Punkt (E) eine Ebene. Hierdurch wird ein einfach zusammenhängender Körper geometrisch in zwei Stücke A und B zerlegt. Das Integral (b) zerfällt jetzt gleichfalls in zwei Teile, deren Summe natürlich gleich Null bleibt. Wir wollen uns nun für einen Augenblick den geometrischen Schnitt physisch realisirt denken und uns vorstellen, in

1) Die Flächenkräfte sind nur an der Oberfläche von Null verschieden.

dem Stück A sei senkrecht zur Schnittebene ein prismatischer Zapfen eingelassen, dem an der entsprechenden Stelle des Stückes B ein passendes Zapfenloch gegenübersteht. Hierdurch können die Teile nach der Trennung wieder so zusammengefügt werden, dafs sie in ihrer Verbindung mit dem ursprünglichen Körper geometrisch identisch sind. Ist das System unter dem Einflufs der treibenden Kräfte in Bewegung, so entsteht die Frage, wie die statische Beanspruchung des Zapfens vollständig zu bestimmen ist. Hierzu könnte man die allgemeinen virtuellen Verschiebungen des Körpers B relativ zu dem Körper A ausdrücken und dann das Princip der virtuellen Arbeiten anwenden. In dem Sinne der Ball'schen Untersuchungen liefse sich die Gesamtbeanspruchung des Zapfens durch einen „wrench" ausdrücken. Wir ziehen jedoch hier die in der Technik gebräuchliche Reduction des Kräftesystems auf drei Gruppen vor und bemerken, dafs dieser Weg in einem allerdings sehr einfachen Beispiele (Beanspruchung einer unendlich dünnen Pendelstange) schon von Routh eingeschlagen wurde. Bei einem beliebigen starren Körper — in allgemeiner Bewegung — können wir die Beanspruchung des Zapfens auf Zug, Scherung, Biegung und Torsion für eine beliebige virtuelle Trennungsebene bestimmen. Es sind demnach im allgemeinen zwei Resultantkräfte (Zug und Scherung) und zwei Momente (Biegung und Torsion) zu berechnen. Zu diesem Zwecke beziehen wir die Bewegung der Elementarteile auf das mit dem Körper fest verbundene Coordinatensystem (x', y', z') und bezeichnen die Componenten der Beschleunigungen und Kräfte, insofern sie auf dieses System bezogen sind, mit einem Index. Dann ist für ein Element im Innern des Körpers:

$$\left.\begin{aligned} U' &= \frac{d^2x'}{dt^2} + A' - X' \\ V' &= \frac{d^2y'}{dt^2} + B' - Y' \\ W' &= \frac{d^2z'}{dt^2} + C' - Z' \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

A', B', C' sind die Componenten der Beschleunigung des Coordinatenursprungs (x_0', y_0', z_0'). Die Componenten der Winkelgeschwindigkeit (ω) um die Momentanaxe seien p, q, r, so dafs

$$\ddot{x}' = -(q^2 + r^2)x' + p(qy' + rz') + \dot{q}z' - \dot{r}y'$$
$$\ddot{y}' = -(r^2 + p^2)y' + q(rz' + px') + \dot{r}x' - \dot{p}z'$$
$$\ddot{z}' = -(p^2 + q^2)z' + r(px' + qy') + \dot{p}y' - \dot{q}x'$$

wird. Setzen wir nun

$$2T = (qz' - ry')^2 + (rx' - pz')^2 + (py' - qx')^2$$
$$L = \tfrac{1}{2}(y'^2 + z'^2)\dot{p}, \quad M = \tfrac{1}{2}(z'^2 + x'^2)\dot{q}, \quad N = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\dot{r},$$

dann nehmen die Beschleunigungscomponenten die Form an:

$$\ddot{x}' = -\frac{\partial T}{\partial x'} + \frac{\partial M}{\partial z'} - \frac{\partial N}{\partial y'},$$

$$\ddot{y}' = -\frac{\partial T}{\partial y'} + \frac{\partial N}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial z'},$$

$$\ddot{z}' = -\frac{\partial T}{\partial z'} + \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial M}{\partial x'}.$$

In derselben Weise lassen sich aber auch die Gröfsen A' B' C' sowie X' Y' Z' ausdrücken. Demnach können wir auch schreiben[1]):

$$U' = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial M'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial y'},$$

$$V' = \frac{\partial P'}{\partial y'} + \frac{\partial N'}{\partial x'} - \frac{\partial L'}{\partial z'},$$

$$W' = \frac{\partial P'}{\partial z'} + \frac{\partial L'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial x'},$$

worin nun P', L', M', N' bekannte Functionen der Coordinaten x' y' z', der Winkelgeschwindigkeiten p, q, r, der Winkelbeschleunigungen $\dot{p}$ $\dot{q}$ $\dot{r}$ sowie der Beschleunigungen des Punktes x_0' y_0' z_0' sind. Hieraus bilden wir nun die Resultantkräfte und Momente der auf B wirkenden inneren Kräfte in Bezug auf die Zapfenstelle x_e', y_e', z_e', an welcher die Körper A und B miteinander verbunden sind. Auf diese Weise erhält man die resultirenden Kräfte

$$B\,U_i = \int \sigma\, U'\, d\,V, \quad B\,V_i = \int \sigma\, V'\, d\,V, \quad B\,W_i = \int \sigma\, W'\, d\,V$$

und die Momente

$$M_x = \int \sigma (z'\,V' - y'\,W')\, d\,V - B\,(z_e'\,V_i - y_e'\,W_i),$$

$$M_y = \int \sigma (x'\,W' - z'\,U')\, d\,V - B\,(x_e'\,W_i - z_e'\,U_i),$$

$$M_z = \int \sigma (y'\,U' - x'\,V')\, d\,V - B\,(y_e'\,U_i - x_e'\,V_i).$$

B bedeutet hier die Masse des abgetrennten Körperstückes B, über die auch alle Integrationen zu erstrecken sind. Nach einem häufig benutzten Satze der Integralrechnung lassen sich aber die vorstehenden Ausdrücke in die folgende Form bringen:

$$B\,U_i = \int \sigma (\overline{P}\cos\xi + \overline{M}\cos\zeta - \overline{N}\cos\eta)\, d\overline{B} - \int \left(P\frac{\partial \sigma}{\partial x} + M\frac{\partial \sigma}{\partial z} - N\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) d\,V,$$

$$B\,V_i = \int \sigma (\overline{P}\cos\eta + \overline{N}\cos\xi - \overline{L}\cos\zeta)\, d\overline{B} - \int \left(P\frac{\partial \sigma}{\partial y} + N\frac{\partial \sigma}{\partial x} - L\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right) d\,V,$$

$$B\,W_i = \int \sigma (\overline{P}\cos\zeta + \overline{L}\cos\eta - \overline{M}\cos\xi)\, d\overline{B} - \int \left(P\frac{\partial \sigma}{\partial z} + L\frac{\partial \sigma}{\partial y} - M\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) d\,V,$$

1) Voigt Compend. der theoretischen Physik 1. Bd., 383.

und

$$\int \sigma(z'V' - y'W')dV$$

$$= \int \sigma[(\bar{z}'\bar{N} + \bar{y}'\bar{M})\cos\xi + (\bar{z}'\bar{P} - \bar{y}'\bar{L})\cos\eta - (\bar{y}'\bar{P} + \bar{z}'\bar{L})\cos\zeta]d\bar{B}$$

$$- \int \left[(z'N + y'M)\frac{\partial\sigma}{\partial x'} + (z'P - y'L)\frac{\partial\sigma}{\partial y'} - (y'P + z'L)\frac{\partial\sigma}{\partial z'}\right]dV,$$

$$\int \sigma(x'W' - z'U')dV$$

$$= \int \sigma[(\bar{x}'\bar{L} + \bar{z}'\bar{N})\cos\xi + (\bar{x}'\bar{P} - \bar{z}'\bar{M})\cos\eta - (\bar{z}'\bar{P} + \bar{x}'\bar{M})\cos\zeta]d\bar{B}$$

$$- \int \left[(x'L + z'N)\frac{\partial\sigma}{\partial x'} + (x'P - z'M)\frac{\partial\sigma}{\partial y'} - (z'P + x'M)\frac{\partial\sigma}{\partial z'}\right]dV,$$

$$\int \sigma(y'U' - x'V')dV$$

$$= \int \sigma[(\bar{y}'\bar{M} + \bar{x}'\bar{L})\cos\xi + (\bar{y}'\bar{P} - \bar{x}'\bar{N})\cos\eta - (\bar{x}'\bar{P} + \bar{y}'\bar{N})\cos\zeta]d\bar{B}$$

$$- \int \left[(y'M + x'L)\frac{\partial\sigma}{\partial x'} + (y'P - x'N)\frac{\partial\sigma}{\partial y'} - (x'P + y'N)\frac{\partial\sigma}{\partial z'}\right]dV.$$

$d\bar{B}$ ist hier ein Element der Oberfläche des Körpers B, und ξ, η, ζ sind die Winkel, welche die nach aufsen gerichtete Normale in diesem Elemente mit den Axen der Coordinaten $x'y'z'$ einschliefst. Da nun in fast allen Fällen, wenigstens bei den für den Maschinenbau in Betracht kommenden Materialien, die Dichte σ eine innerhalb des betreffenden Maschinenteiles unveränderliche Gröfse ist, so verschwinden unter dieser Annahme in den vorstehenden Formeln alle über den Raum (B) ausgedehnten Integrale und es bleiben nur die über die Oberfläche des Körpers erstreckten Integrale stehen, die sich aber in allen Anwendungsbeispielen aufserordentlich vereinfachen, da die Begrenzungen der Maschinenteile doch ganz vorwiegend — schon in Rücksicht auf die Herstellung und Bearbeitung derselben — Ebenen oder Kreiscylinderflächen sind.

Hat man nun die obigen Flächenintegrale ausgeführt, so sind nur noch die von den äufseren Oberflächenkräften herrührenden Bestandteile hinzuzufügen und das zuletzt erhaltene Kräftesystem so zu reduciren, dafs es nach der Richtung der Zapfenaxe und zwei zu einander senkrechten Richtungen in der Schnittebene zerlegt ist, um die endgültigen Werte für die Beanspruchung auf Zug, Scherung, Biegung und Torsion des in beliebiger Bewegung befindlichen Körpers zu erhalten. Hierbei mufs man natürlich die Gröfsen $\dot{x}_0'$, $\dot{y}_0'$, $\dot{z}_0'$; $\ddot{x}_0'$, $\ddot{y}_0'$, $\ddot{z}_0'$; p, q, r und $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ für die ausgewählte Lage oder den bestimmten Zeitpunkt als bekannt voraussetzen, so dafs man im all-

gemeinen Falle die Integrale der Bewegungsgleichungen als bereits vorliegend betrachten müſste. Eine einfache Überlegung zeigt aber, daſs diese Voraussetzung nicht vollständig oder — wie in fast allen wichtigen Fällen der technischen Anwendung — gar nicht erfüllt sein muſs. Denken wir uns nämlich, der auf seine Festigkeit zu untersuchende bewegte Körper sei in dem Punkte $(x_0' y_0' z_0')$ festgehalten, so daſs er nur noch drei Grade der Freiheit besitzt, so drücken die Euler'schen Gleichungen $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ als Functionen von p, q, r aus, und das Princip der lebendigen Kräfte giebt für den Fall eines Potentials der äuſseren Kräfte eine Beziehung zwischen $\dot{p}$, $\dot{q}$ und $\dot{r}$, sowie den die Lage des Körpers bestimmenden Coordinaten. Häufig wird auch das Princip der Flächen noch zwei weitere unabhängige Gleichungen für diese drei Componenten liefern, so daſs man die verlangten Gröſsen (p, q, r) ohne eine Integration von Differentialgleichungen von vornherein als Functionen der lagenbestimmenden Coordinaten kennt und ohne weiteres zur Bestimmung der Beanspruchungskräfte übergehen kann. Noch einfacher gestaltet sich diese Untersuchung, wenn nur ein Grad der Freiheit vorliegt, wie bei dem Kurbelmechanismus. Hier könnte man allerdings in einer anderen Richtung eine Schwierigkeit vermuten, da das System kein starres ist, wie wir anfangs vorausgesetzt haben. Aber nach dem in dem vorigen Abschnitt Auseinandergesetzten ist diese Schwierigkeit nur eine scheinbare. Greifen wir z. B. die Lenkstange aus dem Kurbelsystem heraus, so können wir dieselbe als einen freien Körper ansehen, wenn wir nur die Reactionen in dem Kurbel- und Kreuzkopfzapfen, die wir nun als bekannt ansehen dürfen, als Oberflächenkräfte zu den äuſseren Kräften (der Schwere) hinzunehmen. In dieser Weise ist der vorliegende Fall der kinetostatischen Untersuchung eines Gelenkteiles auf den allgemein behandelten zurückgeführt. Das Endintegral der Bewegungsgleichung braucht man hier gar nicht zu kennen, denn die Lagrange'sche Differentialgleichung giebt $\ddot{\theta}$ als Function von $\dot{\theta}$ und θ. Das Princip der Erhaltung der Energie liefert die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ vom Kurbelwinkel θ, und die oben dargestellte Methode ergiebt die expliciten Ausdrücke für die dynamostatische Beanspruchung eines beliebigen Querschnittes irgend eines Bestandteils des Kurbelmechanismus für jede Stellung des Kurbelarmes nach der Ausführung sehr einfacher Oberflächenintegrale. Nun sind freilich in Wirklichkeit die Constructionsteile einer Maschine nicht starre Körper, sondern mehr oder weniger elastisch und dadurch während der Bewegung und der Kraftübertragung periodischen Deformationen unterworfen, wodurch die oben gemachte Voraussetzung der Starrheit nicht mehr streng erfüllt ist und gleichzeitig auch die Angriffspunkte der inneren Kräfte entsprechende Verschiebungen erleiden. Für die kinetostatische Beurteilung des Mechanismus kann man die hieraus resultirende Be-

einflussung vorläufig immer vernachlässigen. Selbst wenn einmal in gewissen Fällen eine strenge Behandlung notwendig ist, so kann man die unter Voraussetzung der Starrheit gewonnenen Resultate doch fast immer als eine erste Annäherung betrachten und den Einflufs der elastischen Deformationen als Correctur hinzufügen.

Man kann die kinetostatische Untersuchung eines Systems auch zuweilen mit Vorteil direct an die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen anschliefsen. Damit aber die Anschauung des kinetischen und statischen Sachverhaltes nicht durch den Schematismus der Rechnung verdunkelt wird, erscheint es zweckmäfsig, vorher die begriffliche Bedeutung der Gleichungen von Lagrange mit einigen Worten hervorzuheben.

Bei dieser Überlegung ist nun von vornherein zu beachten, dafs die Coordinaten in diesen Gleichungen ganz allgemeine Be-

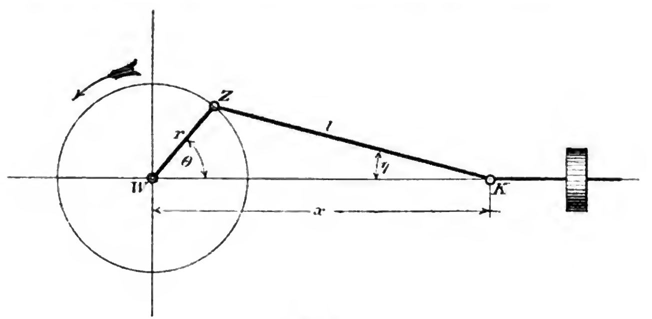


Fig. 1.

stimmungsgröfsen der Lage und Configuration des Systems sind. Ist dieses zwangsläufig, so genügt eine Coordinate (z. B. der Rotationswinkel des Kurbelarmes bei der Dampfmaschine Fig. 1), hat es zwei Grade der Freiheit, so sind zwei Coordinaten in passender Weise auszuwählen (Regulator Fig. 10). Diese Coordinaten können ihrer Natur nach Zahlgröfsen, Strecken, Flächenstücke oder begrenzte körperliche Räume sein. Da jedoch diese Auseinandersetzungen eigentlich in die systematischen Lehrbücher der Dynamik gehören, so wollen wir uns hier auf den ersten Fall beschränken, zumal sich die übrigen leicht darauf zurückführen lassen. Solche reine Zahlgröfsen sind z. B. die in absolutem Mafse ausgedrückten Winkel, welche häufige Verwendung finden. Aus dem ganzen System der Coordinaten greifen wir eine beliebige, θ, heraus und betrachten den kinetischen Procefs, welcher dem Übergang von θ in $\theta + \delta\theta$ ent-

spricht, während die übrigen Coordinaten unveränderlich bleiben. Die zugehörige Arbeitsleistung der äufseren Kräfte sei $Q\delta\theta$. Es bleibt also noch die Arbeit zu bestimmen, welche im kinetischen Energiefeld als Folge des gesamten Beschleunigungsprocesses geleistet wird. Diese setzt sich — im allgemeinen — aus zwei wesentlich verschiedenen Teilen zusammen. Die kinetische Energie erfährt zunächst eine Änderung für sich, d. h. insofern, als der unmittelbare Einflufs des Übergangs von θ in $\theta + \delta\theta$ im räumlichen Sinne in Betracht kommt. Dieser Arbeitsanteil ist offenbar $\frac{\partial E}{\partial \theta}\delta\theta$. Daneben ändert sich aber auch die Bewegungsgröfse $\Sigma m v$ des ganzen Systems infolge des Impulses, welchen das System der Geschwindigkeiten in der Zeit dt erhält. Die entsprechende Arbeitsgröfse ist dargestellt durch

$$d\Sigma m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\delta\theta = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\delta\theta,$$

oder, wenn wir das Mafs dieser Wirkung auf die Zeiteinheit beziehen, durch $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\delta\theta$. Nun ist klar, dafs, jemehr Arbeit aus dem zur Verfügung stehenden Betrage $Q\delta\theta$ zur Vermehrung von $\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\delta\theta$ aufgewendet wird, destoweniger zur Vermehrung der Gröfse $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\delta\theta$ übrig bleibt. Im allgemeinen ist also

$$Q\delta\theta = \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\delta\theta - \frac{\partial E}{\partial \theta}\delta\theta.$$

Die Gröfse $\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}$ ist die Componente der Bewegungsgröfse des Systems genannt worden, welche der Coordinate θ entspricht. Aber diese Bezeichnung hat keinen bestimmten Sinn, wenn die Dimension von θ nicht berücksichtigt wird. Ist θ eine reine Zahl, wie wir vorausgesetzt haben, so mufs man $\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}$ als das zugehörige Moment der Bewegungsgröfse $\Sigma m v$ des Systems auffassen. $\frac{\partial E}{\partial \theta}$ ist unter derselben Voraussetzung ebenfalls ein Moment. In der Nomenclatur der neueren technischen Dynamik wird diese Gröfse, abgesehen vom Vorzeichen, als Moment des Massendrucks bezeichnet. Die allgemeine Mechanik hat dieser Gröfse keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt, weil sie erst quantitativ bekannt wird, sobald die sogenannten Zwischenintegrale der Bewegungsgleichungen gefunden sind. In der technischen Mechanik begnügte man sich bisher fast immer mit einem Mittelwert für $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ etc., wodurch allerdings die dynamische Lösung des Problems ganz umgangen und durch eine

kinematische ersetzt wird (cf. Nr. 29). Im übrigen ist man auch mit der Bezeichnung „Massendruck“ nicht consequent vorgegangen, da die sogenannte Centrifugalkraft beim Regulator doch dieselbe Benennung verdiente, aber nicht erhalten hat. In Wirklichkeit ist $\frac{\partial E}{\partial \theta}$ weiter nichts als das Mafs der räumlichen Energieänderung, welche Dimension auch die Coordinate θ haben möge. Die Bewegungsgleichungen von Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E}{\partial \theta} = Q_\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial E}{\partial \psi} = Q_\psi, \ldots$$

würden demnach begrifflich interpretirt lauten:

> Das Moment der eingeprägten Kräfte in Bezug auf jede Coordinate ist gleich der totalen Zeitderivirten des entsprechenden Momentes der Bewegungsgröfse des Systems vermindert um das zugehörige Mafs der räumlichen Energieänderung.

Die Kraftmomente werden gewöhnlich aus den rechtwinkligen Kraftcomponenten X, Y, Z nach den bekannten Formeln

$$Q_\theta = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial \theta} + Y\frac{\partial y}{\partial \theta} + Z\frac{\partial z}{\partial \theta}\right), \quad Q_\psi = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial \psi} + Y\frac{\partial y}{\partial \psi} + Z\frac{\partial z}{\partial \psi}\right), \ldots$$

berechnet. Dies ist immer sehr einfach, aber zu einem anschaulichen Verständnis des kinetischen Vorgangs nicht hinreichend, welches erst durch eine einfache geometrische Überlegung gewonnen wird. Denken wir uns wieder nur die Coordinate θ in $\theta + \delta\theta$ verändert, so beschreiben die Angriffspunkte aller wirkenden Kräfte gewisse unendlich kleine Wege im Raum, welche wir mit dem gemeinsamen Zeichen $\delta' s$ bezeichnen wollen, da sie nicht mit den wirklichen Wegen zusammenfallen, wenn noch andere Coordinaten mafsgebend sind. Der Winkel, welchen P mit $\delta' s$ bildet, sei $(P/\delta' s)$. Dann ist offenbar die virtuelle Arbeit der Kräfte für das ganze System:

$$Q_\theta \delta\theta = \Sigma P \cos(P/\delta' s)\, \delta' s$$

und demnach:

$$Q_\theta = \Sigma P \cos(P/\delta' s)\frac{\delta' s}{\delta\theta}.$$

Das Moment Q_θ ist also begrifflich die Summe der Verhältnisse der virtuellen Arbeiten der einzelnen Kräfte zu der entsprechenden Coordinatenänderung, wenn die übrigen Coordinaten des Systems unverändert bleiben.

Der Zusammenhang des kinetostatischen Problems mit den Bewegungsgleichungen von Lagrange ist ein sehr naheliegender, wenn wir ein aus starren Gliedern bestehendes Gelenksystem von mehreren Freiheitsgraden voraussetzen. Wir denken uns nämlich, wie oben

bei der Betrachtung des einzelnen starren Körpers, einen Maschinenteil durch einen ebenen Querschnitt getrennt, wodurch der ganze Mechanismus in zwei Stücke A' und A'' zerfällt. Der Fall eines mehrfach zusammenhängenden Systems im Riemann'schen Sinne verlangt eine besondere Behandlung. Es handelt sich nun darum, das Kräftesystem der Reactionen für den angenommenen Schnitt so zu bestimmen, dafs bei Anbringung desselben an jeder Schnittfläche, natürlich im umgekehrten Vorzeichensinne, jedes abgetrennte Stück der Maschine sich unter dem Einflufs seiner äufseren Kräfte genau so bewegt, als wenn der Schnitt nicht realisirt wäre. Der Einfachheit wegen sollen zwei Grade der Freiheit angenommen werden. Wir bilden nun die kinetische Energie E' und das Moment Q' der äufseren Kräfte für das Stück A' und nennen die entsprechenden Momente der Reactionen S_θ' und S_ψ'. Dann heifsen die Bewegungsgleichungen für dieses System:

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E'}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial E'}{\partial \theta} = Q_\theta' + S_\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E'}{\partial \dot\psi} - \frac{\partial E'}{\partial \psi} = Q_\psi' + S_\psi.$$

Die Bewegungsgleichungen für das ganze System mit der Energie $E = E' + E''$ sind

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial E}{\partial \theta} = Q_\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot\psi} - \frac{\partial E}{\partial \psi} = Q_\psi.$$

Ihre Zwischenintegrale mögen die Form

$$(3)\qquad F_1(\theta, \dot\theta, \psi, \dot\psi) = C_1, \quad F_2(\theta, \dot\theta, \psi, \psi) = C_2$$

besitzen. Selbstverständlich dürfen bei der Bildung von Q_θ' und Q_ψ' nicht die Angriffspunkte der äufseren Kräfte verlegt werden, wie dies bei der Aufstellung der Gleichungen (2) oft üblich ist. Dagegen kann man die Rechnung gegebenenfalls vereinfachen, indem man statt der Gleichungen (1) die folgenden

$$(1\,a)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E''}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial E''}{\partial \theta} = Q_\theta'' - S_\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E''}{\partial \dot\psi} - \frac{\partial E''}{\partial \psi} = Q_\psi'' - S_\psi$$

aufstellt. Die Gröfsen

$$S_\theta = \frac{d}{dt}\frac{\partial E'}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial E'}{\partial \theta} - Q_\theta' = -\frac{d}{dt}\frac{\partial E''}{\partial \dot\theta} + \frac{\partial E''}{\partial \theta} + Q_\theta'',$$

$$S_\psi = \frac{d}{dt}\frac{\partial E'}{\partial \dot\psi} - \frac{\partial E'}{\partial \psi} - Q_\psi' = -\frac{d}{dt}\frac{\partial E''}{\partial \dot\psi} + \frac{\partial E''}{\partial \psi} + Q_\psi''$$

sind nun als Functionen von θ, ψ und der geometrischen Bestimmungsstücke der Lage des Querschnittes bekannt. Die beiden Momente S_θ und S_ψ werden aber zur Bestimmung des vollständigen Systems der Reactionskräfte im allgemeinen nicht ausreichen. Um zwei weitere Momente zu erhalten, müssen E und die Q durch

Einführung neuer Coordinaten ξ und η transformirt werden, wodurch man dann die Momente S_ξ und S_η erhält. So fährt man auch im allgemeinen Falle eines Systems mit mehr als zwei Freiheitsgraden fort, bis das Kräftesystem der Reactionen, d. h. die Resultantkraft und das Drehmoment derselben vollständig bestimmt sind.

Die Transformation der Energie und die Neuaufstellung der Q (falls kein Potential der äufseren Kräfte existirt) erscheint auf den ersten Blick sehr lästig, ist aber bei geschickter Wahl der Coordinaten auch in anderer Beziehung nützlich, da es alle statischen Betrachtungen ersetzt. Bei einfachen kinetostatischen Problemen — und solche sind bisher nur behandelt — wird man jedoch den üblichen Methoden, welche cartesische Coordinaten benutzen, den Vorzug geben. Aus einer gewissen theoretischen Neugierde könnte man, im Anschlufs an die obigen kinetostatischen Betrachtungen, die Aufgabe stellen, die Bewegung der beiden Teile A' und A'' von dem Augenblick der Trennung an zu untersuchen, indem man das Kraftfeld für die nächsten Augenblicke unverändert beibehält. Die oben definirten Energien E' und E'' werden allerdings nach dem Eintritt des Bruches durch andere zu ersetzen sein, welche aufser den bisherigen noch neue unabhängig Veränderliche enthalten. Offenbar kann man aber, wenn man die Bewegung von A' und A'' nur für eine sehr kurze Zeitdauer nach dem Eintritt der Katastrophe bestimmen will, sich hierzu der Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E'}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial E'}{\partial \theta} = Q'_\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E'}{\partial \dot\psi} - \frac{\partial E'}{\partial \psi} = Q'_\psi,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E''}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial E''}{\partial \theta} = Q''_\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E''}{\partial \dot\psi} - \frac{\partial E''}{\partial \psi} = Q''_\psi$$

bedienen, da auch der Einflufs der neuen geometrischen Verhältnisse und der sie ausdrückenden Zusatzvariablen in den ersten Zeitmomenten verschwindend klein bleibt. Sollte man einmal derartige theoretische Untersuchungen für technisch realisirte Mechanismen in Angriff nehmen, so würde selbstverständlich der dynamische Vorgang des wirklichen Zusammenbruches der Maschine durch solche theoretische Speculationen noch keineswegs adäquat dargestellt sein, da in dem praktischen Falle noch sehr wichtige Factoren mafsgebend sind, die in der obigen Problemstellung gar nicht berührt sind.

20. *Berechnung der Winkelgeschwindigkeit und der mittleren Geschwindigkeit beim Kurbelmechanismus. Kritik der üblichen Definition des Ungleichförmigkeitsgrades.* Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, soweit es für unser Problem in Betracht kommt, verlangt nur eine kurze Erörterung der Eigentümlichkeiten, welche hier auftreten. Sein Ausdruck folgt unmittelbar aus der Lagrange'schen Gleichung

$$F\frac{d\dot\theta}{dt} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\theta}\cdot\dot\theta^2 + Q.$$

Denn hieraus erhält man durch Multiplication mit $\dot\theta$

$$\tfrac{1}{2}\left(F\frac{d\dot\theta^2}{dt} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\cdot\dot\theta^3\right) = Q\dot\theta$$

oder

$$dE = Qd\theta \text{ d. h. } E - E_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} Qd\theta.$$

E_0 ist der Wert von E für $t = t_0$, wo dann auch $\theta = \theta_0$ wird. Wir wollen den Dampfdruck in der Richtung der Kolbenstange mit D und den Widerstand (W) im Kurbelzapfen senkrecht zum Kurbelarm angreifend denken, was erlaubt ist, so lange es sich nur um die Untersuchung der *Bewegung* des Mechanismus ohne Rücksicht auf die Druckspannungen handelt. Den Tangentialdruck des Dampfes bezeichnen wir mit T, den Kolbenweg mit x, dann hat man nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die bekannte Beziehung

$$-Ddx = Trd\theta,$$

oder da

$$x = r\cos\theta + l\cos\eta$$

ist:

$$D\left(r\sin\theta + l\sin\eta\frac{d\eta}{d\theta}\right) = Tr,$$

d. h.

$$T = D\left(\sin\theta + \frac{l}{r}\sin\eta\cdot\frac{d\eta}{d\theta}\right) = D\frac{\sin(\theta+\eta)}{\cos\eta}.$$

Nun ist

$$r(T - W) = Q.$$

Hierbei ist aber zu beachten, dafs die Wirkung der Schwere auf die beweglichen Teile vernachlässigt ist. Die Gleichung

$$E - E_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} Qd\theta$$

ergiebt jetzt $\dot\theta$ in der Form

$$\dot\theta = \sqrt{\frac{2E_0}{F} + \frac{2r}{F}\int_{\theta_0}^{\theta}(T - W)\,d\theta},$$

welche gewöhnlich als Grundlage für die Berechnung des Schwungrades benutzt wird. Der Widerstand W ist zuweilen constant. In diesem Falle wird

$$\int_0^{2\pi} T d\theta = 2\pi W \quad \text{oder} \quad \int_0^{4\pi} T d\theta = 4\pi W$$

für $\theta_0 = 0$ sein. je nachdem die Maschine im Zweitact oder — wie viele Gasmaschinen — im Viertact arbeitet. Setzen wir eine solche stationäre Bewegungsform voraus, so kann man sich die Frage stellen, wie grofs die Zeitdauer $\tilde{\omega}_{00}$ einer ganzen Periode ist, und diese in derselben Weise, wie bei dem Pendelproblem beantworten. Man erhält aus der Energiegleichung für den Zweitact:

$$\tilde{\omega}_{00} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E_0}{F} + \frac{2r}{F}\int_0^{\theta}(T - W)d\theta}}.$$

Da F, T und W als Functionen des Winkels θ bekannt sind, so kann man den Wert dieses bestimmten Integrals sehr bequem und mit beliebiger theoretischer Genauigkeit mit Hilfe der Gaufs'schen Quadraturmethode (vergl. Nr. 49) berechnen. Vielleicht gelingt es auch mit Hilfe von photographischen Serienaufnahmen, dieselbe Gröfse, sowie den Verlauf von $\dot{\theta}$ als Function von t (resp. θ) experimentell zu bestimmen, wenn W als dynamometrisch bekannter Bremswiderstand wirksam ist und gleichzeitig Dampfdiagramme aufgenommen werden. Aus dem Vergleich des theoretischen und beobachteten Wertes liefsen sich dann manche wertvolle Schlüsse ziehen.

Aus $\tilde{\omega}_{00}$ folgt die mittlere Geschwindigkeit $\dot{\theta}_{00} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_{00}}$. Hieran knüpft sich der Begriff des Ungleichförmigkeitsgrades (ε) der Maschine während des stationären Ganges derselben. Bisher hat man diese Gröfse nur als Function des Geschwindigkeitsmaximums ($\dot{\theta}'$) und Minimums ($\dot{\theta}''$) betrachtet und

$$\varepsilon = 2\frac{\dot{\theta}' - \dot{\theta}''}{\dot{\theta}' + \dot{\theta}''}$$

gesetzt. Als mittlere Geschwindigkeit ist hier nicht der obige Wert von $\dot{\theta}_{00}$ angenommen, sondern das arithmetische Mittel aus $\dot{\theta}'$ und $\dot{\theta}''$. Jedenfalls genügt diese übliche Definition von ε nicht den Anforderungen, die man an ein Mafs der Abweichung des functionalen Verlaufs einer Gröfse von ihrem Mittelwerte stellt. Es empfiehlt sich daher, dieselbe durch eine rationellere zu ersetzen.

Wir bilden zu diesem Zwecke das Integral

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\dot\theta}{\dot\theta_{00}}\right)^2 d\theta$$

und betrachten diesen Wert statt des ε als den Ungleichförmigkeitsgrad (cf. Fig. 2) des Kurbelmechanismus. Hierin ist von eminenten Werten der Winkelgeschwindigkeit nicht mehr die Rede, ebenso verschwindet der Einflufs des Vorzeichens von $\dot\theta_{00} - \dot\theta$, da diese Differenz zum Quadrat erhoben ist. Arbeitet die Maschine im Viertact, so hat man naturgemäfs

$$\mu' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left(1 - \frac{\dot\theta}{\dot\theta_{00}}\right)^2 d\theta$$

zu setzen. Die in jedem Falle auszuführende Quadratur bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten, wenn das graphische Material vorliegt. Der Zusammenhang der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\dot\theta_{00}$

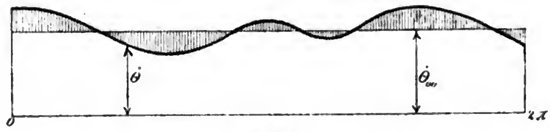


Fig. 2.

mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot\theta_0$, die der äufseren Totlage $\theta = 0$ entspricht, ist in Nr. 26 durch Näherungsrechnung in eine Form gebracht, welche eine sehr einfache Berechnung von $\dot\theta_{00}$ aus $\dot\theta_0$ oder von $\dot\theta_0$ aus $\dot\theta_{00}$ gestattet.

21. *Der Mehrkurbelmechanismus. Die Coordinaten des Schwerpunktes.* Bisher haben wir den Kurbelmechanismus als ein ebenes System betrachtet. Dies ist — namentlich für die kinetostatische Behandlung — nicht mehr zulässig, sobald mehrere Kurbeln vorhanden sind. Dann müssen die Ansatzgleichungen für ein räumliches System entwickelt werden. Wir wollen hier nur die Gröfsen F, welche in der Lagrange'schen Bewegungsgleichung auftreten, sowie die Lagenveränderungen des Schwerpunktes (x^*, y^*, z^*) des ganzen Systems bestimmen. Der Ursprung (O) des im Raume festen Coordinatensystems der x, y, z sei am Ende der Wellenaxe gelegen (cf. Fig. 3), die x-Axe liege wagerecht nach vorn, die y-Axe in der Wellenaxe nach links und die z-Axe senkrecht nach oben.

Hierzu treten noch die mit den Massen fest verbundenen — also im Raume beweglichen — Coordinatensysteme.

I. Rotirendes System. Der Coordinatenanfang O_0 falle mit O zusammen. Die Coordinaten a_0, b_0, c_0 — zur Zeit $t = t_0$ mit den absoluten zusammenfallend — rotiren in der Richtung $+ x \rightarrow + z$.

II. Systeme der Lenkstangen. Die Coordinatenanfangspunkte O_{01}, O_{02}, ... legen wir in die Mitte der betreffenden Kurbelzapfen. Systemcoordinaten: $a_{0\iota}$ in der Axe der Lenkstange nach dem Kreuzkopf zu wachsend, $b_{0\iota}$ parallel zur y-Axe, $c_{0\iota}$ gleichstimmig mit der z-Axe.

III. System der Kreuzköpfe. Die Coordinatenanfangspunkte O_1, O_2, ... in der Mitte der Kreuzkopfzapfen. Die Coordinate a_ι

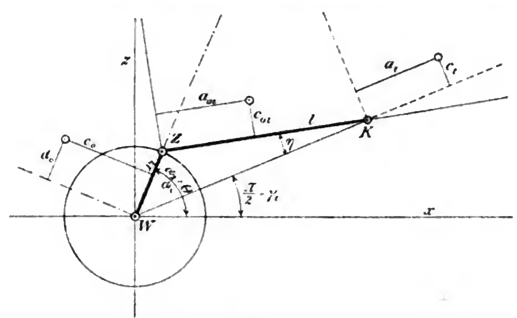


Fig. 3.

in der Axe der Kolbenstange nach dem Kolben zu wachsend, b_ι parallel zur y-Axe, c_ι gleichstimmig zur z-Axe.

Die Geradführungen bilden mit der positiven z-Axe die Winkel γ_1, γ_2, ...

e_1, e_2, ... seien die Abstände der Kurbelmittelpunkte von O,

c_1, c_2, ... die Abstände der einzelnen Mittelebenen der Schwungradmasse und etwa mit der Welle umgehender Ausgleichsmassen von O aus gemessen,

r_1, r_2, ... die geometrischen Längen der Kurbelarme,

l_{01}, l_{02}, ... die Längen der Lenkstangen zwischen den Zapfenmitten gemessen,

α_1, α_2, ... die Winkel der Kurbelerhebungen über die wagerechte Lage zur Zeit $t = t_0$.

Die Beziehungen zwischen den Coordinaten des festen und der beweglichen Systeme sind, wenn wir den Rotationswinkel mit θ bezeichnen, die folgenden:

I. Rotirendes System.

$$(\text{c})\qquad \begin{cases} x = a_0 \cos(\alpha_\iota + \theta) - c_0 \sin(\alpha_\iota + \theta) \\ y = b_0 \\ z = a_0 \sin(\alpha_\iota + \theta) + c_0 \cos(\alpha_\iota + \theta) \end{cases}$$

II. Systeme der Lenkstangen.

$$(\text{d})\qquad \begin{cases} x = r_{0\iota} \cos(\alpha_\iota + \theta) + a_{0\iota} \sin(\gamma_\iota + \eta) - c_{0\iota} \cos(\gamma_\iota + \eta) \\ y = e_\iota + b_{0\iota} \\ z = r_{0\iota} \sin(\alpha_\iota + \theta) + a_{0\iota} \cos(\gamma_\iota + \eta) + c_{0\iota} \sin(\gamma_\iota + \eta) \end{cases}$$

Hierzu treten noch die geometrischen Bedingungsgleichungen

$$(\text{e})\qquad l_{0\iota} \sin\eta = - r_\iota \cos(\alpha_\iota + \gamma_\iota + \theta)$$

III. Systeme der Kreuzköpfe.

$$(\text{f})\qquad \begin{cases} x = [r_\iota \sin(\gamma_\iota + \alpha_\iota + \theta) + l_{0\iota} \cos\eta] \sin\gamma_\iota + a_\iota \sin\gamma_\iota - c_\iota \cos\gamma_\iota \\ y = e_\iota + b_\iota \\ z = [r_\iota \sin(\gamma_\iota + \alpha_\iota + \theta) + l_{0\iota} \cos\eta] \cos\gamma_\iota + a_\iota \cos\gamma_\iota + c \sin\gamma_\iota . \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sind durch Differentiation nach der Zeit t die absoluten Componenten der Geschwindigkeit jedes in Bewegung befindlichen Massenelementes dm zu bilden, woraus sich dann der Ausdruck für die Gesamtenergie E des beweglichen Systems ohne jede Schwierigkeit aufstellen läſst. Wir setzen zur bequemeren Unterscheidung der einzelnen Bestandteile

$$(\text{g})\qquad E = E_0 + \sum_\iota E_{0\iota} + \sum_\iota E_\iota .$$

Man findet dann durch Integration über die Massen der einzelnen Maschinenteile, wenn $A_0 B_0 C_0$ die Trägheitsmomente der rotirenden Masse M_0, $A_{0\iota}$, $B_{0\iota}$, $C_{0\iota}$ diejenigen der Lenkstangen mit den Massen $M_{0\iota}$ und M_ι die Massen der translatorischen Teile bedeuten, die folgenden Ausdrücke:

$$(\text{h})\qquad \begin{cases} E_0 = \frac{1}{2} B_0 \cdot \dot\theta^2, \\ E_{0\iota} = \frac{1}{2} \left\{ r_\iota^2 M_{0\iota} - 2 r_\iota M_{0\iota} [a^*_{0\iota} \sin(\psi_\iota + \eta_\iota) - c^*_{0\iota} \cos(\psi_\iota + \eta_\iota)] \eta'_\iota + B_{0\iota} \eta'^2_\iota \right\} \dot\theta^2. \\ E_\iota = \frac{1}{2} r_\iota^2 M_\iota \dfrac{\cos^2(\psi_\iota + \eta_\iota)}{\cos^2 \eta_\iota} \cdot \dot\theta^2, \end{cases}$$

wo noch zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \psi_\iota &= \alpha_\iota + \gamma_\iota + \theta \\ \eta_\iota' &= \frac{d\eta_\iota}{d\theta} = \frac{r_\iota}{l_\iota}\frac{\sin\psi_\iota}{\cos\eta_\iota} = \operatorname{tg}\eta_\iota \operatorname{tg}\psi_\iota \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

gesetzt ist und $a^*_{0\iota}$, $c^*_{0\iota}$ die Coordinaten des Schwerpunktes der Lenkstange $l_{0\iota}$ sind.

Die vorstehende Entwicklung reicht aus, um die Bewegung des ganzen Kurbelgetriebes zu untersuchen, sobald das totale Kraftfeld bekannt ist. Die erweiterten Formen von E unter der Voraussetzung, dafs r_ι und l_ι virtuelle Veränderungen erfahren, sollen hier nicht mitgeteilt werden. In Rücksicht auf die Theorie der Massenausgleichung, welche weiterhin zur Darstellung kommt, wollen wir im Anschlufs an die Gleichung (c), (d), (f) noch die Werte für die Schwerpunkts-Coordinaten x^*, y^*, z^* des ganzen in Bewegung befindlichen Systems anführen. Dies erfordert eigentlich gar keine Rechnung und liefert dennoch die natürliche Grundlage für das erwähnte Problem und andere verwandte Betrachtungen. Wir setzen die ganze Masse des Systems $= M$ und bilden die Integrale

$$\int x\,dm = Mx^*, \quad \int y\,dm = My^*, \quad \int z\,dm = Mz^*.$$

Die Gleichungen (c), (d), (f) ergeben dann sofort:

$$\begin{aligned} Mx^* = {} & M_0\Big[a_0^*\sum_\iota \cos(\alpha_\iota+\theta) - c_0^*\sum_\iota \sin(\alpha_\iota+\theta)\Big] \\ & + \sum_\iota M_{0\iota}\,[r_\iota\cos(\alpha_\iota+\theta) + a^*_{0\iota}\sin(\gamma_\iota+\eta) - c^*_{0\iota}\cos(\gamma_\iota+\eta)] \\ & + \sum_\iota M_\iota\big\{[r_\iota\sin(\alpha_\iota+\gamma_\iota+\theta)+l_{0\iota}\cos\eta]\sin\gamma_\iota + a_\iota^*\sin\gamma_\iota - c_\iota^*\cos\gamma_\iota\big\}, \end{aligned}$$

$$My^* = M_0 b_0^* + \sum_\iota M_{0\iota}(e_\iota + b^*_{0\iota}) + \sum_\iota M_\iota(e_\iota + b_\iota^*),$$

$$\begin{aligned} Mz^* = {} & M_0\Big[a_0^*\sum_\iota \sin(\alpha_\iota+\theta) + c_0^*\sum_\iota \cos(\alpha_\iota+\theta)\Big] \\ & + \sum_\iota M_{0\iota}\,[r_\iota\sin(\alpha_\iota+\theta) + a^*_{0\iota}\cos(\gamma_\iota+\eta) + c^*_{0\iota}\sin(\gamma_\iota+\eta)] \\ & + \sum_\iota M_\iota\big\{[r_\iota\sin(\alpha_\iota+\gamma_\iota+\theta)+l_{0\iota}\cos\eta]\cos\gamma_\iota + a_\iota^*\cos\gamma_\iota + c_\iota^*\sin\gamma_\iota\big\}. \end{aligned}$$

Da y^* selbstverständlich constant ist, so beschreibt der Schwerpunkt in der Ebene $y = y^*$ eine krumme Linie, deren Gleichung $H(x^*, z^*) = 0$ sich durch Elimination von θ aus der ersten und dritten Gleichung ergeben würde. Wäre dagegen das System als

Ganzes im Raume frei beweglich, so würde der Schwerpunkt allein der Wirkung der äufseren Kräfte folgen. Will man die Componenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Schwerpunktes bestimmen, so sind die Ausdrücke von x^* und z^* nach der Zeit t zu differentiiren, wodurch wieder die Gröfsen $\dot{\theta}$ und $\ddot{\theta}$ als Factoren auftreten. $\ddot{\theta}$ kann wieder mit Hilfe der Lagrange'schen Bewegungsgleichung eliminirt werden. Es ergeben sich also die Componenten der Beschleunigung des Schwerpunktes als bekannte Functionen des Rotationswinkels θ und der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$.

Bei allen derartigen Rechnungen kann man den Hilfswinkel η neben θ beibehalten. Es erscheint in den meisten Fällen nicht einmal vorteilhaft, denselben durch Anwendung von Reihenentwicklungen zu eliminiren, da man von vornherein nicht immer mit Bestimmtheit weifs, welchen Grad der Annäherung man gebraucht, zumal derselbe während der Untersuchung bald gröfser bald kleiner sein mufs. Die Formeln werden durch das Mitführen dieses Hilfswinkels geschmeidiger, bleiben streng richtig und können je nach dem gerade vorliegenden Bedürfnis am Ende der Untersuchung vereinfacht werden.

D. Radinger's Theorie der Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit.

22. *Maschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit.* Die Massenwirkungen sind im allgemeinen der Gröfse $r^2\dot{\theta}^2$ proportional. Sie wachsen also nicht allein mit der Winkelgeschwindigkeit (bezw. der Tourenzahl n) sondern auch mit der Gröfse des Hubes $(2r)$. Für die Beurteilung derselben ist also die mittlere Kolbengeschwindigkeit

$$V_{00} = \frac{2}{\pi} r \dot{\theta}_{00} = \tfrac{1}{30} n \cdot 2r$$

in erster Linie mafsgebend.

Die im Jahre 1867 in Paris ausgestellte Allen'sche Maschine mit 5 Meter Kolbengeschwindigkeit gab Radinger den ersten Anstofs zur Ausbildung seiner Theorie der Massenwirkungen im Kurbelmechanismus. In gleichem Sinne anregend wirkten auch einige Artikel über Allen's schnelllaufende Maschine, welche im „Engineering" Bd. 5. veröffentlicht wurden. Die erste Publication Radinger's über diesen Gegenstand ist schon S. 11 erwähnt. Seine systematische, alle einschläglichen Gesichtspunkte berücksichtigende Arbeit — in Form eines Handbuches — erschien im Jahre 1870. Ruhiger Gang und Ökonomie in den Anlage- und Betriebskosten sind die beiden Factoren, welche die Bevorzugung hoher Kolbengeschwindigkeiten

bei richtig gewählter Dampfverteilung begründen. Radinger[1]) unterscheidet drei Maschinenkategorien:

1. „Langsam gehende Kolben (1 Meter pr. Sec.) und geringe Expansion geben einen ruhigen Gang. Durch die Erfahrung erprobte, aber gegenwärtig verlassene Anordnung. Anlage- und Betriebskosten hoch."
2. „Mittelschnell gehende Kolben (bis 2 Meter pr. Sec.) und mittlere Expansion geben ruhigen Gang. Durch Erfahrung erprobte, gegenwärtige Anordnung. Anlage- und Betriebskosten mäfsig."
3. „Schnellgehende Kolben (4—6 Meter) und hohe Expansion geben ruhigen Gang. Durch die Erfahrung noch wenig erprobte, künftige Anordnung. Anlage- und Betriebskosten gering."

Die technische Anforderung des ruhigen Ganges war also auch bei den langsam laufenden Maschinen älterer Bauart erfüllt, aber die Herstellung des Mechanismus war bei gleicher Kraftübertragung wesentlich kostspieliger als bei einer Maschine von gleicher Leistungsfähigkeit und hoher Kolbengeschwindigkeit. Radinger's Problem bestand also wesentlich in der Erforschung der Bedingungen, welche den stofsfreien Gang sichern und in der Feststellung der zulässigen oberen Grenze der Kolbengeschwindigkeit bei gegebenem Admissionsdruck des Dampfes.

23. *Radinger's Formel für den Beschleunigungsdruck.* Für den Mathematiker hat der Ausdruck „Massenwirkung" etwas Befremdendes[2]), da er es für ganz selbstverständlich hält, dafs man bei einem dynamischen Problem die beweglichen Massen berücksichtigt. Dies war ja auch von Navier, Coriolis und namentlich Poncelet bei ihren Untersuchungen über das Kurbelgetriebe ausgiebig geschehen, aber die Maschinenconstructeure hatten auf diese theoretischen Auseinandersetzungen lange Jahre keinen ausreichenden Wert gelegt. Mit der Beurteilung der erforderlichen statischen Festigkeit der einzelnen Teile waren sie erfahrungsmäfsig hinreichend vertraut, und im übrigen waren nur kinematische aber keine eigentlichen dynamischen Gesichtspunkte in der Praxis mafsgebend. Eine Ausnahme bildeten allerdings die Locomotiven, bei denen man wiederholt den Trägheits-

1) Vorrede zur ersten Auflage (1870).

2) Der „Massendruck" ist nach der Auffassung der rationellen Mechanik ein Moment der kinetischen Energie, also keine Kraft. Dasselbe gilt für die sogenannte Centrifugalkraft. Bei der theoretischen Behandlung kinetischer Probleme der Technik hat man die naturgemäfse Trennung zwischen kinetischer und potentieller Energie nur zu häufig vernachlässigt und dadurch die Übersicht nicht erleichtert, sondern getrübt. Treten neben den conservativen Kräften noch Reibungen und ähnliche passive Widerstände auf, so ist das Energiesystem in drei Teile zu zerlegen und dem entsprechend der theoretischen Bearbeitung zu unterziehen.

einflufs der Massen genauer untersucht hatte. Herr v. Bach bemerkt in seinen „Maschinenelementen“ (1896) ausdrücklich, dafs der Begriff der Massenwirkung nicht als eine Errungenschaft Radinger's anzusehen sei, indem er folgendes anführt: „Es ist hier und da üblich geworden, anzunehmen, dafs das Gesetz der Beschleunigungskräfte erst seit 25 Jahren gefunden oder doch erst seit dieser Zeit von den ausführenden Ingenieuren beachtet werde. In dieser Beziehung sei, ganz abgesehen von dem, was bei den Locomotiven schon damals erkannt worden war, darauf hingewiesen, dafs sich bereits in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1862 S. 269 die Berechnung der Kurbel- und Gatterzapfen bei Sägegattern u. s. w. mit Rücksicht auf die schwingenden Massen durchgeführt findet, und dafs jedenfalls schon in den 50er Jahren auf Grund solcher Rechnungen thatsächlich construirt und ausgeführt wurde. Ohne die Inbetrachtziehung der Beschleunigungskräfte wäre hier eine Berechnung überhaupt unmöglich gewesen.“ Die Richtigkeit dieses Urteils wird niemand in Zweifel ziehen können, aber das Verdienst Radinger's wird dadurch in keiner Weise gemindert, auch läfst sich nicht verkennen, dafs der Begriff der Massenbeschleunigung erst nach dem Erscheinen seiner Dampfmaschinentheorie auf allen Gebieten, wo diese Vorstellung zur richtigen Erkenntnis der dynamischen Wirkung führt, allgemeine technische Verwertung gefunden hat. Insbesondere sind dem Dampfmaschinenbau für lange Zeit die Wege gewiesen worden, welche der moderne Betrieb gebieterisch verlangte.

Radinger zerlegt die Massen des Kurbelgetriebes in rotirende (M_0) und hin- und hergehende (M_1). Von der gemischten Bewegung der Kolbenstange sieht er ganz ab und denkt sich ihre Masse in passender Weise zwischen Kurbel- und Kreuzkopfzapfen verteilt. Die üblichen Methoden der rationellen Mechanik wendet er nicht unmittelbar an, sondern schlägt einen eigentümlichen inductiven Weg der Behandlung ein, der nur scheinbar elementarer — in Wirklichkeit undurchsichtiger — als das methodische Verfahren ist. Man kann an allen Stellen des Buches ein gründliches Verständnis der mechanischen Grundwahrheiten bemerken, aber nirgends die systematische Behandlung des Gegenstandes, wie sie seit hundert Jahren in der rationellen Mechanik gebräuchlich ist. Wir erachten es deshalb für angemessen, zunächst den Zusammenhang seiner Darstellung mit der Lagrange'schen Gleichung

$$F\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \theta} + Q, \; E = \tfrac{1}{2}F\dot{\theta}^2$$

herzustellen.

Den Abstand des Kreuzkopfzapfens von der Wellenmitte bezeichnen, wir wie früher, mit x. Dann ist nach Radinger's Vorstellung von der Verteilung der Massen die kinetische Energie

$$E = \tfrac{1}{2}\left[r^2 M_0 \dot{\theta}^2 + M_1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

oder da $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$ ist,

$$E = \tfrac{1}{2}\left[r^2 M_0 + M_1 \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2\right] \dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2} F \cdot \dot{\theta}^2,$$

also:

$$F = r^2 M_0 + M_1 \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 2 M_1 \frac{dx}{d\theta} \frac{d^2 x}{d\theta^2}.$$

Ferner ist

$$Q = r(T - W), \quad T = -\frac{D}{r} \frac{dx}{d\theta}.$$

Die Lagrange'sche Gleichung nimmt also die Form an:

$$F \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left[D + M_1 \frac{d^2 x}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta}^2\right] \frac{dx}{d\theta} - r W.$$

In der Gröfse

$$- M_1 \frac{d^2 x}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 = - M_1 \frac{d^2 x}{dt^2}$$

setzt Radinger immer $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{00}$ und nennt sie den „Beschleunigungsdruck“ der translatorischen Massen. Die Derivirte $-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \theta}$ ist also die Tangentialcomponente des Beschleunigungsdruckes am Kurbelzapfen angreifend gedacht. In der Gleichung

$$\frac{dx}{d\theta} = -r \frac{\sin(\theta + \eta)}{\cos \eta} = -r(\sin\theta + \operatorname{tg}\eta \cos\theta)$$

kann man näherungsweise wegen der Beziehung

$$\sin\eta = \frac{r}{l} \sin\theta$$

auch $\operatorname{tg}\eta = \frac{r}{l}\sin\theta$ setzen, so dafs man die Radinger'schen Formeln

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\left(\sin\theta + \tfrac{1}{2}\frac{r}{l}\sin 2\theta\right)$$

und

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} = -r\left(\cos\theta + \frac{r}{l}\cos 2\theta\right)$$

erhält, deren Discussion das erste Capitel seines Werkes gewidmet ist.

Rechnet man den Kolbenweg (s) von der äufseren Totlage aus, so wird

$$s = r + l - x = r(1 - \cos\theta) + l(1 - \cos\eta) = 2r \sin\frac{\theta}{2} \frac{\sin\frac{\theta + \eta}{2}}{\cos\frac{\eta}{2}},$$

$$\frac{ds}{d\theta} = r \frac{\sin(\theta + \eta)}{\cos\eta}, \quad \frac{d^2 s}{d\theta^2} = r\left[\cos\theta + \operatorname{tg}\eta\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} + \sin^2\eta \sin\theta\right)\right].$$

Mit grofser Annäherung kann man immer setzen:

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} = r\left(\cos\theta + \operatorname{tg}\eta \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\right) = -\frac{d^2 x}{d\theta^2}.$$

Diese Formel ist genauer als die von Radinger benutzte und für die Anwendung bei verhältnismäfsig kurzer Lenkstange ebenso bequem. Die Beziehung der Winkel θ und η kann man aus einer kleinen Tabelle entnehmen, wie z. B.

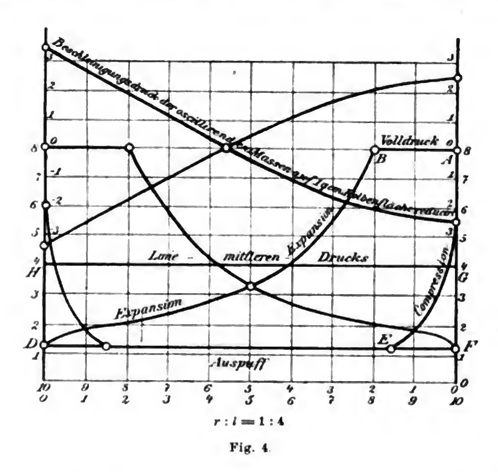
	$l = 3r$	$l = 4r$	$l = 5r$	$l = 6r$	
θ	η	η	η	η	θ
0°	0.0°	0.0°	0.0°	0.0°	180°
15°	5.0	3.7	3.0	2.5	165°
30°	9.6	7.2	5.7	4.8	150°
45°	13.6	10.2	8.1	6.8	135°
60°	16.8	12.5	10.0	8.3	120°
75°	18.8	14.0	11.2	9.3	105°
90°	19.5	14.5	11.5	9.6	90°

Radinger discutirt — wie oben bemerkt — den Verlauf des horizontalen Massendrucks $-M_1 \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta}^2$ nur für den Fall $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{00}$, wo also $\dot{\theta}_{00}$ die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Kubelarmes bedeutet. Dies schliefst aber die Voraussetzung ein, dafs die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeiten während der Tour in sehr engen Grenzen bleiben. Unter dieser Annahme braucht man aber in Bezug auf die für $\frac{d^2 s}{d\theta^2}$ benutzte Näherungsformel $r\left(\cos\theta + \frac{r}{l}\cos 2\theta\right)$ gar nicht so ängstlich zu sein, denn die Ersetzung des veränderlichen $\dot{\theta}$ durch den constanten Wert $\dot{\theta}_{00}$ bringt einen viel gröfseren Fehler in die Betrachtung hinein. Wir führen dies ausdrücklich an, weil einige nachfolgende Bearbeiter der Kurbeltheorie an dem Ausdruck $\cos\theta + \frac{r}{l}\cos 2\theta$ Anstofs genommen haben, ohne die einflufsvollere Hypothese $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{00}$ zu berühren. Die Beibehaltung des Winkels η ist also auch nur dann am Platze, wenn man das ganze Problem nach den hergebrachten Regeln der Mechanik behandelt, d. h. erst den Verlauf von $\dot{\theta}$ bestimmt und die Gröfse $M_1 \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta}_{00}^2$ überhaupt nicht mit dem Kraftfeld combinirt, wie es Radinger gethan hat.

Andererseits hat dieser unsystematische Weg — ganz abgesehen von den ohne Bedenken in Kauf zu nehmenden Ungenauigkeiten — auch einige nicht zu unterschätzende methodische Vorteile. Durch die gewaltsame Hypothese $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{00}$ erhielt Radinger gleich im Anfang der Untersuchung ein approximatives Mafs über den Verlauf der Gröfse

$$D - M_1 \frac{d^2 s}{d\theta^2} \dot{\theta}^2,$$

sobald er den freien Dampfdruck D und den genäherten Wert $M_1 \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta}_{00}^2$ über der Hublänge $2r = h$ graphisch auftrug, und er kam so auf dem kürzesten Wege zu einem aufserordentlich wichtigen Anschauungsbild über das Verhalten der horizontalen Drehkraft am



$r : l = 1 : 4$

Fig. 4.

Kurbelzapfen. In Fig. 4 ist ein Expansionsdiagramm für beide Kolbenseiten, sowie die Darstellung des Beschleunigungsdruckes in theoretischer Ausführung mitgeteilt, welches die hier auftretenden Verhältnisse besser zu übersehen gestattet als eine analytische Discussion der Formeln.

Man erkennt sofort — wenn man sich aus dem rechtsseitigen und linksseitigen Dampfdiagramm den freien Druck construirt denkt und den jeweiligen Beschleunigungsdruck algebraisch addirt, dafs der Horizontaldruck

$$D - M_1 \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta}_{00}^2$$

bei Anwendung hoher Expansion an Gleichmäfsigkeit beträchtlich gewinnt — und dies ist Radinger's leitender Gedanke, der allen übrigen Folgerungen als Grundlage dient. Der Massendruck mildert also den Einflufs der eminenten Werte des Dampfdruckes — er hemmt seine Wirkung in der ersten und unterstützt sie in der zweiten Hubhälfte.

Aus Fig. 4 erkennt man ferner, dafs die Drücke des Rückganges — auch bei vollkommen symmetrischer Dampfverteilung für beide Seiten des Kolbens — nicht mehr völlig symmetrisch zum Vorwärtsgang bleiben.

Der analytische Näherungswert des Beschleunigungsdrucks für die Einheit der Kolbenfläche f kann durch Anwendung der Relation $M_1 \cdot 9{,}81 = P_1$ und durch Identificirung von 9,81 mit π^2 auf die übersichtliche Form

$$q = \tfrac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \frac{P_1}{f \cdot h} \cdot v_{00}^2$$

gebracht werden. Der Coefficient $P_1 : fh$ ist von den Dimensionen und der Massenverteilung der Maschine abhängig und infolgedessen für die einzelnen Maschinenkategorien typisch. Radinger giebt für dreifach expandirende Schiffsmaschinen die folgenden Werte

	Hochdruckcyl.	Mitteldruckcyl.	Niederdruckcyl.
$\frac{P_1}{fh} =$	0.45,	0.20,	0.12,

für Locomotiven ohne Kuppelstangen die Zahl 0.33 an.

Von besonderer Wichtigkeit ist auch der maximale Wert von q, nämlich

$$q_{\max} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{l}\right) \frac{P_1}{fh} \cdot v_{00}^2.$$

Dieser Druck darf den freien Dampfdruck auf den Kolben nie überschreiten. Der Admissionsdruck mufs deshalb für jeden besonderen Wert von v_{00}^2 eine gewisse Höhe haben, damit der Kolben nicht vom Kurbelzapfen geschleppt wird. Hierdurch würde ein Druckwecksel im Gestänge eintreten, welcher notwendiger Weise von einem die Ruhe des Ganges störenden Stofs begleitet ist. Meistens ist der Admissionsdruck gegeben, dann darf v_{00} nicht gröfser gewählt werden, als der Gleichung

$$\frac{D}{f} - q_{\max} \geqq 0$$

entspricht. Radinger hat aber aufserdem noch erkannt, dafs die obenerwähnte notwendige Bedingung nicht immer hinreichend ist. Wird nämlich das Füllungsverhältnis zu klein genommen, so kann es

vorkommen, dafs der erwähnte Druckwechsel in der Mitte des Kolbenlaufs erfolgt. Es wird also aus diesem Grunde die Expansion eingeschränkt oder anderenfalls der Admissionsdruck noch passend erhöht werden müssen. Der eingehenderen Untersuchung dieser Verhältnisse ist das zweite Capitel des Radinger'schen Werkes gewidmet.

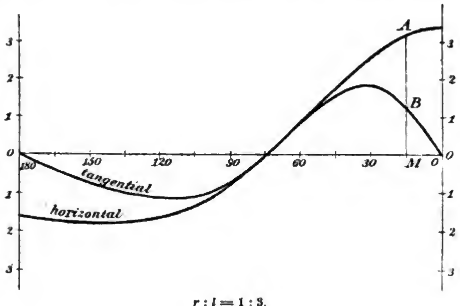
24. *Die Tangentialkraft. Das resultirende Drehmoment an der Welle.* Die naturgemäfse Grundlage für die Beurteilung des Einflusses hoher Kolbengeschwindigkeit auf den Gang der Maschine ist die schon wiederholt angeführte Lagrange'sche Gleichung

$$F\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(D - M_1\frac{d^2s}{d\theta^2}\cdot\dot{\theta}^2\right)\frac{ds}{d\theta} - rW,$$

wo

$$F = r^2 M_0 + M_1\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2$$

ist. Radinger setzt immer stillschweigend einen constanten Wert des Widerstandes W voraus, da anderenfalls seine Resultate ganz wesent-



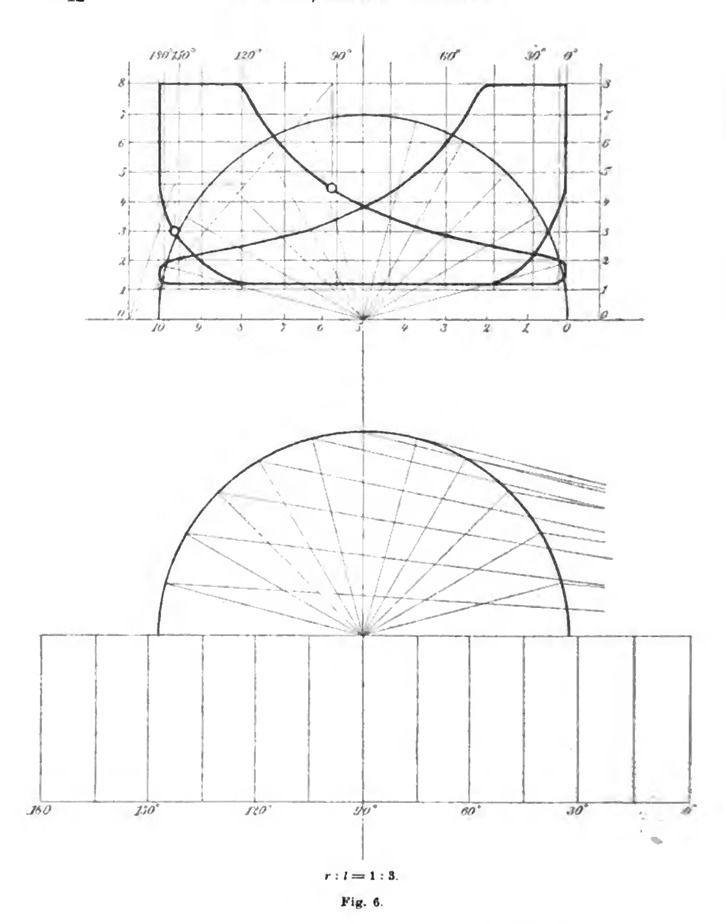
$r : l = 1 : 3.$

Fig. 5.

lich modificirt würden und die übersichtliche Einfachheit derselben verloren ginge. Bei dem synthetischen Aufbau seiner Untersuchung geht er nun zur Discussion der tangentiellen (effectiven) Druckkraft

$$\left(D - M_1\frac{d^2s}{d\theta^2}\cdot\dot{\theta}^2\right)\frac{ds}{d\theta}$$

über, wobei — wie immer — $\dot{\theta}$ durch $\dot{\theta}_{00}$ ersetzt ist. Zur Veranschaulichung habe ich in Fig. 5 den tangentiellen Trägheitsdruck der translatorischen Teile und der Lenkstange für $r : l = 1 : 3$ dargestellt. Die Figuren 6, 7 und 8 geben der Reihe nach die directen (einseitigen) Dampfdiagramme, den Verlauf des freien Druckes D



$r : l = 1 : 3.$

Fig. 6.

und endlich der tangentiellen Zapfendrücke $M_1 \frac{d^2 s}{d\theta^2} \frac{ds}{d\theta} \dot{\theta}^2$ und $\left(D - M_1 \frac{d^2 s}{d\theta^2} \dot{\theta}^2\right) \frac{ds}{d\theta}$ für dasselbe Schubstangenverhältnis.

Die linke Seite der Lagrange'schen Gleichung, nämlich

$$\left[r^2 M_0 + M_1 \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2\right] \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ist von Radinger nur insofern berücksichtigt, als darin M_0 vorkommt, also die Schwungradmasse, welche die absoluten Werte von $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ herabdrückt. Er betrachtet also als das Moment der Winkelbeschleunigung nur die Gröfse $r^2 M_0 \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Hätte er den üblichen Weg der systematischen Mechanik eingeschlagen, so würde er in dem Factor $M_1 \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2$ ein die Wirkung des Schwungrades günstig

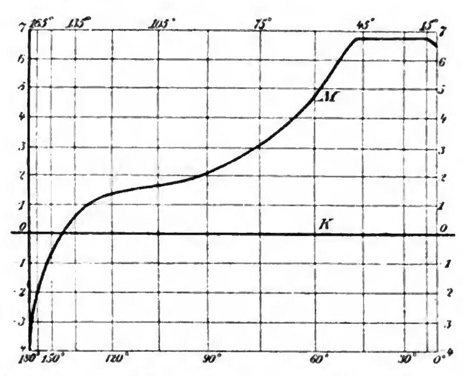


Fig. 7. Freier Dampfdruck.

beeinflussendes Glied erkannt haben, denn $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2$ ist immer positiv. Bei Berücksichtigung dieses Punktes thut man jedoch besser, den exacten Wert für F zu nehmen oder doch wenigstens die Massen M_1 und M_{01} nach den Regeln, welche den Ingenieuren geläufig sind, auf Kurbelzapfen und Kreuzkopfzapfen zu verteilen. Übrigens hat Radinger durch die Beachtung des tangentiellen Massendrucks erkannt, dafs die ausgleichende Wirkung des Schwungrades durch das Gestänge unterstützt wird (Dampfmasch. 3. Aufl. pag. 90). Diese Wirkung ist aber von der oben berührten zu trennen. Viel wichtiger ist die Bestimmung der Geschwindigkeit der gleichmäfsigsten Drehkraft, welche Radinger in folgender Weise formulirt: „Jede Geschwindigkeit bringt eine andere Art der Arbeitsabgabe an die Kurbel mit sich. Die beste Art derselben, der gleich-

mäfsigste Gang der Maschine wird aber gewifs dann erzielt werden, wenn die Geschwindigkeit so ermittelt wurde, dafs der bei jedem Kolbengang im Schwungring anzusammelnde und wieder abzugebende Arbeitsüberschufs im Verhältnis zur Gesamtarbeit ein Kleinstes, d. h. wenn das Verhältnis der überragenden Fläche des Tangentialdruckdiagramms gegen das Widerstandsrechteck ein Minimum wird."

In diesem Sinne würde also in der Fig. 8 das Flächenstück über ST verglichen mit dem Rechteck $ABCD$ das Mafs für die Ungleichförmigkeit der Drehkraft darstellen. Nun ist es aber bei gleichflächiger Überragung durchaus nicht gleichgültig, wie grofs die Basis ST im Verhältnis zum Kurbelzapfenweg $2\pi r$ ist — und Radinger bemerkt auch selbst im weiteren Verlauf seiner Untersuchung, der zweckmäfsigste Wert von ST sei πr, obwohl in der zu Grunde gelegten Formulirung von einer Beschränkung der Basis keine Rede ist. Es kann daher auch leicht vorkommen, dafs die Winkelgeschwindigkeit einen recht hohen Wert an gewissen Stellen

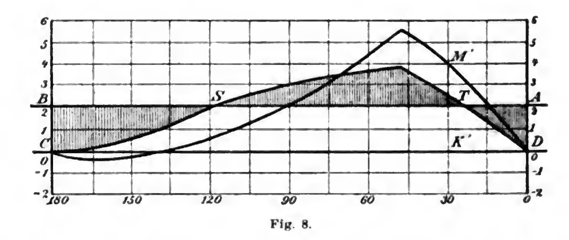


Fig. 8.

des Kurbelkreises erlangt und dafs diese naturgemäfs von einer starken Winkelbeschleunigung begleitet ist, ohne dafs dies auf das obige Mafs der Ungleichförmigkeit einen Einflufs hat. Es wäre wohl exacter, übersichtlicher und gleichzeitig einfacher gewesen bei der Untersuchung der gleichmäfsigsten Drehwirkung, von der Energiegleichung

$$\tfrac{1}{2}F\dot{\theta}^2 - \tfrac{1}{2}F_0\dot{\theta}_0^2 = r\int_0^\theta \left(D\frac{ds}{d\theta} - W\right)d\theta$$

auszugehen und die in Betracht kommenden Gröfsen und Functionen so zu wählen, dafs der analytisch ausgedrückte Energieüberschufs in möglichst engen Grenzen schwankt oder, wie Kretz vorgeschlagen hat, für $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ von vornherein eine obere Grenze festzusetzen. Wir wollen hier auf eine nähere Discussion dieses — allerdings sehr wichtigen — Punktes nicht eingehen, sondern uns mit der Wieder-

gabe der Radinger'schen Resultate begnügen (Dampfmaschinen 3. Aufl. pag. 94):

a) „Die Geschwindigkeit der gleichmäfsigsten Drehkraft wird desto höher, je höher die Dampfspannung und je höher die Füllung wird.
b) Mit der Füllung darf man nicht höher, als bis zur Grenze $\frac{1}{2}$ gehen.
c) Für höhere Füllungen als 0.5 giebt es keine günstigste Geschwindigkeit.
d) Daher werden Maschinen mit hoher Füllung (über 0.5) desto gleichmäfsiger wirken, mit je kleinerer Geschwindigkeit sie arbeiten.
e) Eine Maschine erhält bei jener Geschwindigkeit die gleichmäfsigste Drehkraft, bei welcher zu Beginn jedes Hubes ein Druck, gleich dem doppelten Enddruck auf den Kolben, zur Ingangsetzung der Massen verwendet wird.
f) Die günstigste Geschwindigkeit ist für alle jene Maschinen constant, deren Enddruck der gleiche ist."

25. *Tandem- und Verbundmaschinen.* Die gekuppelten Maschinen sind entweder Zwillingsmaschinen, wie die Locomotive, bei denen jede Kurbel in einem selbständigen Kraftfeld steht, oder sie sind

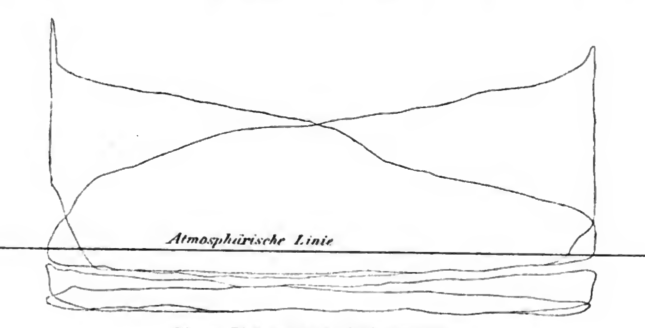


Fig. 9. Diagramm einer Tandem-Maschine.

Kesselspannung	4 kg	Hochdruckcylinder $D = 40$	cm
Druck im Condensat. üb. Vac.	0,2 kg	Niederdruckcylinder $D = 75$	cm
Tourenzahl	110	Hub 50,8	cm

Verbundmaschinen, indem der Dampf, nachdem er in einem Cylinder gearbeitet hat, in dem zweiten Cylinder die Expansion bis zum Auspuffdruck oder bis zur Condensatorspannung fortsetzt. Haben beide

Cylinder eine gemeinsame Kolbenstange, so nennt man die Vorrichtung eine Tandemmaschine, wirken die Kolben aber auf getrennte Kurbeln derselben Welle, so liegt die gewöhnliche Verbundmaschine vor. Der constante Winkel zwischen den beiden Kurbelarmen — der Schränkungswinkel — bedingt eine Phasendifferenz in der Wirkung der Kraftfelder. Häufig ist zwischen dem Hochdruck- und Niederdruckcylinder noch ein besonderer Zwischenraum — der Receiver — eingeschaltet, der dem überströmenden Dampf einen vorübergehenden Aufenthalt gestattet und meistens besonders heizbar ist, um die Spannung des aus dem Hochdruckcylinder kommenden Dampfes durch Zuführung von Wärme zu erhöhen oder doch unverändert zu erhalten.

Die Tandemmaschine unterscheidet sich nur durch die Gestaltung des Kraftfeldes von der gewöhnlichen Eincylindermaschine. Sie eignet sich nach Radinger's Untersuchung besonders für hohe Kolbengeschwindigkeiten. Denn der hohe Druck im ersten Cylinder genügt allein schon zur rechtzeitigen Beschleunigung des Gestänges, so dafs der niedrige Anfangsdruck im zweiten Cylinder belanglos wird. Auch sind der Compression geringere Grenzen gesetzt als bei anderen Verbundmaschinen. Daher auch Radinger's günstiges Urteil: „Nachdem die Tandemmaschine leicht bis Kolbengeschwindigkeiten von 6 Meter und mehr gelangen kann, zu welcher Höhe weder die Receiver- noch die Woolfmaschine mit ihren Niederdruckseiten je zu folgen im stande sein wird, so erachte ich sie als die Verbundmaschine der Zukunft. Schon heute scheint mir ihr Gang ruhiger als der ihrer Schwestern.“

Zur Beurteilung der dynamischen Wirkungen der zweikurbeligen Maschinen im Sinne der Darstellung Radinger's, wollen wir die kinetische Energie eines solchen Systems nach den allgemeinen Entwickelungen (pag. 32) vor Augen stellen. Wir setzen in den dortigen Ausdrücken $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 90^0$ und erhalten mit einigen unbedeutenden Vernachlässigungen:

$$E = \tfrac{1}{2}\{B_0 + r_1^2 M_{01} + r_2^2 M_{02} + M_1 r_1^2 [\sin\theta + \operatorname{tg}\eta_1 \cos\theta]^2 \\ + M_2 r_2^2 [\sin(\theta+\alpha) + \operatorname{tg}\eta_1 \cos(\theta+\alpha)]^2\}\dot{\theta}^2.$$

Hieraus folgt für $\alpha = 90^0$ und $r_2 = r_1$, $M_{02} = M_{01}$, $M_2 = M_1$, $l_2 = l_1$:

$$E = \tfrac{1}{2}\{B_0 + 2M_{01}r_1^2 + M_1 r_1^2 (1 + 2\sin\eta\cos\theta)\}\dot{\theta}^2,$$

wenn man kleine Gröfsen zweiter Ordnung vernachlässigt. E ist also mit θ nur in sehr geringem Grade veränderlich. Dasselbe gilt dann auch für Radinger's tangentiellen Beschleunigungsdruck $\frac{\partial E}{\partial \theta}$ (cf. Dampfmaschinen 3. Aufl. pag. 143).

Für die Woolf'sche Maschine ist $\alpha = 180^0$ und folglich:

$$E = \tfrac{1}{2}\{B_0 + 2M_{01}r_1^2 + 2M_1 r_1^2 (\sin\theta + \operatorname{tg}\eta_1\cos\theta)^2\}\cdot\dot{\theta}^2.$$

Die Massendrücke am Kurbelzapfen addiren sich also hier. Man hat deshalb dieses System fast ganz aufgegeben, weil sie höhere Kolbengeschwindigkeiten gar nicht vertragen. Günstigere Verhältnisse treten ein, wenn man vier Cylinder nach dem Tandemsystem auf zwei Kurbeln wirken läfst.

Radinger hat auch noch die Dreicylindermaschinen vom Standpunkte seiner Massendrucktheorie eingehend betrachtet, wir können aber hier von einer Wiedergabe der Resultate um so mehr absehen, da wir im folgenden Capitel Gelegenheit haben, den mehrfachen Kurbelmechanismus in anderer Hinsicht, auf Veranlassung des Problems der Massenausgleichung bei Schiffsmaschinen, ohnehin zu erörtern.

Hier mögen nur noch einige Andeutungen über die Behandlung der Kraftfelder bei den Verbundmaschinen Platz finden. Die üblichen Indicatordiagramme geben zunächst für jede Kolbenstellung den einseitigen Druck p_ι auf einen qcm des Kolbens bezogen. Die Basis eines jeden Diagramms ist also $2r_\iota$ und der gesamte Druck auf die Fläche f_ι wird $f_\iota p'_\iota$ sein. Von der Gegenseite wirke gleichzeitig der Druck $f_\iota p''_\iota$. Folglich ist die gesamte treibende Horizontalkraft, wenn wir die Maschine als liegend voraussetzen und von der Wirkung der Schwere absehen:

$$D = \sum_\iota f_\iota (p'_\iota - p''_\iota).$$

Diese Gröfse soll aber als Function von θ dargestellt werden. Hierzu mufs man die Beziehung zwischen dem Winkel θ und den einzelnen von den Totlagen gerechneten Kolbenwegen kennen, nämlich

$$s_\iota = 2r_\iota \sin\frac{\theta + \alpha_\iota}{2} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta + \eta_\iota + \alpha_\iota)}{\cos\frac{\eta_\iota}{2}},$$

wo

$$\sin\eta_\iota = \frac{r_\iota}{l_\iota}\sin(\theta + \alpha_\iota)$$

ist. Kennt man also für einen bestimmten Wert von θ die Gröfsen $s_1, s_2, \ldots,$ so kann man für jede Stelle $p'_\iota - p''_\iota$ aus den einzelnen Diagrammen entnehmen und dann den resultirenden Druck D berechnen. Die Ingenieure bedienen sich meistens eines graphischen Verfahrens (cf. etwa Proell's Daestellungsmethode Ztschr. d. V. d. Ing. 1891 pag. 988, oder „Hütte" I. 1896 p. 711 u. f.), das bei genügend grofsem Mafsstabe hinreichende Genauigkeit und anschauliche Übersicht über das vorliegende Kraftfeld gewährt.

26. *Die Reactionen des Fundamentes. Winkelgeschwindigkeit.* In engem Zusammenhang mit der Verwendung hoher Kolbengeschwindigkeiten steht die Frage, mit welchen Mitteln man das allzu-

starke Anwachsen der statischen Drücke auf das Gestell der Maschine vermindern kann. Radinger nimmt hierbei wieder den horizontalen Massendruck des Gestänges

$$M_1 \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta}_{00}^2$$

zum Ausgangspunkt der Betrachtung. Bei den Locomotiven hatte man es schon lange für nötig gefunden, durch Anbringung eines Gegengewichtes diesen Druck in horizontaler Richtung auszugleichen. Natürlich mufste man damit den Nachteil mit in Kauf nehmen, dafs abwechselnd eine Mehrbelastung der Schienen und ein teilweises Abheben der Maschine stattfindet. Denn das Gegengewicht kann nur durch seine Centrifugalkraft wirken. Bei stationären Maschinen tritt, nach Radinger, die Notwendigkeit der Gegengewichte schon bei einer Kolbengeschwindigkeit von 4 m pr. sec. ein. Hier tragen sie aber auch zur Erhöhung des Trägheitsmomentes der rotirenden Teile bei, so dafs ihnen ein doppelter Nutzen zukommt. Bei dreicylindrigen Schiffsmaschinen hält Radinger eine Ausbalancirung der Schubstangen und der Kurbeln für nutzlos, während in neuester Zeit die Notwendigkeit derselben stark betont wurde.

Bei dem eigentümlichen Gang der Radinger'schen Untersuchung ist es nicht befremdend, dafs er glaubt, die Veränderungen der Winkelgeschwindigkeit während einer Tour des stationären Ganges liefsen sich durch „reine Rechnung nur schwer oder gar nicht derartig verfolgen, dafs sich die Punkte der gröfsten und kleinsten Umfangsgeschwindigkeiten und die Ungleichmäfsigkeit des Schwungrades ergeben". Nun ist es ja ganz gleichgültig, ob diese Bestimmung durch reine Rechnung oder auf rein graphischem Wege erfolgt. Jedenfalls hat keine der beiden Methoden besondere Schwierigkeiten. Radinger benutzt das Tangentialdruckdiagramm, in welchem bereits die angenäherte Trägheitskraft des Gestänges berücksichtigt ist, und betrachtet diejenigen Flächenstücke des Diagramms, welche die Linie des Widerstandes überragen oder von ihr überschnitten werden. Der Punkt, wo die Überragung beginnt, ist naturgemäfs ein Minimum für die Winkelgeschwindigkeit, dagegen treffen wir ein Maximum, wo die Unterschneidung der Widerstandslinie beginnt Die gröfste der Überragungs- oder Unterschneidungsflächen dient zur Bestimmung der erforderlichen Masse des Schwungrades. Dies folgt auch unmittelbar aus der Lagrange'schen Gleichung:

$$F \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}^2 + D \frac{ds}{d\theta} - rW,$$

denn die Maxima und Minima von $\dot{\theta}$ müssen mit grofser Annäherung der Gleichung

$$0 = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_{00}^2 + D \frac{ds}{d\theta} - rW$$

genügen, da $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ von der grossen Masse M_0 unabhängig ist. Will man nun der Schwungradberechnung kein theoretisches Diagramm zu Grunde legen, sondern ein solches, wie es der projectirten Steuerung erfahrungsmäfsig entspricht, so ist für D zunächst keine analytische Darstellung gegeben, und die arithmetische Bestimmung der eminenten Werte von $\dot{\theta}$ könnte erst beginnen, sobald für den Verlauf der Gröfse D eine analytische Anschlufsfunction aufgestellt wäre. Wir wollen die Werte von θ, welche den Grenzen der gröfsten Überragungs- oder Unterschneidungsfläche entsprechen, mit θ_1 und θ_2 bezeichnen. Dann bildet Radinger auf graphischem Wege das Integral

$$J = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F \frac{d^2\theta}{dt^2} d\theta$$

und setzt

$$J = \tfrac{1}{2} r^2 M_0 (\dot{\theta}'^2 - \dot{\theta}''^2),$$

wo $\dot{\theta}'$ und $\dot{\theta}''$ die absolut gröfste und kleinste während der Tour vorkommende Winkelgeschwindigkeit bedeuten. Für das bisher übliche Mafs der Ungleichförmigkeit

$$\varepsilon = 2 \frac{\dot{\theta}' - \dot{\theta}''}{\dot{\theta}' + \dot{\theta}''}$$

folgt dann das Resultat:

$$M_0 = \frac{2}{\varepsilon} \frac{J}{(\dot{\theta}' + \dot{\theta}'')^2}.$$

Nun ist aber:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} F \frac{d^2\theta}{dt^2} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} F \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} dt = \tfrac{1}{2} r^2 M_0 (\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2) + M_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} d\theta.$$

Radinger hat also das zweite Glied des rechtsstehenden Ausdrucks vernachlässigt und ohne weiteres $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}'$, sowie $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}''$ gesetzt. Das Fortlassen der Gröfse, welche die Masse M_1 des hin- und hergehenden Gestänges enthält, kann man wegen des überwiegenden Wertes von M_0 jedenfalls zugeben, dagegen sieht man — in Anbetracht der mannigfaltigen Gestalten des Verlaufs der Function D (man vergl. ein wirkliches Indicatordiagramm einer Verbundmaschine, wie etwa Fig. 9, mit den theoretischen) nicht ein, dafs θ_1 und θ_2 mit dem gröfsten und kleinsten Wert von $\dot{\theta}$ zusammenfallen müssen. Hierfür ist auch, solange man über die Gestalt des Dampfdiagramms nicht ganz bestimmte Voraussetzungen macht, gar kein Beweis zu bringen. Wird aufserdem noch ein variabler Widerstand angenommen, so kann sich diese Betrachtung noch mehr compliciren.

Diese und andere — dem Mathematiker ohne weiteres auffallende — Schwierigkeiten würden vollständig verschwinden, wenn man sich dazu entschliefsen könnte, das pag. 30 vorgeschlagene Mafs der Ungleichförmigkeit für die Schwungradsbestimmung zu Grunde zu legen.

27. *Bestimmung der Umlaufsgeschwindigkeit aus den Anfangsbedingungen. Rationelle Bestimmung der Masse des Schwungrades.* Hiermit steht eine dynamische Betrachtung in engem Zusammenhang, die Radinger in seiner umfangreichen Untersuchung nicht berührt hat, die man aber zur Klarlegung des Verlaufs der Winkelgeschwindigkeit während einer Tour des stationären Ganges der Maschine nicht entbehren kann. Nach dem Princip der Erhaltung der Energie läfst sich bekanntlich $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ für jeden Wert des Argumentes θ bestimmen, sobald $\dot{\theta}$ für irgend einen speciellen Wert von θ gegeben ist. Es besteht dann die — mehrfach erwähnte — Beziehung

$$\sqrt{F}\dot{\theta} = \sqrt{F_0\dot{\theta}_0^2 + 2r\int_0^\theta (T - W)d\theta}, \qquad F_0 = r^2 M_0.$$

In dieser Gleichung ist $\dot{\theta}_0$ für die äufsere Totlage des Kurbelarmes, also dem Argumente $\theta = 0$ entsprechend, gewählt. Wie hängt nun aber $\dot{\theta}_0$ mit der im voraus festgelegten Tourenzahl der Maschine zusammen? Es nützt nichts, dieser Frage auszuweichen und etwa vorauszusetzen, $\dot{\theta}_0$ solle mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}_{00}$ zusammenfallen, denn alsdann wüfste man nicht, für welchen Wert des Argumentes dies stattfindet. Diese Beziehung ist durch die pag. 29 angeführte Gleichung, nämlich

$$\tilde{\omega}_{00} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\frac{F}{F_0}} \cdot d\theta}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + \frac{2r}{F_0}\int_0^\theta (T - W)d\theta}}$$

gegeben, denn $\tilde{\omega}_{00}$ ist durch die Angabe der Tourenzahl pro Minute bekannt.

Hieraus mufs $\dot{\theta}_0$ bestimmt werden. Es ist dasselbe Problem, welches beim einfachen Pendel zur genauen Durchführung den Gebrauch transcendenter Functionen verlangt. In der technischen Mechanik sind aber derartige Hilfsmittel möglichst zu vermeiden. Wir begnügen uns deshalb mit einer ganz elementaren Näherungsrechnung, indem wir durchweg kleine Gröfsen von der zweiten Ordnung vernachlässigen. In der obigen Gleichung können wir dann

$$\sqrt{\frac{F}{F_0}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{M_1}{M_0 r^2}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2$$

setzen und erhalten nach dem binomischen Satze:

$$\tilde{\omega}_{00} = \frac{1}{\dot{\theta}_0}\int_0^{2\pi}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{M_1}{M_0 r^2}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{r M_0 \dot{\theta}_0^2}\int_0^{\theta}(T - W)d\theta\right]d\theta.$$

Zur Abkürzung schreiben wir nun

$$\Phi = \int_0^{\theta}\left[\left(D - M_1\frac{d^2 s}{d\theta^2}\cdot\dot{\theta}_0^2\right)\frac{ds}{d\theta} - rW\right]d\theta$$

und

$$\Phi_{00} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi d\theta.$$

Die Function Φ stimmt bis auf kleine Gröfsen zweiter Ordnung mit $\int_0^{\theta} F\frac{d^2\theta}{dt^2}d\theta$ und $\frac{d\Phi}{d\theta}$ in demselben Grade mit der von Radinger graphisch dargestellten Gröfse $\left(D - M_1\frac{d^2 s}{d\theta^2}\cdot\dot{\theta}_{00}^2\right)\frac{ds}{d\theta} - rW$ überein, welche man in seinem Sinne als den resultirenden Tangential-Zapfendruck bezeichnen könnte. Wir wollen deshalb auch in dem obigen Ausdruck für Φ die Grösse $\dot{\theta}_0^2$ durch $\dot{\theta}_{00}^2$ ersetzen, da sie den relativ kleinen Factor M_1 hat. In dieser Weise erhält man die einfache Beziehung

$$\dot{\theta}_{00} = \dot{\theta}_0\left(1 + \frac{\Phi_{00}}{r^2 M_0 \dot{\theta}_0^2}\right).$$

Bei der Ausführung kann Φ_{00} unmittelbar aus dem Radinger'schen Diagramm entnommen werden. Umgekehrt folgt mit demselben Grad der Annäherung:

$$\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_{00}\left(1 - \frac{\Phi_{00}}{r^2 M_0 \dot{\theta}_{00}^2}\right).$$

Hieraus berechnet man also die Winkelgeschwindigkeit der äufseren Totlage, sobald die. Tourenzahl n und also auch $\dot{\theta}_{00} = \frac{n\pi}{30}$ gegeben ist.

Für die Schwungradsbestimmung in dem vorgeschlagenen Sinne benutzen wir (cf. pag. 30) den neuen Ausdruck für den Grad der Ungleichförmigkeit des Maschinenganges:

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\dot\theta}{\dot\theta_{00}}\right)^2 d\theta$$

und setzen darin:

$$\dot\theta = \dot\theta_0\sqrt{1 + \frac{2r}{F_0\dot\theta_0^2}\int_0^\theta (T - W)\,d\theta}\cdot\sqrt{\frac{F_0}{F}}$$

oder angenähert:

$$\dot\theta = \dot\theta_0\left[1 + \frac{r}{F_0\dot\theta_0^2}\int_0^\theta (T - W)\,d\theta\right]\left[1 - \frac{1}{2}\frac{M_1}{M_0 r^2}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2\right].$$

Für

$$\Phi = \int_0^\theta\left[\left(D - M_1\frac{d^2 s}{d\theta^2}\cdot\dot\theta_{00}^2\right)\frac{ds}{d\theta} - rW\right]d\theta$$

wird dann, bei dem gewählten Grad der Genauigkeit:

$$\dot\theta = \dot\theta_0\left(1 + \frac{\Phi}{r^2 M_0\dot\theta_0^2}\right) = \dot\theta_{00}\left(1 - \frac{\Phi_{00}}{r^2 M_0\dot\theta_{00}^2}\right)\left(1 + \frac{\Phi}{r^2 M_0\dot\theta_0^2}\right).$$

In dem zweiten Factor der rechten Seite wollen wir noch $\dot\theta_0$ durch $\dot\theta_{00}$ ersetzen und wieder die Glieder der zweiten Gröfsenordnung weglassen. Auf diese Weise erhält man

$$\dot\theta_{00} - \dot\theta = \frac{\Phi_{00} - \Phi}{r^2 M_0\dot\theta_{00}^2},$$

und man sieht, dafs sich die verlangte Gröfse M_0 bei gegebenem Ungleichförmigkeitsgrade μ und gegebener mittlerer Winkelgeschwindigkeit $\dot\theta_{00}$ aus der einfachen Gleichung

$$\mu r^4\dot\theta_{00}^4\cdot M_0^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Phi_{00} - \Phi)^2 d\theta$$

leicht numerisch oder graphisch bestimmen läfst. Die in Betracht kommenden Grenzen für die Werte des Coefficienten μ wird man natürlich durch genaue Untersuchung des Geschwindigkeitsverlaufes bekannter Maschinentypen feststellen müssen, da keine Beziehung zwischen μ und dem bisher gebräuchlichen Ungleichförmigkeitscoefficienten ε besteht.

28. Die vorstehende Analyse der Radinger'schen Dampfmaschinentheorie möge genügen, um den Einflufs zu erklären, welchen seine Veröffentlichung auf die spätere Entwicklung der kinetischen Probleme der Technik ausgeübt hat. Radinger hat in seltenem

Mafse dazu beigetragen, dynamische Methoden in praktisch unmittelbar brauchbare Werkzeuge umzubilden. Ihm — vor allen — verdanken wir die erfolgreiche Durchführung der zum Gemeingut der Ingenieure gewordenen Erkenntnis, dafs alle Bewegungsvorgänge in den realen Maschinen mehr sind, als geometrische Ortsveränderungen im Raume und dafs nur auf Grund genauer Verfolgung des Verlaufs der kinetischen Energie und des Kraftfeldes ein zutreffendes Bild von dem „Ganzen" der dynamischen Wirkung innerhalb des Mechanismus erreichbar ist.

Wohl war die technische Kinetik vorher in theoretischer Hinsicht hoch entwickelt, und Männer von ausgezeichneter mathematischer Befähigung — wie Poncelet und Redtenbacher — hatten die Grundlagen geschaffen, auf die Radinger seine Dampfmaschinentheorie hätte unmittelbar aufbauen können. Aber er ist seinen eignen Weg gegangen und hat damit einen durchgreifenderen Einflufs auf die Constructeure der Gegenwart erlangt, als seine gelehrteren Vorgänger. Nicht durch elegante analytische oder geometrische Entwicklungen — vielmehr durch seine elementare, die praktische Wichtigkeit der Sache unmittelbar treffende Darstellungsmethode — hat er der technischen Kinetik eine dauernde Stelle in dem Vorrat der theoretischen Hilfsmittel des Maschinenconstructeurs gesichert.

Andererseits ist es aber auch entschieden zu bedauern, dafs nach dieser Wiedererweckung des dynamischen Interesses in den Kreisen der Ingenieure jene älteren von gründlichster systematischer Wissenschaftlichkeit durchdrungenen Arbeiten in unserer Zeit noch lange nicht diejenige Beachtung gefunden haben, die ihnen mit Recht gebührt. Grade durch ein Studium, welches auf moderne — sich der Praxis enger anpassende — Gesichtspunkte gegründet ist, erschliefsen sie uns die beste theoretische Einsicht in die verwickeltsten kinetischen Probleme der Technik.

E. Weiterer Ausbau der Kinetik des Kurbelgetriebes.

Litteratur.

Pröll. Versuch einer graphischen Dynamik. Leipzig 1874.
Thurston. A manual of the steam-engine. New York 1892.
W. Hartmann. Dynamische Theorie der Dampfmaschine. Berlin.
A. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. 4 (Dynamik) 1899.

H. Wehage. Über den ruhigen Gang der Dampfmaschine mit Kurbelwelle. Z. 1884. (Z. = Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ing.)
Kieselbach. Dampf-, Massen- und widerstehende Drücke. Z. 1884.
S. Gottlob. Zur graphischen Untersuch. mehrcyl. Dampfmasch. Z. 1884.
K. Mayer. Graphische Bestimmung des Schwungradgewichts. Z. 1889.
Kirsch. Über die graph. Best. der Kolbenbeschleunigung. Z. 1890. 91.
J. Missong. Über die Steigerung der Arbeitsgeschw. von Masch. mit oscillirenden Massen. Z. 1891.

Stribeck. Die bei den Dampfmasch. auftr. Stöfse an Kurbel- und Kreuzkopfzapfen. Z. 1893.
J. M. Allan. Vibration in high speed engines. Elect. Rev. 38. 39. 1896.
J. Wittenberg. Best. des Massendrucks der Dampfmaschinenteile. Z. 1896.
Thurston. The evolution of high speed engines. Elect. Rev. 39. 1896.
R. Land. Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan für Mechanismen. Z. 1896.
Hill. The problem of the connecting rod. Inst. Civ. Eng. 124. 1896.
O. H. Mueller. Zerstörung der Maschinen (der City of Paris). Z. 1890. 91. 92. (Namentlich die letzten Teile der Veröffentl. enthalten bemerkenswerte dynam. Discussionen.)

Lechatelier.[1]) Etudes sur la stabilité des mach. locomot. en mouvement. Paris 1849.
Yvon Villarceau. Théorie de la stab. des mach. locom. en mouvement. Paris 1852.
H. Résal. Notice sur la stabilité des mach. locom. Ann. des Mines. 3. 1853.
—. Mém. sur le mouvement vibratoire des bielles. ib. 9. 1856.
Weifsbach. Die Mechanik des Dampfwagens Civ. Ing. 1856.
Zeuner. Über das Wanken der Locomotive. Prgr. der polyt. Schule zu Zürich. 1891.
Redtenbacher. Die Gesetze des Locomotivbaues. Mannheim 1865.
Milne and Macdonald. On the vibrating movements of locomotives. Proc. Inst. Civ. Eng. 103. 1891.

Taylor. The causes of vibrations of screw steamers. J. Am. Soc. of Nav. Eng. 3. 1891.
Yarrow. Engl. Patent auf die Ausgleich. mehrkurbliger Maschinen. 17. XI. 1892.
Schlick. Deutsches Pat. auf die Ausgl. durch gesetzmäfs. Anordn. der arbeitenden Getriebe. 10. XI. 1893. cf. auch Z. 1894. pag. 1090.
Görris. Ausgleich. bewegter Massen an Schiffsmaschinen. Z. 1892.
J. H. Macalpine. On the prevention of vibrations of steamship. Engng. 63. 64. 1897.
H. Lorenz. Die Massenwirkungen am Kurbelgetriebe und ihre Ausgleich. bei den mehrkurbl. Maschinen. Z. 1897. cf. auch Knoller's Zusatz. Z. 1897. pag. 1371.
H. Schubert.[1]) Zur Theorie des Schlick'schen Problems. Mitt. math. Ges. Hamburg. Bd. 3. 1897.
C. Fränzel. Das Taylor'sche Verfahren zur Ausbalancirung von Schiffsmaschinen Z. 1898. cf. auch Riedler's Entgegnung. Z. 1899. pag. 249.
H. Lorenz. Dynamik des Kurbelgetriebes. Z. f. Math. u. Phys. 44. 1899.
—. On the Uniformity of turning moments of marine engines. Inst. of Nav. Architects, London 1900.

---

29. Es liegt nicht in dem Plane dieser Darstellung, über die zahlreichen Einzel-Publicationen zu referiren, die zur Weiterentwicklung der kinetischen Theorie des Kurbelmechanismus beigetragen haben. Wir werden nur die allgemeinen Gesichtspunkte hervorheben, die in Bezug auf Inhalt und Darstellungsform dieser Arbeiten bestimmend waren, und die auch in den Resultaten einen charakteristischen Ausdruck gefunden haben.

1) Diese Arbeiten haben dem Verf. nur im Auszuge vorgelegen.

Radinger hatte die zusammengesetzte Bewegung der Pleuelstange nicht besonders berücksichtigt, vielmehr ihre Masse mit den rein translatorischen Massen vereinigt. Wir haben hierauf in den früheren Darlegungen kein besonderes Gewicht gelegt, da diese Bewegungsform, sowie die Aufstellung des exacten Wertes für die kinetische Energie der Lenkstange bereits vor Poncelet bekannt war und niemanden erhebliche Schwierigkeiten hätte bereiten können. Dennoch ist diesem Gegenstande und verwandten kinematischen Punkten in den Arbeiten von Pröll, Wehage, Wittenberg, Hill u. a. Autoren eine sorgfältige Behandlung zu teil geworden und hat auch die allgemeine Anerkennung der Constructeure gefunden.

Der Techniker braucht eben oft receptartig ausgebildete Verfahren bei seinen Untersuchungen, gerade wie der Mathematiker von jeher stereotype Algorithmen bei seinen Arbeiten benutzt. Mehrere der in Rede stehenden Einzelveröffentlichungen über die Kinetik des Kurbelgetriebes sind für die nächstliegenden Bedürfnisse des Technikers zugeschnitten. Sie wollen nicht in erster Linie zeigen, wie man derartige Untersuchungen mit Hilfe der bekannten geometrischen oder analytischen Methoden der allgemeinen Mechanik ausführen könnte, sondern wie man es an ausführlich mitgeteilten concreten Beispielen, mit Berücksichtigung aller durch die Praxis gebotenen Anforderungen, thatsächlich macht. Der Constructeur eignet sich, wenn er die Wahl zwischen mehreren Lösungen desselben Problems hat, diejenige an, welche ihm am bequemsten erscheint und benutzt sie dann dauernd bei seinen Ausführungen als erprobtes Werkzeug. Ebenso ist die Frage, ob man einer graphischen oder einer numerischen Ausführung bei diesen Untersuchungen den Vorzug geben soll, meistens nicht zu beantworten — und ein Streit darüber könnte leicht die Grenzen des Ernsthaften überschreiten. Die Anschaulichkeit einer geometrischen Darstellung der Zwischen- und Endresultate der kinetischen Untersuchung eines concreten Mechanismus wird wohl niemand entbehren mögen, aber gleichgültig ist es jedenfalls, ob man zur Erlangung derselben etwas mehr gerechnet oder mehr gezeichnet hat. Bei der vorherrschend geometrischen Ausbildung der Techniker werden allerdings die graphischen Methoden — mit ihren Vorteilen und Schattenseiten — das Übergewicht behalten. So hat denn auch der Kurbelmechanismus in den meisten Arbeiten des vorstehenden Litteraturverzeichnisses (die Arbeiten über Locomotivschwingungen und Ausbalancirung der Schiffsmaschinen kommen erst später in Betracht) eine vorwiegend geometrische Behandlung erfahren, wobei die allgemeinen theoretischen Gesichtspunkte in den vorhandenen systematischen Darstellungen der rationellen Mechanik vollständig ausgebildet zur Verfügung standen.

Einige Arbeiten bevorzugen auch den rechnerischen Weg. So ist z. B. Wittenberg's Methode der „Schwerpunktskreise“ eine schöne

Verbindung analytischer Entwicklung mit darauf gegründeter geometrischer Interpretation.

Fast alle Arbeiten auf diesem Gebiet zeichnen sich durch ein stark hervortretendes kinematisches Gepräge aus. Es hat sogar zuweilen den Anschein, als ob die Verfasser ihre kinematische Behandlung des Kurbelproblems mit der dynamischen identificirten, worauf namentlich die Art des eingeschlagenen Näherungsverfahrens hindeutet. So giebt z. B. Land unter der Capitelüberschrift „Die dynamische Wirkung des Kurbelgetriebes" als Hauptziel „die Bestimmung der Tangentialtriebkraft am Kurbelzapfen, hervorgerufen durch den Dampfdruck auf den Kolben und die Massenkräfte" an. Diese Gröfse hängt aber bekanntlich von der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ ab, deren Verlauf als Function von θ oder der Zeit t hier nicht aus dem Princip der Energie auf Grundlage des Kraftdiagramms bestimmt, sondern — wie üblich — durch den Mittelwert $\dot{\theta}_{00}$ ersetzt wird. Die specifische dynamische Lösung ist aber auf diese Weise eliminirt und durch eine kinematische Behandlung ersetzt, wie es auch Radinger in ähnlicher Weise gethan hat. Wir dürfen jedoch, um eine Verwirrung der Begriffe — die Namen sind an und für sich belanglos — zu vermeiden, ein Problem mit $\varkappa$ Graden der Freiheit nur dann als dynamisch gelöst betrachten, wenn die $2\varkappa$ Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung bekannt sind. Im Falle der Kurbel ist dies theoretisch extrem einfach, aber trotzdem ist auch hier daran festzuhalten, dafs erst durch die Kenntnis von $\dot{\theta}$ und θ als explicite Functionen von t die endgültige dynamische Lösung gewonnen wird. Alles Andere ist dann ein Corollarium hierzu. Die bisher in der Technik vielfach üblichen kinematischen Lösungen behalten natürlich stets ihren praktischen Wert, wie jede brauchbare Näherung oder Mittelwertschätzung. Man mufs sie nur von den dynamischen scharf trennen (cf. Nr. 27). Die Schwierigkeit einer allgemeinen dynamischen Lösung des Kurbelproblems liegt allein in der scheinbar gesetzlosen Gestalt des thatsächlichen Kraftfeldes. Die Durchführung eines concreten Falles, also bei gegebenem Dampf- und Belastungsdiagramm, bei bestimmter Massenverteilung und Tourenzahl der Maschine, ist auf graphischem oder analytischem Wege leicht, denn man hat nur aus $\dot{\theta}_{00}$ die Gröfse $\dot{\theta}_0$ und dann aus der Gleichung

$$E - E_0 = \int_0^\theta r(T - W)\,d\theta$$

$\dot{\theta}$ als Function von θ zu bestimmen und erhält — im Bedarfsfalle — hieraus $\dot{\theta}$ und θ in ihrer Abhängigkeit von t. Man gewinnt aus der Vergleichung einer gröfseren Anzahl solcher Untersuchungen

nur eingeschränkte Gesichtspunkte in Bezug auf den Einflufs des Admissionsdruckes, des Füllungsgrades und der Compression auf den Gang der Maschine, aber keine übersichtlichen, exact formulirten Gesetze über die wechselseitigen metrischen Beziehungen der verschiedenen Phasen, welche den mafsgebenden Parametern entsprechen. Bei Voraussetzung eines theoretischen Diagramms liefse sich allerdings das Kraftfeld — ohne Specialisirung der charakteristischen Parameter — analytisch definiren und der allgemeinen dynamischen Durchführung zu Grunde legen, so dafs die gewünschten gesetzmäfsigen Beziehungen in exacter Form gewonnen werden könnten. Aber es bleibt doch fraglich, ob der grofse Aufwand an Mühe, welchen eine solche Lösung erfordert, in einem lohnenden Verhältnis zum praktischen Wert des Resultates steht. Man vergleiche nur die in Fig. 9 mitgeteilten empirischen Diagramme einer stationären Maschine oder diejenigen einer schnellfahrenden Verbundlocomotive (Herr Eisenbahnbauinspector Leitzmann hat in seiner Arbeit „Viercylindrige Locomotiven mit zwei Triebwerken“ Z. 1898. 99 eine grofse Anzahl sehr instructiver Locomotivdiagramme veröffentlicht) mit dem entsprechenden theoretischen Diagramm, so wird man sofort zugeben, dafs eine exact durchgeführte allgemeine theoretische Lösung sich durch Specialisirung der verfügbaren Parameter solchen wirklichen Fällen nicht einmal näherungsweise anschliefsen läfst.

Mehrere der erwähnten Publicationen enthalten wertvolle kinetostatische Untersuchungen des Kurbelgetriebes. Sie sind aber alle auf die — meist unzulässige — Annahme gegründet, dafs $\dot{\theta}^2$ unveränderlich ist, während doch gerade hier der Fall einer plötzlich eintretenden starken Winkelbeschleunigung, wie sie beim Durchgehen einer Maschine oder bei Walzmaschinen im regulären Betrieb vorkommt, praktisch der wichtigere Fall ist. Es ist sehr wünschenswert, dafs dieses wichtige Gebiet bald durch gründliche, auch die elastischen Materialverhältnisse berücksichtigende Arbeiten von neuem bereichert wird, zumal die mathematischen Schwierigkeiten, bei richtiger Erfassung der Kernpunkte des Problems, durchaus nicht so grofs sind, wie eine oberflächliche Betrachtung vermuten läfst.

30. *Das Problem der Massenausgleichung.* Obwohl ich die Litteraturangaben über die Störungen der Locomotivbewegung und die sogenannte „Massenausgleichung“ bei Schiffsmaschinen getrennt habe, so halte ich doch eine gemeinsame Betrachtung der entsprechenden dynamischen Probleme im folgenden für zweckmäfsig, um so mehr, da die in Betracht kommenden Gesichtspunkte in beiden Fällen vielfach dieselben sind.

Wir schicken auch hier eine sachliche Übersicht der allgemeinen Lösung dieser Probleme voraus, weil dies die historische Darlegung der Entwickelung der Anschauungsweisen und Resultate auf diesem

Gebiete erleichtert und aufserdem die geradezu unerträglichen Schwierigkeiten zu umgehen gestattet, welche durch die Wiedergabe der ganz verschiedenen von den einzelnen Autoren gewählten Bezeichnungen für die zahlreichen auftretenden Gröfsen, sowie der mannigfachen Ausgangspunkte der Untersuchungen herbeigeführt würden.

Wir denken uns die mehrkurbelige Maschine in die einzelnen aufeinander folgenden Kurbelsysteme mit den Massen $M_1', M_2', \ldots M_\iota', \ldots$ zerlegt und bezeichnen die Coordinaten des Schwerpunktes (S_ι) eines solchen Systems mit $x_\iota^* y_\iota^* z_\iota^*$, so dafs (nach S. 33)

$$(1)\quad \begin{cases} M_\iota' x_\iota^* = M_{0\iota}[r_\iota \cos(\psi_\iota - \gamma_\iota) + a_{0\iota}^* \sin(\eta_\iota + \gamma_\iota)] \\ \qquad + M_\iota\{(r_\iota \sin\psi_\iota + l_\iota \cos\eta_\iota)\sin\gamma_\iota + a_\iota^* \sin\gamma_\iota\} \\ M_\iota' z_\iota^* = M_{0\iota}[r_\iota \sin(\psi_\iota - \gamma_\iota) + a_{0\iota}^* \cos(\gamma_\iota + \eta_\iota)] \\ \qquad + M_\iota\{(r_\iota \sin\psi_\iota + l_\iota \cos\eta_\iota)\cos\gamma_\iota + a_\iota^* \cos\gamma_\iota\} \end{cases}$$

wird, wenn wir

$$a_0^* = c_0^* = c_{0\iota}^* = c_\iota^* = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_\iota + \gamma_\iota + \theta = \psi_\iota$$

setzen.

Der gemeinsame Schwerpunkt der Kurbelarme soll also in der Axe der Hauptwelle liegen, was durch ein einziges Gegengewicht erreichbar ist. Ferner sollen die Schwerpunkte der Lenkstangen und der zugehörigen rein translatorischen Massen in den Ebenen $y = e_\iota$ liegen. y_ι^* ist von θ unabhängig und gleich e_ι. Durch jeden Schwerpunkt S_ι legen wir ein Coordinatensystem parallel zu dem gemeinsamen festen System der x, y, z und beziehen die Coordinaten der einzelnen beweglichen Massenelemente dm auf dieselben, so dafs

$$x = x_\iota^* + x_\iota', \quad y = y_\iota^* + y_\iota', \quad z = z_\iota^* + z_\iota'$$

wird. Die Componenten der Reactionen des ganzen Maschinensystems hängen von den äufseren Kräften und den Gröfsen (die Integrationen erstrecken sich über die einzelnen Kurbelsysteme)

$$X = \sum_\iota \int_\iota \frac{d^2x}{dt^2} dm, \quad Y = \sum_\iota \int_\iota \frac{d^2y}{dt^2} dm, \quad Z = \sum_\iota \int_\iota \frac{d^2z}{dt^2} dm,$$

$$M_x = \sum_\iota \int_\iota \left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) dm, \quad M_y = \sum_\iota \int_\iota \left(x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2}\right) dm,$$

$$M_z = \sum_\iota \int_\iota \left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) dm$$

ab. Die Discussion dieser Gleichungen führt zur Lösung des Problems der „Massenausgleichung“ mehrkurbeliger Maschinen. Man erkennt

ohne weiteres, daſs die Componenten X, Y, Z verschwinden, wenn die Bedingungen

$$\frac{dx^*}{dt} = 0, \quad \frac{dz^*}{dt} = 0 \tag{2}$$

erfüllt sind, da $\frac{dy^*}{dt}$ ohnedies gleich Null ist.

Die Momente M_x und M_z reduciren sich auf:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\sum_\iota M'_\iota y^*_\iota \frac{d^2 x^*_\iota}{dt^2} - \sum_\iota \int_\iota y'_\iota \frac{d^2 x'_\iota}{dt^2} dm \\ M_z &= +\sum_\iota M'_\iota y^*_\iota \frac{d^2 z^*_\iota}{dt^2} + \sum_\iota \int_\iota y'_\iota \frac{d^2 z'_\iota}{dt^2} dm \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Da wir nun annehmen können, daſs die Massenverteilung eines jeden Kurbelsystems zur Ebene $y = c_\iota$ nahezu symmetrisch ist, so verschwinden die Gröſsen $\int_\iota y'_\iota \frac{d^2 x'_\iota}{dt^2} dm$ und $\int_\iota y'_\iota \frac{d^2 z'_\iota}{dt^2} dm$ bis auf unmerkliche Reste und es bleibt:

$$M_x = -\sum_\iota M'_\iota y^*_\iota \frac{d^2 x^*_\iota}{dt^2}, \quad M_z = \sum_\iota M'_\iota y^*_\iota \frac{d^2 z^*_\iota}{dt^2}. \tag{4}$$

Die Momentcomponenten der um die x- und z-Axe drehenden Reactionen werden also zu Null, wenn die weiteren barycentrischen Bedingungsgleichungen

$$\sum_\iota M'_\iota y^*_\iota \frac{dx^*_\iota}{dt} = 0, \quad \sum_\iota M'_\iota y^*_\iota \frac{dz^*_\iota}{dt} = 0 \tag{5}$$

erfüllt werden können.

Um die Gl. (2) zu untersuchen, entwickeln wir die Coordinaten des Schwerpunktes in Reihen, von denen nur die maſsgebenden Glieder beizubehalten sind. Man erhält nach einigen leichten Reductionen:

$$\left.\begin{aligned} x^*_\iota &= \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{r^2}{l^2}\right)(aM_{0\iota} + lM_\iota)\sin\gamma + r\left(1 - \frac{a}{l}\right) M_{0\iota}\cos\gamma\cos\psi \\ &\quad + r(M_{0\iota} + M_\iota)\sin\gamma\sin\psi - \tfrac{1}{4}\frac{r^2}{l^2}(aM_{0\iota} + lM_\iota)\sin\gamma\cos 2\psi \\ z^*_\iota &= \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{r^2}{l^2}\right)(aM_{0\iota} + lM_\iota)\cos\gamma - r\left(1 - \frac{a}{l}\right) M_{0\iota}\sin\gamma\cos\psi \\ &\quad + r(M_{0\iota} + M_\iota)\cos\gamma\sin\psi - \tfrac{1}{4}\frac{r^2}{l^2}(aM_{0\iota} + lM_\iota)\cos\gamma\cos 2\psi \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und hieraus durch Differentiation nach θ:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d x_\iota^*}{d\theta} = -\dfrac{r}{l}(l-a^*) M_{0\iota} \cos\gamma \sin\psi + r(M_{0\iota} + M_\iota) \sin\gamma \cos\psi \\ \qquad + \tfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{l^2}(a^* M_{0\iota} + l M_\iota) \sin\gamma \sin 2\psi, \\ \dfrac{d z_\iota^*}{d\theta} = \dfrac{r}{l}(l-a^*) M_{0\iota} \sin\gamma \sin\psi + r(M_{0\iota} + M_\iota) \cos\gamma \cos\psi \\ \qquad + \tfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{l^2}(a^* M_{0\iota} + l M_\iota) \cos\gamma \sin 2\psi. \end{cases}$$

Sind nun die Gröfsen r_ι, $\dfrac{a_{0\iota}^*}{l_\iota}$, $\dfrac{M_{0\iota}}{M_\iota}$ für die ganze Maschine unveränderlich, so verschwinden die rechten Seiten der Gleichungen (7), wenn die Bedingungen

$$(8)\quad \begin{cases} \sum\limits_\iota M_\iota \cos\alpha_\iota = 0, & \sum\limits_\iota M_\iota \sin\alpha_\iota = 0, \\ \sum\limits_\iota M_\iota \cos 2\alpha_\iota = 0, & \sum\limits_\iota M_\iota \sin 2\alpha_\iota = 0 \end{cases}$$

erfüllt sind, und zwar unabhängig von den Werten, welche man den Gröfsen γ beilegt. Die Gleichungen (5) sind unter denselben Annahmen erfüllt, wenn man den Gleichungen

$$(9)\quad \begin{cases} \sum\limits_\iota e_\iota M_\iota \cos\alpha_\iota = 0, & \sum\limits_\iota e_\iota M_\iota \sin\alpha_\iota = 0, \\ \sum\limits_\iota e_\iota M_\iota \cos 2\alpha_\iota = 0, & \sum\limits_\iota e_\iota M_\iota \sin 2\alpha_\iota = 0 \end{cases}$$

für die Schränkungswinkel der Kurbelarme genügen kann.

Es bleibt noch die Untersuchung des Momentes

$$(10)\qquad M_y = \sum_\iota \int^\iota \left(x\frac{d^2 z}{dt^2} - z\frac{d^2 x}{dt^2} \right) dm = \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial E}{\partial\theta}$$

übrig. Da sich aber die Gröfse $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial E}{\partial\dot\theta}$ naturgemäfs der vollständigen Ausgleichung entzieht, so betrachten wir zunächst $\dfrac{\partial E}{\partial\theta}$. Wir entwickeln den Ausdruck

$$\sum_\iota (E_{0\iota} + E_\iota) = \tfrac{1}{2}\sum_\iota r_\iota^2 M_{0\iota}\left\{1 - 2\frac{a_{0\iota}^*}{l_\iota}\frac{\sin\psi_\iota}{\cos\eta_\iota}\sin(\psi_\iota + \eta_\iota) + \frac{k_{0\iota}^2}{l_\iota^2}\frac{\sin^2\psi_\iota}{\cos^2\eta_\iota}\right\}\dot\theta^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_\iota r_\iota^2 M_\iota \frac{\cos^2(\psi_\iota - \eta_\iota)}{\cos^2\eta_\iota}\cdot\dot\theta^2$$

mit hinreichender Annäherung in die Reihe:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_\iota (E_{0\iota} + E_\iota)\\ &= \Big\{\tfrac{1}{4}\sum_\iota M_{0\iota}(l_\iota^2 + \tfrac{1}{2}k_{0\iota}^2 - a_{0\iota}^* l_\iota)\\ &+\tfrac{1}{4}\sum_\iota \frac{r^3}{l^2}(aM_{0\iota} + lM_\iota)\sin\psi - \tfrac{1}{4}\sum_\iota \frac{r^2}{l^2}[(k^2 - 2al)M_{0\iota} - l^2 M_\iota]\cos 2\psi\\ &+\tfrac{1}{4}\sum_\iota \frac{r^3}{l^2}(aM_{0\iota} + lM_\iota)\sin 3\psi\Big\}\dot\theta^2.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Hieraus folgt ohne weiteres:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial\theta} &= \Big\{\tfrac{1}{4}\sum\frac{r^3}{l^2}(aM_{0\iota} + lM_\iota)\cos\psi + \tfrac{1}{2}\sum\frac{r^2}{l^2}[(k^2 - 2al)M_{0\iota} - l^2M_\iota]\sin 2\psi\\ &+\tfrac{3}{4}\sum\frac{r^3}{l^2}(aM_{0\iota} + lM_\iota)\cos 3\psi\Big\}\dot\theta^2.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (8) und (9) sowie die zugehörigen Nebenbedingungen reducirt sich aber dieser Ausdruck auf:

$$\frac{\partial E}{\partial\theta} = \tfrac{3}{4}\sum_\iota \frac{r_\iota^3}{l_\iota^2}(a_{0\iota}^* M_{0\iota} + l_\iota M_\iota)\cos 3\psi_\iota\cdot\dot\theta^2 \tag{13}$$

und der Wert der ganzen kinetischen Energie der Maschine zieht sich zusammen auf:

$$\begin{aligned}E = \tfrac{1}{2}\Big\{B_0 + \tfrac{1}{2}\sum_\iota M_{0\iota}(l_\iota^2 + \tfrac{1}{2}k_{0\iota}^2 - a_{0\iota}^* l_\iota)\\ +\tfrac{1}{2}\sum_\iota \frac{r_\iota^3}{l_\iota^2}(a_{0\iota}^* M_{0\iota} + l_\iota M_\iota)\sin 3\psi_\iota\Big\}\dot\theta^2\end{aligned} \tag{14}$$

Hieraus ergiebt sich auch die Gröfse $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial\dot\theta}$ unmittelbar.

Das Glied mit dem Factor $3\psi_\iota$ ist aber immer verhältnismäfsig klein und hat aufserdem noch eine kurze Periode, so dafs sein Einflufs auf die Bewegung des Systems ein geringfügiger ist.

Der besseren Übersicht wegen fassen wir die Lösung des Problems der „Massenausgleichung" noch in den folgenden Sätzen zusammen:

A. Sind die Kurbelarme einander gleich und ihre Massenwirkungen im ganzen durch ein Gegengewicht ausgeglichen[1] ($a_0^* = 0$), und sind die einzelnen Verhältnisse

1) Ist $a_0^* > 0$, so ändert die Mitführung der Factoren

$$M_0 a_0^* \sum\cos(\psi - \gamma)\; M_0 a_0^* \sum\sin(\psi - \gamma)$$

etwas den Gang der Rechnung. Die Massenausgleichung bleibt aber in ähnlicher Weise ausführbar, und zwar ohne Anwendung eines Gegengewichtes, sobald die nötige Anzahl Kurbeln vorhanden ist.

$$\frac{a_{0\iota}^*}{l_\iota}, \quad \frac{k_{0\iota}}{l_\iota}, \quad \frac{M_{0\iota}}{M_\iota}$$

für die ganze Maschine unveränderlich, so verschwinden infolge der barycentrischen Bedingungen

$$\frac{dx^*}{dt} = 0, \quad \frac{dz^*}{dt} = 0$$

nicht nur die den Massenbeschleunigungen

$$\sum_\iota \int_\iota \frac{d^2x}{dt^2} dm, \quad \sum_\iota \int_\iota \frac{d^2z}{dt^2} dm$$

entsprechenden Reactionen und die bewegenden Wirkungen des Gravitationsfeldes, sondern auch gleichzeitig die mafsgebenden veränderlichen Bestandteile in dem Ausdruck für die kinetische Energie des ganzen Systems, so dafs sich die Maschine nahezu wie ein auf einer Welle befindliches centrirtes Rad bewegt, welches an seinem Umfang nur von den Tangentialdrücken des Dampf-Kraftfeldes beeinflufst wird.

B. Unter denselben Systembedingungen bewirken die weiteren barycentrischen Festsetzungen:

$$\sum_\iota M_\iota' y_\iota^* \frac{dx_\iota^*}{dt} = 0, \quad \sum_\iota M_\iota' y_\iota^* \frac{dz_\iota^*}{dt}$$

das Verschwinden der den Momenten M_x und M_z entsprechenden Reactionen.

Für eine Maschine mit vollkommen ausgeglichenen Massen lautet die Bewegungsgleichung:

$$(15) \qquad (B_0 + B') \frac{d^2\theta}{dt^2} = r \sum_\iota (T_\iota - W_\iota),$$

wo B' das Trägheitsmoment einer im Kurbelkreise rotirenden ideellen Masse von dem Betrage

$$(16) \qquad M' = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k_{0\iota}^2}{l_\iota^2} - \frac{a_{0\iota}^*}{l_\iota}\right) \sum_\iota M_{0\iota}$$

bedeutet.

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot\theta$ für den Rotationswinkel θ ergiebt sich aus der einfachen Gleichung:

$$(17) \qquad \dot\theta^2 = \dot\theta_0^2 + \frac{2r}{B_0 + B'} \sum_\iota \int_0^\theta (T_\iota - W_\iota) d\theta$$

Bei dieser Gelegenheit will ich noch hinzufügen, dafs die früher gegebene Ableitung von $\dot{\theta}_0$ aus $\dot{\theta}_{00}$ eine Modification erfahren mufs, wenn die rotirenden Massen im Vergleich zu den Maximalweiten, welche die Differenz $T_\iota - W_\iota$ erreichen kann, nicht mehr von überwiegendem Werte sind, wie es bei Schiffsmaschinen vorkommen kann.

Für eine mehrkurblige Maschine ohne Massenausgleichung lautet die Bewegungsgleichung (g Beschleunigung der Erdschwere):

$$F\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \theta}\cdot\dot{\theta}^2 - Mg\frac{\partial z^*}{\partial \theta} + \sum_\iota r_\iota(T_\iota - W_\iota),$$

worin

$$E = \tfrac{1}{2}F\cdot\dot{\theta}^2$$

gesetzt ist.

Soll die im vorstehenden in den Grundzügen angedeutete Massenausgleichung auf Locomotiven angewendet werden, so sind nur ganz unwesentliche Modificationen erforderlich. Die Kupplungskurbeln ändern gar nichts, und die Kuppelstangen ordnen sich mit ihren Massen den M_ι zu, wenn wir das betreffende $\frac{r_\iota}{l_\iota} = 0$ machen. Das ganze System ist also bei zwei gekuppelten Axen als Vierkurbelsystem aufzufassen und dem entsprechend auszugleichen. Ist dies geschehen, so bleibt der gemeinsame Schwerpunkt der in Bezug auf das Gestell beweglichen Teile in relativer Ruhe und die Störungen des Ganges haben ihre Ursache nur in den elastischen Wechselwirkungen zwischen Rad und Schiene. Hiermit treten wir aber in ein Gebiet, dessen theoretische Behandlung nur auf Grund sehr ausgedehnter und sorgfältiger Beobachtungen in gewissem Grade möglich wird. Alles voreilige Rechnen mit Rücksicht auf willkürliche Systemhypothesen kann hier — im günstigsten Falle — nur zur Orientirung des Problems, niemals zu Resultaten führen, die für die Praxis einen endgültigen Wert haben.

31. Der Begründer der wissenschaftlichen Theorie der Massenausgleichung ist Lechatelier. Er hat im Jahre 1849 die analytischen Bedingungen für den Wegfall der wichtigsten Bewegungsstörungen der Locomotive gegeben, nachdem schon viele Jahre vorher der Gebrauch empirisch gewählter Gegengewichte in der Praxis üblich war.

Diese Arbeit veranlafste dann Yvon Villarceau zu einer, den Methoden der rationellen Mechanik entsprechenden, sehr gründlichen Neubearbeitung des Problems. Seine Veröffentlichungen aus den Jahren 1850—52 beziehen sich auf alle Reactionscomponenten und sind mit einem analytischen Apparat ausgerüstet, der uns heute als zu umfangreich erscheint. Mit dem Problem der Schwingungen

hat sich Villarceau nicht befafst. Dies ist wohl erst von Redtenbacher (1856) in Angriff genommen worden, während Résal gleichzeitig die elastischen Schwingungen der Lenkstange behandelt hat.

Da bei der Locomotive mit zwei Cylindern eine willkürliche Annahme über den Verschränkungswinkel (α) der Kurbeln — wegen des Ausspringens der Maschine — von vornherein ausgeschlossen schien, so haben die erwähnten Autoren natürlich die Bedingungsgleichungen $\sum M_\iota \cos \alpha_\iota$ etc. gar nicht in Betracht gezogen. Hierzu gaben erst die mehrkurbligen Schiffsmaschinen Anlafs, und es war dem Amerikaner Taylor (1891) vorbehalten, das Problem unter diesem Gesichtspunkte aufzufassen und zu lösen. Er bediente sich hierbei der Kräfte- und Momentpolygone, welche im Falle der Ausgleichung geschlossen erscheinen, auf das Schubstangenverhältnis $\frac{r}{l}$ nahm er keine Rücksicht. Im Jahre 1892 nahm Yarrow ein englisches Patent auf die Massenausgleichung der Schiffsmaschinen durch Zusatzgewichte (Bob weights) und ein Jahr darauf (10. XI. 1893) erhielt Schlick das bekannte D. R. P. Nr. 80974, welches bis in die neueste Zeit Stoff zu den heftigsten Controversen gab. Eine Schilderung derselben giebt Herr Lüders (Z. 1899), die auch die einschlägliche Litteratur sehr ausgiebig berücksichtigt. Den entgegengesetzten Standpunkt vertritt Herr Riedler, dessen sachliche Gutachtung die Entscheidung des Reichsgerichtes mafsgebend beeinflufste, welche zur Annullirung der 1898 erfolgten Nichtigkeitserklärung des Patentamtes führte. Während des Hin- und Herstreitens der Parteien — im Herbst 1897 — erschien die Arbeit des Herrn Lorenz in der Zeitschr. des Ver. dtsch. Ing., welche zur Klarstellung des ganzen Problems wohl den wichtigsten Beitrag geliefert hat. Er entwickelt die 6 Componenten der beiden Hauptreactionen und weist nach, dafs die entsprechenden Annullirungsbedingungen den Wegfall der Tangentialmassenwirkung auf das Drehmoment an der Welle zur Folge hat. Die oben vorausgeschickte theoretische Übersicht ist im Anschlufs an die Lorenz'sche Arbeit dargestellt, wenn auch der von mir gewählte Weg in Bezug auf den Ausgangspunkt und die Durchführung ein anderer ist. Die wesentlichen Gesichtspunkte sind dadurch nicht verschoben. Jedenfalls war durch die Veröffentlichung von Lorenz ein mathematisch sicherer Boden gewonnen, auf den alle sachlichen Discussionen, zu denen das Problem Anlafs gab, in objectiver Form gegründet werden konnten.

Herr Knoller hat in einer bald nachfolgenden, an die Redaction der Ztschr. (1899, pag. 1371) gerichteten Zuschrift interessante Aufklärungen in Betreff der Bedingungsgleichungen

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \sum_\iota M_\iota \cos\alpha_\iota = 0 \\ \sum_\iota M_\iota \sin\alpha_\iota = 0 \\ \sum_\iota M_\iota e_\iota \cos\alpha_\iota = 0 \\ \sum_\iota M_\iota e_\iota \sin\alpha_\iota = 0 \end{cases} \qquad \text{II.}\quad \begin{cases} \sum_\iota M_\iota \cos 2\alpha_\iota = 0 \\ \sum_\iota M_\iota \sin 2\alpha_\iota = 0 \\ \sum_\iota M_\iota e_\iota \cos 2\alpha_\iota = 0 \\ \sum_\iota M_\iota e_\iota \sin 2\alpha_\iota = 0 \end{cases}$$

gegeben, welche hier wörtlich angeführt werden können. „Gruppe I enthält die Bedingungen der angenäherten Balancirung; aufserdem sieht man sofort, dafs sich Gruppe II einzig und allein durch die Verdoppelung der Winkel von Gruppe I unterscheidet, also identisch ist mit Gruppe I einer gedachten Maschine, die dieselben Gestängegewichte und Cylinderabstände, aber doppelt so grofse Kurbelwinkel besitzt. Daraus folgt die Regel: Eine Maschine ist dann vollkommen balancirt, wenn sie selbst und gleichzeitig auch jene Maschine, welche aus ihr durch Verdoppelung der Kurbelwinkel entsteht, angenähert (d. h. für unendliche Schubstangenlängen) ausgeglichen ist. Ist aber eine vierkurblige Maschine angenähert ausgeglichen, so ist mit denselben Gewichten und Abständen nur eine weitere balancirte Anordnung möglich, und zwar jene, welche zur ersten symmetrisch ist. Eine Vierkurbelmaschine ist also nur dann vollkommen balancirbar, wenn sie derart beschaffen ist, dafs durch Verdoppelung aller Kurbelwinkel wieder dieselbe oder die zu ihr symmetrische Maschine entsteht. Dies ist aber nur mit Kurbelwinkeln von 0^0 und 120^0 möglich ... Es bleiben also bei der Vierkurbelmaschine mit parallelen Cylinderaxen zwei in derselben Ebene liegende Kurbeln als unausführbare Bedingung der vollkommenen Balancirung zurück.“

Eine eingehende analytische Discussion der obigen Bedingungsgleichungen ist zuerst von Herrn Schubert gegeben worden, worüber dann in der „Dynamik des Kurbelgetriebes“ von Herrn Lorenz ausführlich referirt wurde. In der letztgenannten Arbeit findet man eine vollständige Übersicht der Theorie des Kurbelmechanismus in zusammenfassender äufserst übersichtlicher Darstellung, die deshalb auch zur allgemeinen Orientirung über diesen Gegenstand, und über die Theorie des nahe verwandten Balancirgetriebes sehr geeignet ist.

Die gleichzeitig mit der Lorenz'schen Arbeit erschienene Abhandlung von J. H. Macalpine beschäftigt sich in Bd. 64 des Engng. vorwiegend mit der Entwickelung der periodischen Glieder in Fourier'sche Reihen. Wer für solche analytischen Durchführungen Interesse hat, findet darin willkommenes Material. Für

die praktische Seite der Frage kommt besonders die Arbeit in Bd. 63 des Engng. in Betracht. In neuerer Zeit ist der Einfluſs der Massenausgleichung auf den gleichförmigen Gang der Maschine mehrfach erörtert worden. Man hat sogar behauptet, daſs die der Ausgleichung entsprechenden Schränkungswinkel die erforderliche Gleichmäſsigkeit in dem resultirenden Tangentialdruckdiagramm gar nicht zulassen. Daſs die letztere Auffassung in dieser allgemeinen Form eine irrtümliche ist, hat Herr Lorenz wiederholt bewiesen. Sein Argument (cf. seinen Vortrag vom 5. April 1900 On the uniformity of turning moments of marine engines in der Inst. of naval architects) beruht auf der Thatsache, daſs der Tangentialdruck für einen einzelnen Cylinder in seinem wesentlichen Verlauf durch die Formel

$$T = C + A \cos 2\theta + \mathrm{B} \sin 2\theta$$

darstellbar ist. Hieraus folgt für den Mehrkurbelmechanismus

$$\sum T_\iota = \sum C_\iota + \cos 2\theta \cdot \sum (A_\iota \cos 2\alpha_\iota + B_\iota \sin 2\alpha_\iota)$$

$$- \sin 2\theta \cdot \sum (A_\iota \sin 2\alpha_\iota - B_\iota \cos 2\alpha_\iota).$$

Sollen also die Schwankungen, welche von dem Argument 2θ herrühren, verschwinden, so müssen die Bedingungsgleichnngen

$$\sum (A_\iota \cos 2\alpha_\iota + B_\iota \sin 2\alpha_\iota) = 0, \quad \sum (A_\iota \sin 2\alpha_\iota - B_\iota \cos 2\alpha_\iota) = 0$$

erfüllt sein. Ferner sei der mittlere Tangentialdruck, welcher der Phasendifferenz α_ι entspricht, $\mathfrak{T}_\iota$. Die Bedingungsgleichungen lassen sich jetzt nach Einführung zweier Constanten a und b auf die Form bringen (für alle Cylinder werden Diagramme von ähnlichem Verlauf vorausgesetzt):

$$a \sum \mathfrak{T}_\iota \cos 2\alpha_\iota + b \sum \mathfrak{T}_\iota \sin 2\alpha_\iota = 0,$$

$$a \sum \mathfrak{T}_\iota \sin 2\alpha_\iota - b \sum \mathfrak{T}_\iota \cos 2\alpha_\iota = 0,$$

und diese sind gleichwertig mit den Relationen:

$$\sum \mathfrak{T}_\iota \cos 2\alpha_\iota = 0 \quad \text{und} \quad \sum \mathfrak{T}_\iota \sin 2\alpha_\iota = 0,$$

welche mit den obigen Regeln für die Massenausgleichung in keinem Widerspruch stehen, wenn die Arbeiten auf die einzelnen Kurbeln richtig verteilt sind.

F. Die Stabilität der Bewegung und das Problem der kleinen Schwingungen.

Litteratur.

Lagrange, Mécan. anal. ed. 2. (1811) Bd. 1. Sect. VI. cf. auch ed. 3 (Bertrand).
Routh, A treatise on the stability of a given state of motion. London 1877.
— Dynamics of a system of rigid bodies. ed. 4. Pt. I. London 1882. Pt. II. 1884. Auch durch Schepp in deutscher Bearbeitung mit einem Vorwort von F. Klein veröffentlicht. Leipzig 1898.
Lord Rayleigh, Theory of sound. 2 Bde. London 1878.
Föppl, Vorlesungen Bd. IV. 1899.

Airy, On Watts governor. Mem. Astron. Soc. 11. 1840.
V. Lebeau, Des regulateurs appliqués aux machines à vapeur. Liège. 1890.
M. Baraz, Der Pendelregulator mit beweglichem Drehpunkt Z. 1894.
W. Lynen, Die Berechnung der Centrifugalregulatoren. Berlin 1895.
Tolle, Beitrag zur Beurteilung der Centrifugalpendelregulatoren. Z. 1896. 97.
A. Stodola, Das Siemens'sche Regulirprincip und die amerikanischen Inertiaregulatoren. Z. 1899. (In dieser Arbeit findet man auch reichliche Litteraturangaben über Regulatoren.)

Zeuner (Lit. E.) 1861.
Redtenbacher (Lit. E.) 1865.
Einbeck, Theoretische Untersuchungen über den Unterbau von Locomotiven. Leipzig 1875.
Heusinger v. Waldegg, Handbuch der speciellen Eisenbahntechnik. Bd. 3. Locomotivbau. Leipzig 1882. (Umfangreichstes Werk zur systematischen sachlichen Orientirung.)
Fliegner, Einfluſs der Schienenstöſse auf die gaukelnden Bewegungen der Locomotiven. Viertelj. Schr. d. naturf. Ges. Zürich 1897.

J. Kleen, Die elastischen Schwingungen der Schiffskörper. Z. 1893.
R. E. Froude, The non uniform rolling of ships Engng. 61. 1896.
A. Kriloff, New theory of the pitching motion of ships on waves and of the stresses produced by this motion. Engng. 61.
Berling, Schiffsschwingungen, ihre Ursachen und Kritik der Mittel zu ihrer Verminderung. Z. 1899.

---

32. *Der Ansatz von Lagrange.* Das Problem der kleinen Schwingungen eines Systems von einer endlichen Anzahl der Freiheitgrade sowie der continuirlichen Systeme mit unendlich vielen Graden der Freiheit hat in der wissenschaftlichen Technik schon vielfache Anwenduugen gefunden. Hier wollen wir zunächst den Schwingungen des Regulators, der Locomotive und der Schraubenschiffe eine kurze Darstellung widmen und die übrigen noch in Betracht kommenden Probleme am Schlusse des Capitels zusammenfassen.

Lagrange hat die Grundlagen für die analytische Durchführung dieser Probleme für den Fall gegeben, daſs kleine Schwingungen um

eine Gleichgewichtslage des Systems stattfinden. Seine Methode läfst sich in einigen Zeilen andeuten. In der Ruhelage habe ein Element dm die absoluten Coordinaten x_0, y_0, z_0, infolge der Ausweichung gerät es in die Lage (x, y, z). Hat das System i Grade der Bewegungsfreiheit, so kann man die Bewegung durch i unabhängige Veränderliche $q_1, q_2, \ldots q_i$ ausdrücken und für den Fall sehr kleiner Deviationen von der Ruhelage (a und b constant):

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_0 + \sum_\iota a_\iota q_\iota + \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} a_{\iota\varkappa} q_\iota q_\varkappa \\ y = y_0 + \sum_\iota b_\iota q_\iota + \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} b_{\iota\varkappa} q_\iota q_\varkappa \\ z = z_0 + \sum_\iota c_\iota q_\iota + \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} c_{\iota\varkappa} q_\iota q_\varkappa \end{cases}$$

setzen, da die höheren Potenzen der sehr kleinen Gröfsen $q_1, q_2, \ldots q_i$ unerheblich sind. Hieraus folgt für die kinetische Energie des Systems ein Ausdruck von der Form:

$$(2) \quad E = \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} h_{\iota\varkappa} \dot{q}_\iota \dot{q}_\varkappa,$$

worin die Gröfsen h bekannte Constanten sind.

Lagrange nimmt nun ferner an, dafs die gleichgewichtsstörenden Kräfte ein Potential besitzen. Bezeichnen wir dies, soweit es sich auf die Kräfte bezieht, welche die Masse dm mit den Coordinaten x, y, z beeinflussen, mit $\mathfrak{P}dm$, so wird nach dem Taylor'schen Satze:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}\right)_0 \sum_\iota a_\iota q_\iota + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right)_0 \sum_\iota b_\iota q_\iota + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right)_0 \sum_\iota c_\iota q_\iota + \mathfrak{P}_2.$$

Hierin bedeutet selbstverständlich $\mathfrak{P}_0$ den Wert von $\mathfrak{P}$ für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ und $\mathfrak{P}_2$ die Glieder zweiter Ordnung der Entwickelung, welche also die Factoren $q_\iota q_\varkappa$ enthalten. Die Glieder höherer Ordnung werden, der obigen Voraussetzung gemäfs, vernachlässigt. Wir bilden nun durch Integration über das ganze Massensystem die totale Kräftefunction

$$(3) \quad V = \int \mathfrak{P} dm = H_0 + \sum_\iota H_\iota q_\iota + \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} H_{\iota\varkappa} q_\iota q_\varkappa.$$

Da aber nur innere Kräfte vorausgesetzt sind, so halten sich diese nach dem D'Alembert'schen Princip das Gleichgewicht. Es mufs also

$$\sum_\iota \frac{\partial V}{\partial q_\iota} \delta q_\iota = 0$$

sein, d. h. der Ausdruck $\sum_\iota H_\iota q_\iota$ in Gleich. (3) mufs verschwinden. Wir erhalten demnach:

$$V = H_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} H_{\iota\varkappa} q_\iota q_\varkappa \tag{4}$$

und daraus die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\iota} - \frac{\partial E}{\partial q_\iota} = \frac{\partial V}{\partial q_\iota}$$

oder

$$\sum_\varkappa h_{\iota\varkappa} \frac{d^2 q_\varkappa}{dt^2} + \sum_\varkappa H_{\iota\varkappa} q_\varkappa = 0. \qquad \iota = 1, 2, \ldots i$$

Diese Gleichungen mit constanten Coefficienten können in bekannter Weise integrirt werden und liefern die vollständige Lösung des Problems. Eine sehr ausführliche und originelle Behandlung dieser und ähnlicher Aufgaben findet man in dem bekannten Werke Lord Rayleigh's „Theory of Sound".

33. *Die Stabilität der Bewegung von Routh.* Im Jahre 1876 setzte die Universität Cambridge den Adams Prize aus für eine erfolgreiche Bearbeitung des Themas „The Criterion of dynamical stability", welchen E. J. Routh gewann. Durch die Veröffentlichung der Lösung (1877) hat er die allgemeine Dynamik mit einem aufserordentlich wertvollen Beitrag bereichert und damit zugleich bewiesen, wie unvorsichtig es war, zu behaupten, das Feld der allgemeinen Mechanik sei abgebaut. Die astronomische Mechanik kannte freilich den Begriff der stabilen Bewegung in gewissem Sinne (Laplace), aber die allgemeine Lösung fehlte, und eine solche gab Routh mit den Regeln zur vollständigen Durchführung für jeden vorkommenden Fall. Dafs ihren Anwendungen auf Probleme der wissenschaftlichen Technik, die gerade hier in Frage kommen, die explicite Durchführung dennoch erhebliche, zuweilen unbesiegbare Schwierigkeiten im Wege stehen, liegt auf der Hand, da diese hier nicht in Unvollkommenheiten der allgemeinen Methode, sondern in den oft recht ungefügen oder teilweise unbekannten Systembedingungen ihren Grund haben. Die Begriffe der „stabilen" und „stationären" (steady motion) Bewegungen und die Kriterien, welche die zweifellose Feststellung derselben ermöglichen, sind für die Dynamik von grofser Bedeutung. Ich gebe deshalb Routh's Definitionen hier wörtlich wieder:

A. „Ein dynamisches System sei unter dem Einflufs eines conservativen Kräftesystems in irgend einem Bewegungszustand, dem die kinetische Energie E und die potentielle Energie V entspricht.

$E + V$ ist dann eine bekannte Function der Coordinaten $q_1, q_2, \ldots q_i$ und ihrer ersten Derivirten nach der Zeit, nämlich $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_i$. $E + V$ ist aufserdem für den ganzen Verlauf der Bewegung constant und gleich H. Wir setzen ferner voraus, dafs einige oder alle Integrale erster Ordnung (Zwischenintegrale) der Differentialgleichungen der Bewegung bekannt sind, nämlich $F_1(q_1, q_2, \ldots \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots) = C_1$, $F_2(q_1, q_2, \ldots \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots) = C_2$, u. s. w. Endlich sollen die Gröfsen $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ldots$ insofern als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, als sie nicht durch die obigen Gleichungen zu einander in Beziehung gesetzt sind. Ist nun $T - V$ für alle Gröfsenänderungen von $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ldots$ (für welche natürlich $T - V = H$ bleibt) ein absolutes Maximum oder ein absolutes Minimum, dann ist die Bewegung **stabil** für alle Störungen, welche die Constanten $C_1, C_2, \ldots$ unverändert lassen.“ (Routh, Dynamics. Pt. II. pag. 52.)

B. „Die Gröfsen $q_1, q_2, \ldots$ seien unabhängige Coordinaten, welche die Position des Systems bestimmen. In dem Moment, wo die Störung der Bewegung eintritt, sei $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0, \ldots$ und nach der Störung $q_1 = q_1^0 + \xi_1$, $q_2 = q_2^0 + \xi_2, \ldots$ Um zu erkennen, ob $\xi_1, \xi_2, \ldots$ kleine Gröfsen bleiben, setzen wir in den Differentialgleichungen der Bewegung $q_1 = q_1^0 + \xi_1$, $q_2 = q_2^0 + \xi_2, \ldots$, vernachlässigen ihre Quadrate und höheren Potenzen, so dafs dieselben in Bezug auf $\xi_1, \xi_2, \ldots$ lineär werden. Werden dann die Coefficienten $\xi_1, \dot{\xi}_1, \ddot{\xi}_1, \xi_2, \dot{\xi}_2, \ddot{\xi}_2, \ldots$ von der Zeit unabhängig, so ist die ungestörte Bewegung für die Coordinaten eine **stationäre**.“ (Routh, Stability of Motion. pag. 2.)

Um die Gleichungen einer stationären Bewegung aufzustellen, nimmt Routh an, die allgemeinen Coordinaten irgend eines Systems mit i Freiheitsgraden seien $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_i$. Dann ist die kinetische Energie des Systems

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} R_{\iota\varkappa} \dot{\eta}_\iota \dot{\eta}_\varkappa,$$

wo die $R_{\iota\varkappa}$ Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_i$ sind Die Coordinaten der gestörten Bewegung seien

$$\eta_1 = \eta_1^0 + q_1, \quad \eta_2 = \eta_2^0 + q_2, \ldots,$$

so dafs E jetzt die folgende Form annimmt:

$$E = E_0 + \sum_\iota A_\iota q_\iota + \sum_\iota A'_\iota \dot{q}_\iota + \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} A_{\iota\varkappa} q_\iota q_\varkappa$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} A'_{\iota\varkappa} \dot{q}_\iota \dot{q}_\varkappa + \sum_{\iota\varkappa} B_{\iota\varkappa} q_\iota \dot{q}_\varkappa.$$

In derselben Weise kann man sich auch das Potential entwickelt denken und erhält den entsprechenden Ausdruck:

$$V = H_0 + \sum_\iota H_\iota q_\iota + \tfrac{1}{2}\sum_{\iota\varkappa} H_{\iota\varkappa} q_\iota q_\varkappa.$$

Die Coefficienten A, B, H, welche bei den Schwingungen des Systems um eine Gleichgewichtslage (wie bei **Lagrange**) unveränderliche Gröfsen sind, können hier auch Functionen der Zeit t sein. Im ersteren Falle ist die Bewegung „stationär", im zweiten Falle kann sie auch stationär sein, wenn es gelingt, statt der q neue Variablen einzuführen, so dafs die Coefficienten wieder von der Zeit unabhängig werden. **Routh** hat diese Transformation in seiner Preisschrift eingehend untersucht. Das entsprechende Transformationsproblem ist analytisch identisch mit dem bekannten Hauptaxenproblem der Flächen zweiten Grades in einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit (cf. **Routh** Stability pag. 51—53). Führt auch eine solche Coordinatentransformation nicht zu dem gewünschten Ziel, so ist die Bewegung jedenfalls nicht stationär. Wir wollen hier die Coefficienten in den Entwickelungen von E und V als Constante annehmen. Dann ist:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot q_\iota} = A'_\iota + \sum_\varkappa A_{\iota\varkappa} \dot q_\iota + \sum_\varkappa B_{\iota\varkappa} q_\varkappa,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot q_\iota} = \sum_\varkappa A_{\iota\varkappa}\frac{d^2 q_\varkappa}{dt^2} + \sum_\varkappa B_{\iota\varkappa}\frac{d q_\varkappa}{dt},$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_\iota} = A_\iota + \sum_\varkappa A_{\iota\varkappa} q_\varkappa + \sum_\varkappa B_{\varkappa\iota}\frac{d q_\varkappa}{dt},$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_\iota} = H_\iota + \sum_\varkappa H_{\varkappa\iota} q_\varkappa.$$

Diese Werte setzen wir in die Bewegungsgleichungen von **Lagrange**:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot q_\iota} - \frac{\partial E}{\partial q_\iota} + \frac{\partial V}{\partial q_\iota} = 0, \qquad \iota = 1, 2, \dots i$$

ein und erhalten zur Bestimmung der Oscillationen die Gleichungen:

$$\sum_\varkappa \left\{ A_{\iota\varkappa}\frac{d^2 q_\varkappa}{dt^2} + (B_{\iota\varkappa} - B_{\varkappa\iota})\frac{d q_\varkappa}{dt} + (H_{\varkappa\iota} - A_{\iota\varkappa}) q_\varkappa \right\} = 0$$

$$\iota = 1, 2, \dots i$$

und die Bedingungen, welche die stationäre Bewegung verlangt:

$$A_1 = H_1,\; A_2 = H_2,\; \dots\; A_i = H_i.$$

Hieraus ergeben sich die Bedingungen der Stabilität nach den bekannten Methoden, welche in jedem Lehrbuch der Integral-

rechnung dargestellt sind. Ist das System nicht conservativ, wie es bei Berücksichtigung der Reibungen der Fall sein wird, so ändert sich der Gang der Rechnung nicht wesentlich.

34. *Die Differentialgleichungen für die Bewegung des Centrifugalregulators.* Der Regulator bildet eigentlich mit der Maschine ein einziges System mit zwei Graden der Freiheit (cf. Föppl Vorles. Bd. IV. § 34). Eine diesem Gesichtspunkt entsprechende theoretische Behandlung bietet jedoch — wenn es sich um Dampfmaschinen mit automatisch veränderlicher Expansion handelt — so grofse Schwierigkeiten, dass man sie bis jetzt nicht in Angriff[1]) genommen hat. Wir betrachten deshalb auch hier den Regulator als ein System für

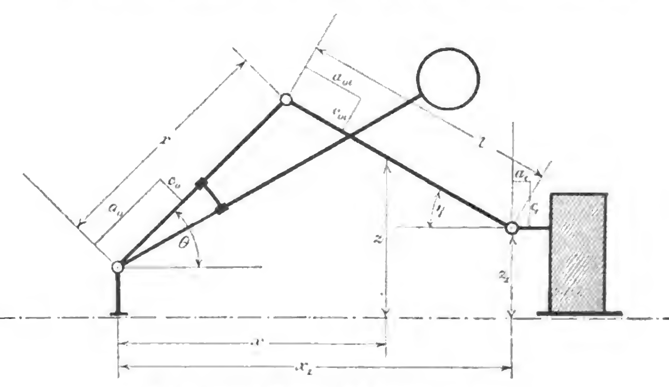


Fig. 10. Coordinatenschema des Centrifugal-Regulators.

sich und die durch die Kuppelung mit der Maschine übertragenen Kräfte als äufsere Kräfte. Da bei den äufserst mannigfaltigen Constructionssystemen auch die für die Aufstellung der kinetischen Energie und das Kraftfeld in Betracht kommenden Anordnungen noch in verschiedene Gruppen zerfallen, so beschränken wir uns, da es sich doch nur um die Darlegung der allgemeinen theoretischen Gesichtspunkte handelt, auf die Voraussetzung eines gewöhnlichen Pendelregulators (Fig. 10).

Die Berechnung der kinetischen Energie des Systems ist dann identisch mit derjenigen eines gewöhnlichen Kurbelmechanismus. Wir

1) Für den Fall der Turbinenregulirung hat Herr Föppl a. a. O. die Gleich. aufgestellt und discutirt.

haben deshalb auch den Regulator in liegender Stellung gezeichnet und alle früheren Bezeichnungen beibehalten. Die Schwerkraft wirkt also in der Richtung der x-Axe. Dem Schema in Nr. 21 entsprechend haben wir zu beachten:

I. Das rotirende System

$$\left.\begin{aligned} x &= a_0 \cos\theta - c_0 \sin\theta \\ z &= e + a_0 \sin\theta + c_0 \cos\theta \end{aligned}\right\}$$

II. Das System der Lenkstange

$$\left.\begin{aligned} x &= \quad\;\; r\cos\theta + a_{01}\cos\eta + c_{01}\sin\eta \\ z &= e + r\sin\theta - a_{01}\sin\eta + c_{01}\cos\eta \end{aligned}\right\}$$

mit der Bedingungsgleichung

$$r\sin\theta - l\sin\eta = h - e, \tag{1}$$

woraus

$$\dot\eta = \frac{r\cos\theta}{l\cos\eta}\cdot\dot\theta$$

folgt, und

III. Das System der gleitenden Teile

$$x = r\cos\theta + l\cos\eta + a_1, \qquad z = h + c_1.$$

Wir setzen wieder, wie in Nr. 21, die relative kinetische Energie $E = E_0 + E_{01} + E_1$, dann wird nach Ausführung der Integrationen[1]) über die einzelnen Teilsysteme:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= \tfrac{1}{2} B_0 \dot\theta^2 \\ E_{01} &= \tfrac{1}{2} r^2 M_{01}\left\{1 + \frac{k^2\cos^2\theta}{l^2\cos^2\eta} - 2\frac{\cos\theta}{\cos\eta}\left[\frac{a_{01}^*}{l}\cos(\theta+\eta)\right.\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left.\left. + \frac{c_{01}^*}{l}\sin(\theta+\eta)\right]\right\}\dot\theta^2 \\ E_1 &= \tfrac{1}{2} r^2 M_1 \frac{\sin^2(\theta+\eta)}{\cos^2\eta}\cdot\dot\theta^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und für die Schwerpunktscoordinaten (x^*, z^*) erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Mx^* &= M_0(a_0^*\cos\theta - c_0^*\sin\theta) + M_{01}(r\cos\theta + a_{01}^*\cos\eta \\ &\qquad + c_{01}^*\sin\eta) + M_1(r\cos\theta + l\cos\eta + a_1^*) \\ Mz^* &= M_0(e + a_0^*\sin\theta + c_0^*\cos\theta) + M_{01}(e + r\sin\theta \\ &\qquad - a_{01}^*\sin\eta + c_{01}^*\cos\eta) + M_1(h + c_1^*) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

1) Die hierdurch eintretenden Schwerpunktscoordinaten von M_{01} sind a_{01}^* und c_{01}^*.

Im übrigen ist die Massenverteilung (also auch die specielle Form der Teile des Regulators) ohne Einfluſs auf die Rechnung. Bezeichnet man das Azimuth der Regulatorebene mit ψ und die Raumcoordinaten mit x' y' z', so wird:

$$x' = x, \quad y' = z \sin\psi, \quad z' = z\cos\psi$$

und dementsprechend:

$$\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + z^2\dot{\psi}^2.$$

Folglich ist die totale kinetische Energie einer Regulatorhälfte:

$$E' = E + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\cdot\dot{\psi}^2, \tag{4}$$

wo zur Abkürzung

$$\mathfrak{A} = \sum\int z^2 dm$$

gesetzt ist.

Die Integration ist über die einzelnen seitlich beweglichen Teile des Regulators zu erstrecken, die Summation über die so erhaltenen Integrale.

Es wird also:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \int(e + a_0\sin\theta + c_0\cos\theta)^2 dm \\ &+ \int(e + r\sin\theta - a_{01}\sin\eta + c_{01}\cos\eta)^2 dm.\end{aligned} \tag{5}$$

Die Totalmomente der äuſseren Kräfte, welche den Coordinaten θ und ψ entsprechen, bezeichnen wir vorläufig mit P und Q, dann lauten die Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E'}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial E'}{\partial\theta} = P, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E'}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial E'}{\partial\psi} = Q \tag{6}$$

welche sich im vorliegenden Falle auf die Form:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}} - \left(\frac{\partial E}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\theta}\dot{\psi}^2\right) = P, \quad \frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\dot{\psi}) = Q$$

bringen lassen. Für die nachfolgenden Betrachtungen wollen wir auſserdem — wie früher — die Gröſse E durch $\frac{1}{2}\mathfrak{J}\cdot\dot{\theta}^2$ ersetzen, wo $\mathfrak{J}$ nach den Gl. (2) eine bekannte Function der Veränderlichen θ ist. Die Bewegung des Regulators ist dann bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{cases}\mathfrak{J}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\mathfrak{J}}{d\theta}\cdot\dot{\theta}^2 - \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\theta}\cdot\dot{\psi}^2\right) = P \\ \mathfrak{A}\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\theta}\cdot\dot{\theta}\dot{\psi} = Q\end{cases} \tag{7}$$

Bezeichnen wir noch die Componenten der äuſseren Kräfte nach den Coordinaten des im Raume festliegenden Systems mit X', Y', Z', so ist bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} P &= \sum\left(X'\frac{\partial x'}{\partial \theta} + Y'\frac{\partial y'}{\partial \theta} + Z'\frac{\partial z'}{\partial \theta}\right), \\ Q &= \sum\left(X'\frac{\partial x'}{\partial \psi} + Y'\frac{\partial y'}{\partial \psi} + Z'\frac{\partial z'}{\partial \psi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Das Kraftfeld, durch welches die Bewegung des Regulators beeinflufst wird, ist meistens ein recht complicirtes. Es kommen nämlich die folgenden Constituenten in Betracht:

1. Die Schwerkraft, welche alle bewegl. Massenteile beeinflufst.
2. Federkräfte, die in einzelnen Punkten des Gelenksystems angreifen.
3. Das Moment des äufseren Antriebs um die x'-Axe.
4. Reibungen in dem System des Regulators ohne Rücksicht auf die Rotation.
5. Der Widerstand des Stellzeuges und die Rückwirkung der Steuerung.
6. Dämpfungen beim Gebrauch einer Ölbremse oder dergl.
7. Ein Reibungsmoment um die x'-Axe.

Das Moment der Schwerkraft ist $Mg\frac{\partial x^*}{\partial \theta}$, also nach Gl. (3) bekannt. Das Moment der Federkräfte ist ebenfalls in jedem gegebenen Falle ohne Schwierigkeit theoretisch bestimmbar. Wir setzen es allgemein gleich $F(\theta)$. Dagegen ist die Festlegung des Momentes des äufseren Antriebes um die x-Axe, welcher bei der Entlastung der Maschine eintritt, nicht so einfach. Denn nun ändert sich die Muffenstellung und es beginnt ein veränderlicher Zustand, der nur unter bestimmten Voraussetzungen über den Verlauf des totalen Kraftfeldes der Maschine erkennbar wird. Jedenfalls ist dieses Moment eine Function von θ, welche wir mit $f(\theta)$ bezeichnen wollen. Die Reibungskräfte in der Pendelebene lassen sich am bequemsten durch Versuche im gegebenen Falle bestimmen. Meistens ist die Muffenreibung vorwiegend. Diese soll deshalb allein berücksichtigt und mit $\pm R$ bezeichnet werden. Ihr Moment in Bezug auf eine Regulatorhälfte ist dann $\pm \frac{1}{2} R \frac{dx_1}{d\theta}$, wo $x_1 = r \cos\theta + l \cos\eta$ zu setzen ist. Der Widerstand des Stellzeuges hat ebenfalls den Charakter einer Reibung. Sein Moment sei $\pm \frac{1}{2} W \frac{dx_1}{d\theta}$. Im Falle einer etwaigen besonderen Dämpfung in der Richtung der x-Axe setzen wir in üblicher Weise das Widerstandsmoment $= \pm \frac{1}{2} \mu \frac{dx_1}{dt}\frac{dx_1}{d\theta}$, wo μ eine Erfahrungsconstante bedeutet. Das Moment der Reibung der beweglichen Teile des Regulators bei der Drehung um die x'-Axe entzieht sich ebenfalls einer exacten theoretischen Festlegung a priori. Wir machen — wie Routh (Stability, pag. 43) — die Annahme, dafs es der Rotationsgeschwindigkeit proportional sei, setzen

also das entsprechende Moment $= -\varrho \frac{d\psi}{dt}$, wo ϱ eine empirische Constante ist.

Nach diesen Auseinandersetzungen über das Kraftfeld erhalten wir:

$$(9) \quad \begin{cases} P = Mg\frac{dx^*}{d\theta} + F(\theta) \pm \frac{1}{2}\left(R + W + \mu\frac{dx_1}{dt}\right)\frac{dx_1}{d\theta}, \\ Q = f(\theta) - \varrho\frac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Diese Werte sind in die Gleichungen (7) einzusetzen.

35. *Die Wirkung des Regulators. Astasie.* Streng genommen ist der oben bestimmte Wert der kinetischen Energie E' nicht vollständig. Es müfste eigentlich auch die kinetische Energie der Feder, der Bestandteile des Stellzeuges und der Steuerung, welche von dem Regulator zwangsläufig bewegt werden, mit berücksichtigt werden, um ein zutreffendes Bild von dem ganzen Bewegungsvorgang zu erhalten. Die in der Technik eingebürgerten theoretischen Untersuchungen und Anschauungen über die Leistung eines Regulators beschränken sich jedoch, von einigen wenigen Ausnahmen abgesehen, auf die Discussion der Gleichgewichtsverhältnisse. Obwohl der Gegenstand dadurch aus dem Rahmen unserer Betrachtung herausfällt, so möchte ich doch eine kurze Darlegung dieser allgemein adoptirten statischen Behandlungsweisen hier einfügen, weil sie auch für die dynamische Behandlung des Problems bemerkenswerte Gesichtspunkte hergeben kann.

Die Grenzbedingungen des Gleichgewichts folgen unmittelbar aus den Gleichungen (7) und (9), wenn man dort $\theta = 0$ und $\frac{d\dot{\psi}}{dt} = 0$ setzt, nämlich:

$$(10) \quad \frac{d\mathfrak{A}}{d\theta}\cdot\dot{\psi}^2 + 2Mg\frac{dx^*}{d\theta} + 2F(\theta) \pm (R + W)\frac{dx_1}{d\theta} = 0.$$

Hierin sind alle Gliedei Tangentialcomponenten. Will man die Componenten in der Richtung der x-Axe haben, so hat man nur mit $\frac{d\theta}{dx_1}$ zu multipliciren und erhält:

$$(11) \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dx_1}\cdot\dot{\psi} + 2Mg\frac{dx^*}{dx_1} + 2F(\theta)\frac{d\theta}{dx_1} \pm (R + W) = 0.$$

Es ist üblich, die Tourenzahl μ in der Minute durch die Beziehung $\dot{\psi} = \frac{\pi}{30}\mu$ einzuführen. Doch ändert dies nichts an den folgenden Betrachtungen. Man denkt sich nun für jeden praktisch zulässigen Wert von θ (resp. x_1) die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{A}}{d\theta}\cdot\dot{\psi}'^2 + 2Mg\frac{dx^*}{d\theta} + 2F(\theta) + (R+W)\frac{dx_1}{d\theta} &= 0\\ \frac{d\mathfrak{A}}{d\theta}\cdot\dot{\psi}^2 + 2Mg\frac{dx^*}{d\theta} + F(\theta) \qquad &= 0\\ \frac{d\mathfrak{A}}{d\theta}\cdot\dot{\psi}''^2 + 2Mg\frac{dx^*}{d\theta} + 2F(\theta) - (R+W)\frac{dx_1}{d\theta} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

nach $\dot{\psi}'$, $\dot{\psi}$ und $\dot{\psi}''$ aufgelöst und stellt diese drei Gröfsen in ihrer Abhängigkeit von θ (resp. x_1) durch drei Curven anschaulich dar. Es ist dann $\dot{\psi}$ diejenige Winkelgeschwindigkeit, welche der Regulator haben müfste, wenn er mit dem Stellzeug nicht gekuppelt wäre, also ein „idealer" Wert, während $\dot{\psi}'$ und $\dot{\psi}''$ diejenigen Winkelgeschwindigkeiten darstellen sollen, bei welchen der Ausschlag eintreten kann, je nachdem die Bewegungstendenz nach der einen oder anderen Seite liegt. Selbstverständlich wirkt der passive Widerstand $R+W$ immer der Bewegung entgegen. Nun nimmt man willkürlich an, dafs $\dot{\psi}'' - \dot{\psi} = \dot{\psi} - \dot{\psi}' = \Delta\dot{\psi}$ sei, und setzt

$$\frac{\dot{\psi}'' - \dot{\psi}'}{\dot{\psi}} = \nu, \qquad (13)$$

so dafs mit genügender Annäherung $\nu = 2\frac{\Delta\dot{\psi}}{\dot{\psi}}$ wird. Die Gröfse ν nennt man den „Unempfindlichkeitsgrad" des Regulators. Sie ist identisch mit $2\frac{\Delta\mu}{\mu}$. Bezeichnet man mit den Indices o und u die höchste und tiefste Stellung des Regulators, so ist

$$\delta = 2\frac{\dot{\psi}_o - \dot{\psi}_u}{\dot{\psi}_o + \dot{\psi}_u}$$

diejenige Gröfse, welche man den „Ungleichförmigkeitsgrad" des Regulators genannt hat.

Die Componente der gesamten Centrifugalkraft des Regulators ist nach Gl. (10) gleich $\frac{d\mathfrak{A}}{d\theta}\dot{\psi}^2$ in tangentialer Richtung oder nach Gl. (11) gleich $\frac{d\mathfrak{A}}{dx_1}\cdot\dot{\psi}^2$ in der Richtung der x-Axe. Unter der obigen Annahme ist aber

$$\dot{\psi}''^2 - \dot{\psi}^2 = (\dot{\psi} + \Delta\dot{\psi})^2 - \dot{\psi}^2 = 2\dot{\psi}\Delta\dot{\psi} = \nu\dot{\psi}^2.$$

Die Gröfse

$$\nu\frac{d\mathfrak{A}}{dx_1}\cdot\dot{\psi}^2 = \nu S \qquad (14)$$

hat man „Verstellungskraft" des Regulators genannt, während man S selbst als „Energie" desselben bezeichnet, obwohl diesen Gröfsen nur eine statische Bedeutung zukommt. Die ganze Betrachtung wird etwas durchsichtiger, wenn man die mittlere Gleich. (12) vorläufig

ausschliefst und nur die erste und dritte Gleichung benutzt. Man definirt dann eine „mittlere" Winkelgeschwindigkeit $\dot\psi_0$ durch die Festsetzung $\dot\psi' + \dot\psi'' = 2\dot\psi_0$ und bezieht den Unempfindlichkeitsgrad ν auf diesen Mittelwert $\dot\psi_0$ ebenso wie vorher, also $\nu = \frac{2\Delta\dot\psi_0}{\dot\psi_0}$. Denn jetzt ist in aller Strenge $\dot\psi' = \dot\psi_0 + \Delta\dot\psi_0$ und $\dot\psi'' = \dot\psi_0 - \Delta\dot\psi_0$. Durch Subtraction der ersten und dritten Gl. (12) folgt sofort:

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{A}}{d\theta}(\dot\psi'^2 - \dot\psi''^2) = (R + W)\frac{dx_1}{d\theta}$$

oder:

$$\nu\frac{d\mathfrak{A}}{dx_1}\cdot\dot\psi_0^2 \qquad = R + W \text{ (Verstellungskraft)}$$

und:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dx_1}\cdot\dot\psi_0^2 \qquad = \frac{R + W}{\nu} \text{ (Energie).}$$

Aus der Gleichgewichtsgleichung (10) resp. (11) hat man noch andere Folgerungen gezogen. Diejenigen Werte von x_1, welche der Bedingung $\frac{d\dot\psi}{dx_1} = 0$ entsprechen, pflegt man die „astatischen" Punkte des Regulators zu nennen. Ist dagegen für den gangen Verlauf des Hubes $\frac{d\dot\psi}{dx_1} = 0$, so hat man es mit einem astatischen Regulator zu thun. Das Verhalten des Mechanismus in der Umgebung eines astatischen Punktes wird als ein „pseudoastatisches" bezeichnet. Manche Regulatoren verwerten auch zur Hubbegrenzung zwei genügend weit auseinander liegende astatische Punkte. Infolge der so definirten Astasie kann der Regulator den stationären Gang der Maschine bei verschiedenen Füllungsverhältnissen bewahren, ohne die mittlere Geschwindigkeit zu ändern. Statische Regulatoren verändern dementsprechend die Tourenzahl der Maschine, sobald eine Belastungsänderung eintritt. Selbstverständlich mufs die Stabilität in beiden Fällen erhalten bleiben.

Man kann aus der zweiten Gleichung (7) mit Berücksichtigung von (9) die Zeit bestimmen, welche der Regulator gebraucht, um von der Winkelgeschwindigkeit $\dot\psi_0$ ausgehend zur Geschwindigkeit $\dot\psi'$ zu gelangen, bei welcher die Verstellwirkung beginnt. Die Differentialgleichung der Bewegung in diesem durch die Reibung bedingten Übergangsstadium geht aus der Gleichung

$$\mathfrak{A}\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{A}}{d\theta}\dot\theta\dot\psi = f(\theta) - \varrho\dot\psi$$

hervor, wenn wir der Sache entsprechend $\dot\theta = 0$ und $f(\theta) = c$ (constant) setzen. Dann ist also:

$$\mathfrak{A}\frac{d\dot\psi}{dt} + \varrho\dot\psi = c. \tag{15}$$

$\mathfrak{A}$ ist wohl von θ abhängig, mufs aber hier auch als Constante behandelt werden, da es nur auf die Veränderung von $\dot{\psi}$ ankommt. Die allgemeine Integration dieser Differentialgleichung ist sehr einfach. Wir ziehen aber ein noch bequemeres Nährungsverfahren vor. Wir können nämlich ohne wesentlichen Fehler in der Differentialgleichung $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ setzen und erhalten dann sofort:

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \frac{c - \varrho \dot{\psi}}{\mathfrak{A}} t. \tag{16}$$

Man sieht, dafs die Winkelbeschleunigung constant ist und den Wert $(c - \varrho \dot{\psi}_0) : \mathfrak{A}$ hat. Dieses einfache Resultat ist allerdings nur Folge unserer Voraussetzungen und des eingeschlagenen Näherungsverfahrens. Setzt man in Gleichung (16) $\dot{\psi} = \dot{\psi}'$, also gleich dem Wert, welcher aus der ersten Gleichung (12) folgt, so ist das zugehörige t die Zeit, welche der Regulator gebraucht, um aus dem indifferenten Zustand in denjenigen der Stellungswirkung zu gelangen.

36. *Die Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen des Regulators.* Die dynamische Untersuchung des Regulators ist eigentlich mit der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung identisch. Nun ist aber die allgemeine Lösung der Gleichung (7) mit den zur Verfügung stehenden analytischen Hilfsmitteln äufserst schwierig, wenn nicht unmöglich. In jedem besonderen Falle könnte man allerdings diese Gleichungen approximativ mit jedem beliebigen Grad der Genauigkeit integriren, würde aber auf diesem Wege keine Resultate von allgemeinerem Charakter erlangen können. Man hat sich daher bis jetzt damit begnügt, nur den unmittelbar auf den Beharrungszustand folgenden Bewegungsvorgang nach der Methode von Lagrange zu bestimmen. Dies ist schon von Airy geschehen und führt zur Kenntnis der Stabilität der Bewegung. Wir setzen dieser Voraussetzung entsprechend (cf. Routh ‚Dynamics' Pt. II. pag. 57—61 und ‚Stability of motion' pag. 42—44):

$$\theta = \theta_0 + \xi \quad \text{und} \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \eta$$

und transformiren die Differentialgleichungen diesen Substitutionen gemäfs. Man erhält so, nach Weglassung der Glieder höherer Ordnung, die Gleichungen:

$$F_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2} \mp \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dx_1}{d\theta_0} \right)^2 \frac{d\xi}{dt} - \left(\frac{1}{2} \dot{\psi}_0^2 \frac{d^2 \mathfrak{A}}{d\theta_0^2} + \frac{\partial P}{\partial \theta_0} \right) \xi - \frac{d\mathfrak{A}}{d\theta_0} \dot{\psi}_0 \eta = 0 \tag{15a}$$

$$\mathfrak{A}_0 \frac{d\eta}{dt} + \dot{\psi}_0 \frac{d\mathfrak{A}}{d\theta_0} \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial \theta_0} \xi + \varrho \eta = 0 \tag{16a}$$

In diesen Gleichungen sind alle Coefficienten der abhängig Veränderlichen und ihrer Derivirten constant. Sie lassen sich deshalb nach den bekannten Methoden allgemein integriren. Durch Elimi-

nation von η erhält man eine lineäre Gleichung dritter Ordnung von der Form:

$$(17) \qquad F_0 \frac{d^3\xi}{dt^3} + G_0 \frac{d^2\xi}{dt^2} + H_0 \frac{d\xi}{dt} + J_0 \xi = 0,$$

in welcher alle Coefficienten bekannte constante Gröfsen sind. Gewöhnlich begnügt man sich mit der allgemeinen Integration dieser Differentialgleichung. Die Bedingungen der Stabilität ergeben sich aus der determinirenden Gleichung nach den bekannten Regeln der Algebra. In diesem Sinne ist auch das Regulatorproblem von Wischnegradsky im Civ. Ing. 1877 untersucht worden.

37. *Die neueren Arbeiten über die Theorie des Regulators* begnügen sich nicht mehr mit den einseitigen statischen Betrachtungen, sondern machen ausgiebigen Gebrauch von den ihnen zur Verfügung stehenden Lehren der rationellen Mechanik, soweit dynamische Gesichtspunkte in Frage kommen. In dieser Hinsicht ist namentlich die Arbeit des Herrn Stodola über die Inertiaregulatoren (Z. 1899) sehr beachtenswert. Hierin ist die Theorie der Flachregler mit einer frei mitrotirenden Beharrungsmasse, deren Trägheitswiderstand als Stellkraft verwertet wird, in recht übersichtlicher und origineller Behandlungsweise dargestellt. Wir können natürlich in diesem kurzen Bericht auf die einzelnen Regulatorsysteme nicht eingehen, sondern müssen uns mit dem Hinweis begnügen, dafs die dynamische Bearbeitung je nach der Construction des beweglichen Systems und in Rücksicht auf das Widerstandsfeld der Steuerung für die verschiedenen Typen einen besonderen Charakter aufweist. Doch sind die Unterschiede in Bezug auf die anzuwendenden Methoden nicht so grofs, als man beim ersten Anblick der aufserordentlichen Mannigfaltigkeit der gebräuchlichen Systeme vermuten könnte. Jemehr die kanonischen Methoden der allgemeinen Dynamik in den technischen Untersuchungen Anwendung und der Sache angepafste Durcharbeitung finden, desto fester schliefsen sich scheinbar auseinanderliegende Probleme zusammen, und desto leichter lassen sie sich von einem gemeinsamen Standpunkte aus überblicken, der die vielen zufälligen Unterschiede nur als unwesentliche Modificationen erkennen läfst.

38. *Die Schwingungen des Oberbaues der Locomotive.* Wir können uns nach dem Vorhergehenden über das Problem der Locomotivschwingungen ziemlich kurz fassen. Denn es ist nun ohne weiteres klar, wie das Problem anzufassen und durchzuführen ist. Die ersten allgemeinen Ansätze verdanken wir den Bemühungen Redtenbachers. Über die Ursachen der zu betrachtenden Schwingungen sind wir zum Teil durch die Erörterungen über die Massen-

wirkungen an dem Mehrkurbelmechanismus orientirt. Es kommen aber noch andere Momente in Betracht, die bei der stationären Maschine keine Rolle spielen, wie die Wirkungen der elastischen Federverbindungen und die in mathematischer Form sehr schwer definirbaren Reactionen der Schienen, der Schwellen und des Bahnkörpers. Redtenbacher hat versucht den Einflufs der Schienenstöfse durch die Einführung harmonischer Functionen der Zeit zu berücksichtigen und dadurch seine Behandlung des Problems wesentlich vereinfacht.

Sehen wir zunächst von den Schienenstöfsen ab, so sind bei der theoretischen Untersuchung der regelmäfsigen Schwingungen zwei Ursachen zu unterscheiden. Einmal erhält der ganze Locomotivbau periodische Stöfse infolge der Reactionen, welche die Bewegung des Kurbelmechanismus hervorruft, dann aber überträgt der Unterbau der Locomotive vertical gerichtete Stöfse auf den durch Federn getragenen Oberbau. Die ersteren können durch die Massenausgleichung nahezu zum Verschwinden gebracht werden (vergl. Nr. 31), während die letzteren auch nach der Massenausgleichung innerhalb gewisser Grenzen bestehen bleiben. Die hier in Betracht kommenden Kräfte sind 1) das Gewicht des Oberbaues, 2) die elastischen Kräfte der Federn, 3) Pressungen gegen die Führungslineale, welche dem Dampfüberdruck am Kreuzkopf proportional sind, 4) der Zugwiderstand und 5) die Schienenstöfse. Dementsprechend sind 6 Componenten der Schwingungen zu betrachten, nämlich 3 Translationscomponenten und zwar $[x]$ parallel zur Geleisaxe, $[y]$ in der Querrichtung zum Geleise, $[z]$ in verticaler Richtung, und drei rotatorische Componenten (x), (y) und (z) um die entsprechenden Axen. Da aber die Tragfedern im wesentlichen nur verticale Stöfse übertragen, so kommen hiervon nur drei Componenten in Betracht: die translatorische $[z]$ (das Wogen) sowie die rotatorischen (x) (das Wanken) und (y) (das Nicken). Das Schlingern (z) wird auf ebener gerader Strecke hauptsächlich durch restirende Massenwirkungen hervorgerufen, kann aber auch durch Reactionen der Fahrbahn veranlafst werden, die sich jedoch einer mathematischen Behandlung vorläufig entziehen. Man wird überhaupt bei solchen theoretischen Urteilen stets im Auge behalten müssen, dafs das gesamte äufsere Kräftesystem keineswegs in allen Einzelheiten bekannt ist. Die Wirklichkeit überragt hier stets die Gesamtheit der Hypothesen, welche der mathematischen Analyse zu Grunde gelegt werden. Man denke nur an die Übergangscurven, die spiralförmige Bahnaxe bei gleichzeitigem Vorhandensein von Steigung und Krümmung und die complicirten elastischen Reactionen der Schwellen, Rückwirkung der Kupplungen bei starken Änderungen der Bahnaxe u. s. w., so wird man gern zugeben, dafs eine vollständige Rücksichtnahme auf diese Mannigfaltigkeit von äufseren Einwirkungen geradezu unmöglich ist.

Redtenbacher hat den Einflufs der Tragfedern sehr eingehend und mit dem ihm eigenen mathematischen Geschick untersucht. Im übrigen nimmt er ebenso wie Einbeck eine constante Zugkraft an. Bei der Constantenbestimmung der Integrale für die $[z]$ und (y)-Schwingungen ist ihm jedoch ein Fehler untergelaufen, der zu unrichtigen Folgerungen aus den an und für sich richtigen analytischen Gleichungen führte. Dies wurde schon von Zech bei Gelegenheit einer Recension des Redtenbacher'schen Werkes bemerkt und veranlafste Zeuner, das Problem in teilweise neuer Fassung nochmals zu behandeln. Zeuner machte auch schon die wichtige Bemerkung, dafs auch die richtig gestellten theoretischen Untersuchungen der Oscillationen des Oberbaues der Locomotive eigentlich keine praktisch verwertbaren Resultate liefern. Trotzdem nahm Einbeck das Problem wieder von neuem auf, vernachlässigte aber ebenso wie seine Vorgänger den directen Einflufs der Schienenstöfse. Diesem ist erst in der Arbeit von A. Fliegner unter Voraussetzung von Längsschwellen Rechnung getragen. Der Verfasser hat in sehr geschickter Weise die in Betracht kommenden Deformationen berücksichtigt, weshalb ich es für angemessen halte, seine Überlegung hier mitzuteilen. „Bewegt sich das Rad auf der Schiene fort, so hat in irgend einem Augenblicke die Gestaltsveränderung vor dem Rade noch nicht die nötige Zeit gehabt, sich vollständig auszubilden, dahinter ist sie umgekehrt noch nicht ganz zurückgegangen. Die Profilcurven sind also unsymmetrisch und zwar so, dafs der Berührungspunkt etwas vorrückt. Solange das Rad von dem Schienenende genügend weit entfernt ist, ändert sich die Axhöhe desselben nicht. Hat sich dagegen das Rad dem Ende der Schiene so weit genähert, dafs der vordere Endpunkt der Eindrückung nicht mehr auf die Schiene fällt, so ist vor dem Rade nicht mehr genügendes Material vorhanden, um den Raddruck in der bisherigen Weise aufzunehmen; die Eindrückung mufs dort zunehmen und die Radaxe anfangen sich zu senken, bis das Rad den Anfang der folgenden Schiene trifft. Von diesem Augenblicke an beginnt diese Schiene einen Teil des Raddruckes aufzunehmen und die erste Schiene wird daher immer mehr entlastet. Die Folge davon ist ein Wiederheben der Radaxe, das so lange andauert, bis sich der Raddruck auf beiden Seiten gleichmäfsig verteilt hat. Das weitere Auflaufen auf die zweite Schiene erfolgt dann angenähert gleich, nur natürlich im umgekehrten Sinne, wie das Ablaufen von der ersten“ (Fliegner a. a. O. pag. 14 und 15). Auf Grund dieser anschaulichen Auffassung der Schienenreaction stellt der Verfasser die aufwärts wirkende Kraft, welche durch die Federn auf den Oberbau übertragen wird, durch eine den Verhältnissen angepafste Fourier'sche Reihe dar und legt diese der weiteren Rechnung in üblicher Weise zu Grunde. Er kommt zu dem Resultat, dafs die gefährlichen

Schwingungen (d. h. solche mit wachsender Amplitude) immer auftreten, wenn die Oscillationsdauer einer Feder gleich der Zeit, welche zum Durchfahren einer Schienenlänge nötig ist oder gleich einem Multiplum derselben wird. Dies hätte man natürlich ohne jede Rechnung voraussehen können. Der Verfasser erkennt deshalb auch an, dafs eigentliche Constructionsregeln, die man beim Locomotivbau einhalten müfste, um den Einflufs der Schienenstöfse möglichst herabzusetzen, sich aus den mathematischen Entwickelungen überhaupt nicht ableiten lassen.

39. *Schiffsschwingungen.* Die Bewegungsvorgänge, welche ein schwimmendes Fahrzeug betreffen, zerfallen in drei Gruppen: 1) die schwankenden Bewegungen des ganzen Schiffskörpers unter dem Einflufs der äufseren Kräfte, 2) die Bewegungen des umgebenden Mediums (stilles oder bereits in wogender Bewegung befindliches Wasser) und 3) die kleinen Schwingungen des mehr oder weniger elastischen Schiffskörpers, welche durch innere und äufsere Kräfte bedingt werden. Die beiden ersten Probleme wären eigentlich von der theoretischen Hydrodynamik zu lösen. Bekanntlich sind aber die Voraussetzungen, welche zur Aufstellung der hydrodynamischen Grundgleichungen geführt haben, einerseits den wirklichen physischen Systembedingungen zu wenig angepafst, andererseits wieder in formaler Beziehung so allgemeiner Natur, dafs ihre Anwendung auf concrete Probleme der nautischen Kinetik bisher keinerlei nennenswerte Erfolge aufzuweisen hat. Trotzdem hat man das Problem des Schiffswiderstandes, der Bewegung des umgebenden Wassers und der Schwankungen des Schiffskörpers wiederholt in Angriff genommen, indem man von Voraussetzungen ausgegangen ist, die für den concreten Fall teilweise Folgerungen aus empirischen Modellversuchen waren, teilweise auch nur durch ihre plausible Form einen gewissen Grad der Berechtigung verdienten. Da derartige theoretische Untersuchungen durch zahlreiche Versuchsresultate und Erfahrungen innerhalb gewisser Grenzen Bestätigung fanden, so kann es nicht befremden, dafs man das Erreichte in Fachkreisen schätzte und den heuristischen Weg für den einzig gangbaren hielt. In diesem Sinne sind die theoretischen Arbeiten von Rankine, Froude und Kriloff zu mancherlei praktisch brauchbaren Resultaten gelangt, die auch das Interesse des Mathematikers und Physikers in hohem Grade verdienen. Wir müssen uns jedoch hier auf die Betrachtung des dritten Problems beschränken, welches mit der Hydraulik in einem loseren Zusammenhange steht, aber eine desto innigere Verknüpfung mit der rationellen Kinetik aufweist. Die Vibrationen des Schiffskörpers werden im allgemeinen erst in belästigender Weise bemerkbar, wenn die Maschinenkraft im Verhältnis zum Deplacement eine sehr grofse wird. Sie kommen also namentlich für schnellfahrende Passagier-

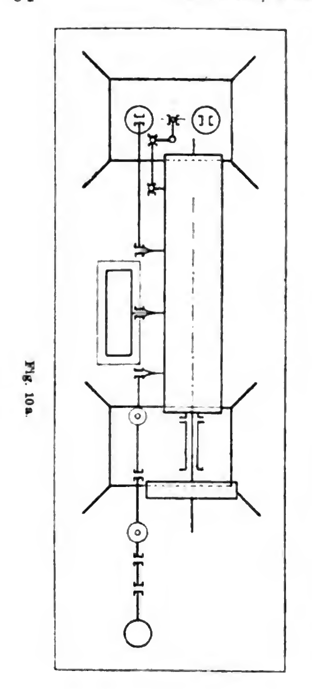
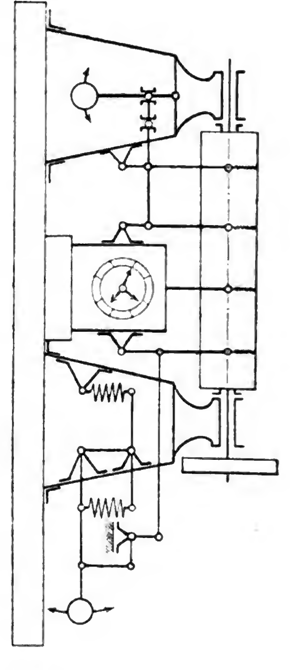
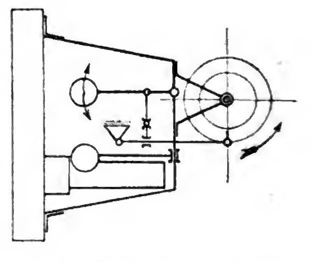


Fig. 10a.





dampfer und Kriegsschiffe in Betracht. Da man über den Complex der dynamischen Ursachen von vornherein keine sicheren Anhaltspunkte hat, welche für eine systematische Behandlung des Problems doch unbedingt erforderlich sind, so mufs die nächste Orientirung auf Grund zuverlässiger Experimentalbestimmungen der Richtung, Amplitude und Periode der thatsächlich stattfindenden Oscillationen geschehen. Zu diesem Zwecke haben Yarrow und Schlick Apparate (Pallographen genannt) in Anwendung gebracht,

deren Wirkungsweise[1]) auf dem Princip der Trägheit beruht. Sie sind im wesentlichen mit den schon lange benutzten Seismographen identisch. Drei schwere Massen (vergl. Fig. 10a) H, T, V sind einzeln gezwungen, etwaige Ausschläge aus der Ruhelage in horizontaler, transversaler oder verticaler Richtung (meistens verwendet man nur zwei Massen) zu machen. Diese Bewegungen werden auf eine gleichförmig rotirende Schreibwalze übertragen. Zur Coordinirung dient ein vierter Schreibstift ZS, welcher die Secunden fortlaufend markirt. Die mit dieser Vorrichtung erhaltenen „Pallogramme" enthalten selbstverständlich auch den Einfluſs mehrfacher Nebenwirkungen, die man aber durch vergleichende Beobachtung wenigstens annähernd nachträglich eliminiren kann. Ist der Apparat an einem bestimmten Orte des Schiffes befestigt und passend orientirt, so wird er im allgemeinen bei Änderung der Wellentouren, der Füllungsverhältnisse oder der Schränkungswinkel der Kurbelwinkel etc. verschieden gestaltete Pallogramme liefern. Da in jedem Falle drei unabhängige Schwingungscomponenten bekannt sind, so sind die betreffenden Vibrationen vollständig bestimmt. In ihnen sind aber die Einzelerscheinungen ganz und gar vermischt. Da der Schiffskörper als elastisches System weder analytisch noch empirisch definirt ist, so kann man nur auf Grund gewisser Hypothesen und zahlreicher, unter den verschiedensten äuſseren Umständen aufgenommenen Pallogramme mit einiger Sicherheit die Anteile der erzwungenen und der freien Schwingungen aus den unmittelbar vorliegenden Resultantschwingungen erkennen. Die theoretischen Hilfsmittel, welche hierbei zur Anwendung kommen, sind so allgemein bekannt, daſs wir hierauf an dieser Stelle nicht weiter einzugehen brauchen. Das Hauptinteresse des Problems liegt überhaupt nicht auf seiten der Phoronomie, sondern in der Schwierigkeit der Erkenntnis der Kräfte, welche die erzwungenen Schwingungen veranlassen. Herr Berling unterscheidet in der oben angeführten Veröffentlichung als Ursachen der transversalen erzwungenen Schwingungen die folgenden:

1) Reactionen der Hauptmaschinen,
2) Impulse des axialen Propellerschubs,
3) Unregelmäſsigkeiten in der Form des Propellers,
4) Reactionen der Teile des Achterschiffes gegen den Wasserstrom.

Die Reactionen der Antriebsmaschinen werden je nach dem Grade der Massenausgleichung verschiedene Beträge haben. Aber selbst wenn die Massenausgleichung eine vollständige ist, so folgt doch daraus noch keineswegs mit Notwendigkeit, daſs diese Reactionen vollkommen verschwinden. Man darf nämlich nicht auſser acht

---

1) Wegen der Theorie kann man Perry's Darstellung in seinen Applied Mechanics, London 1899, S. 590 vergleichen.

lassen, dafs die bisherigen Ausgleichungsmethoden die Starrheit der Glieder des Systems voraussetzen. Da nun die Teile der Maschine thatsächlich elastisch sind und innerhalb gewisser Grenzen kleine Deformationen erfahrungsgemäfs zulassen, so ist es wohl möglich, dafs eine als starres System ausgeglichene Maschine gewisse Reactionswirkungen auf die umgebenden Massen zeigt, indem sie dieselben in erzwungene Schwingungen versetzt. Versuche mit kleinen Modellen können jedenfalls das Gegenteil nicht beweisen.

Nehmen wir aber — ungeachtet dieser offenbleibenden Frage — an, die Maschinen seien in üblicher Weise ausgeglichen, so haben wir es mit einem Motor zu thun, der wie eine rein rotirende Masse unter dem dynamischen Einflufs des treibenden Kraftfeldes und des Propellerwiderstandes steht (man vergl. Nr. 30). Die Behauptung Berling's, die Unregelmäfsigkeiten des Propellerschubs seien nahezu den Unregelmäfsigkeiten des resultirenden Tangentialdruckdiagramms gleich, ist durch die Versuche von G. Bauer und die theoretischen Betrachtungen von Lorenz widerlegt worden. Wenn auch in unmittelbarer Nähe der Maschine beträchtliche Ungleichmäfsigkeiten in der Winkelgeschwindigkeit der Welle von Fränzel beobachtet sind, so war es doch keineswegs überraschend, wenn Messungen in der Nähe des Propellers einen weit gröfseren Gleichförmigkeitsgrad ergeben haben.

Der Propeller steht während der virtuellen Beschleunigungsphase des Motors unter dem dämpfenden Einflufs des Wasserwiderstandes und kann die ihm zukommende Beschleunigung nur zu einem gewissen Bruchteile aufnehmen. Der Rest wird von der elastischen Welle als potentielle Energie vorübergehend absorbirt. Dem ganzen Vorgang entspricht eine kinetische Problemstellung, der sich die folgende einfache Fassung geben läfst: Eine elastische Welle von bekannten Dimensionen und gegebenen Elasticitäts-Constanten wird an dem einen Ende von einem Drehmoment beansprucht, dessen Verlauf für einen vollen Kreisumfang gegeben ist und sich nach jedem Umlauf in gleicher Weise wiederholt. Am anderen Ende wirkt ein widerstehendes Drehmoment, dessen Gröfse dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit dieses Endquerschnittes proportional ist und eventuell noch von einem Parameter, welchen man als die Schlüpfung ansehen kann, in gegebener Weise abhängt. Es soll die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}'$ des unter dem Einflufs der Dämpfung stehenden Endquerschnittes als Function der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ und des Rotationswinkels θ des Querschnittes am anderen Ende unter der Voraussetzung, dafs der ganze kinetische Vorgang die Periode 2π hat, bestimmt werden. Die Lösung dieser Aufgabe hat bei den vorhandenen Hilfsmitteln keine besonderen Schwierigkeiten. Liegt sie fertig vor, so kann das Resultat mit den Beobachtungen

verglichen werden, wobei sich auch entscheiden wird, ob der Propellerwiderstand lediglich von dem Quadrat der effectiven Winkelgeschwindigkeit oder auch zugleich von der Schlüpfung abhängt. Herr Berling hat in letzter Zeit das Widerstandsgesetz $C\omega^2 + C' \frac{d\omega}{dt}$ verfochten und in seiner letzten Mitteilung (Z. 1900 Nr. 15) angeführt, Herr Schiffsbauingenieur Sellentin habe im 6. und 8. Hefte des „Schiffbaus", Centralorgan für Werft und Rhederei, diese Form der Abhängigkeit streng mathematisch bewiesen. Da mir diese Veröffentlichung bisher nicht zugänglich war[1]), so ist eine Beurteilung dieser Frage hier unmöglich.

Der Einflufs der Reactionen des Achterschiffes auf die erzwungenen Schwingungen ist nur durch zahlreiche Messungen, die von bestimmten theoretischen Auffassungen gestützt und geleitet werden, zu ermitteln. Ob es gelingen wird, in diesem Punkte ausreichende Klarheit über die mechanische Natur der Impulse zu erlangen, läfst sich zur Zeit noch gar nicht entscheiden.

Die freien longitudinalen Schwingungen haben nach den bisherigen Beobachtungen (cf. Berling a. a. O. S. 982) eine sehr kleine Periode und Amplitude. Die transversalen Schwingungen zeigen, wie zu erwarten, zwei Knotenpunkte, die von den Perpendikeln um ca. $^1/_4$ Schiffslänge abstehen. Die Axe der Torsionsschwingungen kann nur durch pallographische Messungen festgestellt werden. Gegebenenfalls übertrifft ihre Amplitude diejenige der Transversalschwingungen, namentlich sind sie im Vorderschiff am merklichsten. Es möge noch erwähnt werden, dafs Herr Kleen die freien elastischen Verticalschwingungen (Z. 1893) unter der Voraussetzung, dafs der ganze Schiffskörper als Stab aufgefafst werden kann, theoretisch behandelt hat. Das allgemeine Problem der Schwingungen eines elastischen geraden Stabes unter der Einwirkung beliebiger äufserer Kräfte ist bekanntlich schon von Poisson (Mém. Ac. Paris 1829) mit grofsem Geschick in Angriff genommen worden, und es wäre deshalb in jedem Falle zweckmäfsig, wenn weitergehende theoretische

---

1) Nachträglich ist mir von befreundeter Seite Gelegenheit gegeben worden, diese Arbeit einzusehen. Unter Voraussetzung einer idealen Flüssigkeit findet der Verfasser auf theoretischem Wege, dafs der Widerstand des eingetauchten Körpers von der beschleunigenden Kraft abhängt, wie es seit Dirichlet's Untersuchungen (Berliner Monatsber. 1852) bekannt ist. Da jedoch die Hypothesen, welche den hydrodynamischen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten zu Grunde liegen, in Wirklichkeit, d. h. in ihrer Anwendung auf praktische Probleme der Hydraulik, ihre Dienste erfahrungsgemäfs in den meisten Fällen versagt haben, so liegt zunächst kein triftiger Grund vor, von der Widerstandshypothese $W = Cv^2$ principiell abzugehen. Im Notfalle wird man doch eher Ausdrücke von der Form $Cv^{2+\epsilon}$ oder $Cv^2 + C'v^3$ an Stelle der Newton'schen Formel setzen, als neben v ein zweites kinematisches Argument einführen.

Untersuchungen mit Rücksicht auf die Schiffsschwingungen diese grundlegende Arbeit beachten würden, weil hierdurch Wiederholungen von längst Bekanntem vermieden werden.

Die Polemik, welche sich an die Berling'sche Arbeit angeschlossen hat, können wir hier nicht berühren, da persönlich zugespitzte wissenschaftliche Äufserungen, auch wenn sie in der einen oder anderen Beziehung lehrreich sind, den Tendenzen des vorliegenden Referates fernliegen.

40. *Ball's Stabilitätsuntersuchungen. Kreiselbewegung. Stabilität rasch laufender Wellen und Hängespindeln.* Ball hat der geometrischen Lösung des Problems der kleinen Schwingungen eines starren Körpers, der in einem festen Punkte O gestützt, vor der Störung unter dem Einflufs der Schwerkraft im Gleichgewicht war, eine sehr einfache Form gegeben. Da diese Untersuchungen in der 2. Aufl. von Schell's Theorie der Bewegung und der Kräfte vorzüglich wiedergegeben sind, so können wir uns hier mit der Anführung des Resultats begnügen. „If a plane S be drawn through the point of suspension O, conjugate to the vertical diameter OJ of the momental ellipsoid, then the common conjugate diameters of the two ellipses in which S cuts the momental ellipsoid, and a circular cylinder whose axis is OJ, are the two harmonic axes. If the body be displaced by a small rotation about one of these axes, the body will continue for ever to oscillate to and fro upon this axis, just as if the body had been actually constrained to move about this axis.“ (Theory of screws. Dublin 1876. S. 114.)

Die allgemeinere Aufgabe der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt unter der dauernden Einwirkung äufserer Kräfte hat in dem Werke von F. Klein und A. Sommerfeld „Über die Theorie des Kreisels“ eine monographische Bearbeitung gefunden, die nicht allein die specifisch kinematischen und kinetischen Seiten des Problems beleuchtet, sondern auch die Integrationsmethoden, welche die neuere Entwicklung der Analysis an die Hand giebt, zur Darstellung bringt. Herr Föppl hat auf die Bedeutung solcher theoretischen Untersuchungen für die Anwendungen in der technischen Mechanik bereits wiederholt hingewiesen und in seiner Dynamik (Vorlesungen Bd. IV, 1899) der Verwendung der Kreiseltheorie in der Praxis einen besonderen Abschnitt gewidmet. Er weist namentlich auf die Vorteile hin, welche das Studium verwickelterer Bewegungsvorgänge auf dem Boden der rationellen Mechanik für die Auffassung und schätzungsweise Beurteilung praktischer Probleme hat, wenn die letzteren auch nicht in allen Einzelheiten den theoretischen Beispielen entsprechen. In diesem Sinne entwickelt er eine sehr anschauliche Darstellung der pseudoregulären Kreiselpräcession im Anschlufs an die Klein'schen Untersuchungen

und bringt ferner eine ganze Reihe dynamischer Probleme (Schwungring auf einer Locomotive, Laval'sche Dampfturbine auf einem Schiffe, Bumerang, Seitenablenkung rotirender Geschosse, das Fahrrad, rollende Radaxe in gekrümmtem Geleise), die mit der dynamischen Stabilitätstheorie in mehr oder weniger engem Zusammenhang stehen und zum Teil in den bisherigen Lehrbüchern der Mechanik die ihnen gebührende Beachtung nicht gefunden haben.

Auf die Stabilitätsbetrachtungen der rasch umlaufenden biegsamen Wellen, welche eine Schwungmasse tragen, wollen wir hier etwas näher eingehen, da sie unmittelbar in den Rahmen der technischen Kinetik gehören. Föppl's Lösung dieses Problems geht von der Voraussetzung aus, dafs der Befestigungspunkt A der Schwungmasse (Rad) von der geometrischen Verbindungslinie der Wellenlager eine veränderliche Entfernung AO habe, während gleichzeitig eine constante Excentricität vorhanden ist. Das treibende Kräftepaar ist bestrebt, eine Rotation um eine durch den Schwerpunkt S gehende Axe hervorzurufen. Da aber die Welle als biegsam vorausgesetzt wird, so kommt noch die Biegungskraft zur Wirkung, welche von A nach O gerichtet ist und — der Gröfse nach — dem Biegungspfeil proportional ist. Zerlegt man die Beschleunigung des Punktes S nach zwei zur Verbindungslinie der Wellenzapfen senkrechten Richtungen, und bezeichnet man die Coordinaten von S in Bezug auf O in der entsprechenden Coordinatenebene mit x und y, dann lassen sich die kinetischen Differentialgleichungen in der Form

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + cx + ce\cos\omega t = 0,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + cy + ce\sin\omega t = 0$$

aufstellen. Hierin ist m die Masse des Rades (von der Masse der Welle wird abgesehen), ω die Winkelgeschwindigkeit, $e = SA$ (Excentricität), und c bedeutet eine Constante, welche von den Parametern der Biegung in bekannter Weise abhängt. Die Integrale sind:

$$x = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t + e\frac{\alpha^2}{\omega^2 - \alpha^2}\cos\omega t,$$

$$y = C\sin\alpha t + D\cos\alpha t + e\frac{\alpha^2}{\omega^2 - \alpha^2}\sin\omega t,$$

worin A, B, C, D die Integrationsconstanten bedeuten, die sich aus dem Anfangszustande bestimmen lassen, und $\alpha = \sqrt{c/m}$ gesetzt ist. Für die kritische Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \alpha$ werden x und y unendlich grofs. Für $\omega > \alpha$ ist die Bewegung um so stabiler, je gröfser ω wird, da für $\omega = \infty$ die Bewegung in die rein harmonische übergeht. In der That haben die von Herrn Ingenieur

L. Klein ausgeführten Versuche ergeben, dafs die beobachtete kritische Geschwindigkeit, welche sich durch ausgeprägtes Unruhigwerden des Rotationsmechanismus bemerkbar machen, mit der aus der obigen theoretischen Untersuchung gewonnenen hinreichend übereinstimmen (Föppl, Dynamik pag. 212). Selbstverständlich erreichen die Coordinaten x und y hier nicht unendlich grofse Werte (auch nicht im Sinne virtueller Verschiebungen), da die obigen Gleichungen ihrer Natur nach weiter nichts als consequente Folgerungen idealer Hypothesen sind, die sich dem thatsächlichen Vorgang so weit anschliefsen, als es zur Gewinnung eines mathematischen Bildes desselben erforderlich scheint. Es ist deshalb keineswegs ausgeschlossen, dafs auch ein etwas abweichender Complex von Voraussetzungen zu Folgerungen führen kann, die formal von den obigen mehr oder weniger verschieden sind, aber für die praktische Verificirung zu demselben Ergebnis führen.

Wir gehen nun von dem gleichfalls von Herrn Föppl behandelten Problem der schnell umlaufenden Hängespindeln über. „Unter einer Hängespindel soll ein Stab verstanden werden, der oben an einem Gelenkbolzen drehbar befestigt ist, von da aus herabhängt und am unteren Ende eine Last trägt, die etwa mit Hilfe eines Hakens daran aufgehängt sein mag. Der Gelenkbolzen ist an einer schnell rotirenden Welle befestigt. Er wird von dieser mit herum genommen und dadurch wird auch die Hängespindel samt dem daran aufgehängten Körper (etwa einer Centrifugentrommel) in Umdrehung um die lotrechte Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit erhalten“ (Föppl, Dynamik pag. 228). Da bei der Untersuchung nur kleine Ausschläge des Spindelendes betrachtet werden, so wird der Bewegungsvorgang in einer horizontalen Ebene verfolgt. O sei die Spur der lotrechten Rotationsaxe in dieser Ebene, OE die einseitige Spur einer Ebene, welche durch die Mitte des Gelenkbolzens senkrecht zur Gelenkaxe gelegt ist, S das Spindelende, dessen Coordinaten in der Grundebene durch x, y bezeichnet sind. Infolge der Verbiegung ist S gegen die Spur OE durch die Coordinaten a, b bestimmt. Man hat also nach Einführung des Rotationswinkels θ die Beziehungen $x = a\cos\theta + b\sin\theta$, $y = a\sin\theta - b\cos\theta$. Hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit $t\left(\omega = \frac{d\theta}{dt}\right)$:

$$\dot{x} = \dot{a}\cos\theta + \dot{b}\sin\theta + (-a\sin\theta + b\cos\theta)\,\omega,$$

$$\dot{y} = \dot{a}\sin\theta - \dot{b}\cos\theta + (a\cos\theta + b\sin\theta)\,\omega,$$

also die Energie:

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, \{\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + 2(\dot{a}b - a\dot{b})\,\omega + (a' + b^2)\,\omega^2\}.$$

Die in Betracht kommenden Kräfte sind:

1) das Gewicht mg,
2) die von der Spindel in axialer Richtung übertragene Aufhängekraft,
3) die Biegungskraft, welche gleich cb gesetzt wird.

c ist eine in jedem Falle bestimmbare Constante, wie bei dem vorigen Problem. Die Componenten der beiden ersten Kräfte nach den Axen der a und b sind $-\frac{mg}{l}a$, $-\frac{mg}{l}b$, wenn l die Länge der Spindel bedeutet. Folglich lauten die Bewegungsgleichungen von Lagrange:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} + 2\omega\frac{db}{dt} - \omega^2 a &= -\frac{g}{l}a \\ \frac{d^2b}{dt^2} - 2\omega\frac{da}{dt} - \omega^2 b &= -\frac{g}{l}a - \frac{c}{m}b \end{aligned}\right\}.$$

Durch die Elimination der Coordinate b erhält man die lineare Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\frac{d^4a}{dt^4} + \lambda\frac{d^2a}{dt^2} + \mu a = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$2\omega^2 + 2\frac{g}{l} + \frac{c}{m} = \lambda,$$

$$\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m} - \omega^2\right) = \mu$$

gesetzt wird. Das allgemeine Integral ist also

$$y = \sum_{\nu=1}^{\nu=4} C_\nu e^{\alpha_\nu t}$$

mit der determinirenden Gleichung:

$$\alpha^4 + \lambda\alpha^2 + \mu = 0.$$

Da λ notwendigerweise positiv ist, so hat diese Gleichung mindestens zwei imaginäre Wurzeln. Die Exponentialglieder in dem Integral können nur in harmonische umgesesetzt werden, wenn μ positiv bleibt. Bei kleinen Werten von ω ist aber μ jedenfalls positiv. Bei $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ wird μ negativ und bleibt es bis zu dem Werte

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{c}{m}},$$

wo es von Null wieder nach der positiven Seite geht und ferner keinen weiteren Zeichenwechsel erfährt. ω_1 und ω_2 sind also die kritischen Geschwindigkeiten. Innerhalb dieses Intervalls ist die Bewegung instabil. Ist ω_2 überschritten, so läuft die Spindel ruhig

und gewinnt mit wachsendem ω an Stabilität. Je geringer die Biegungsconstante c gewählt wird, um so früher wird ω_2 erreicht, was für die Praxis von grofser Bedeutung ist (cf. Föppl, Dynamik S. 237).

Wir beschliefsen dieses Capitel über die Stabilität der Bewegung, obwohl die Zahl der technisch wichtigen Probleme noch nicht zu Ende geführt ist. Vielleicht findet sich einmal Gelegenheit zu einer weiteren und eingehenderen Verfolgung dieses Gegenstandes.

G. Kinetik der Schienenfahrzeuge.

Litteratur.

Organ für die Fortschr. des Eisenbahnwesens. Wiesbaden. Erscheint jährlich sechsmal.
Railroad Gazette New York. Erscheint wöchentlich.
American Engineer and Railroad Journal. Erscheint monatlich.
Des Ingenieurs Taschenbuch ‚Hütte'. Abt. II. Berlin. (Die Ausgaben folgen sich in kurzen Zeiträumen Zur Informirung sehr gut.)
Handb. der spec. Eisenbahntechnik. ed. Heusinger v. Waldegg. I. Eisenbahnbau, II. Wagenbau, III. Locomotivbau, IV. Technik des Betriebes, V. Secundärbahnen.
Encyclopädie des ges. Eisenbahnwesens. ed. V. Röll, Wien seit 1890. (Die Artikel sind alphabetisch geordnet. Nur zur allgemeinen Orientirung geeignet.)
G. Meyer. Grundzüge des Eisenbahmaschinenbaues. I. Locomotiven, II. Eisenbahnwagen, III. Weichen etc., IV. Betriebsmittel für Kleinbahnen. Berlin 1883—92.
Flamache, Hubert et Stévart. Traité d'exploitation des chemins de fer. Lüttich seit 1885.
Picard. Traité des chemins de fer. Paris. Seit 1884 erscheinend.

Launhardt. Technische Tracirung. Hannover 1888.
O. Sarrazin und H. Oberbeck. Abstecken der Kreisbögen mit und ohne Übergangscurven. 1893.

Boedecker. Über die Bewegung vierräderiger Eisenbahnfahrzeuge in Curven. Ztschr. f. Bauwesen 1873.
Helmholtz. Bewegung von Eisenbahnfahrz. in Curven. Z. 1887, 1888.
Boedecker. Wirkungen zwischen Rad und Schiene. Z. 1889.
Zimmermann und Goering. Die Seitenkräfte zwischen Rad und Schiene. Z. 1890.
Douglas Galton. The effect of brakes upon railway trains. New York. 1891.
Sinclair. Experiences on train resistance. Engng. 61.
J. R Hardy. Die Ermittelung der Bremszeit und des Bremsweges bei Eisenbahnzügen. Z. öst. Ing. V. 1897.

Emery. On electric traction under steam railway conditions. Railr. Gaz. 1896.
J. Neidt. Graphisches Verfahren zur Bestimmung von Fahrgeschwindigkeiten und Vorschaltwiderständen für elektrisch angetriebene Fahrzeuge. Elektrot. Z. 1899.

R. Abt. Die drei Rigibahnen und das Zahnradsystem. Zürich 1877.
A. Ernst. Die Hebezeuge. 2 Bde. 2. Aufl. Berlin 1899.
F. Niethammer. Motoren und Hilfskräfte für elektrisch betriebene Hebezeuge. Berlin 1897. S. A. aus Z. 1897.

---

41. *Der Schienenweg.* Die Herstellung des Bahnkörpers geschieht nach den Regeln der Tracirungslehre mit Berücksichtigung der für die Betriebssicherheit notwendigen Anforderungen. Geometrisch setzt sich die Geleisaxe aus vier verschiedenen Elementen zusammen. Diese sind:

1) gerade Strecken in horizontaler oder geneigter Lage,
2) horizontal liegende Kreise von verschiedenem Radius,
3) Kreiscylinderspiralen von verschiedener Krümmung und Steigung,
4) Übergangscurven.

Für Hauptbahnen ist eine Überschreitung von 25 ‰ Steigung im allgemeinen nicht zulässig. Zwischen beträchtlicheren Gegensteigungen mufs eine gerade Verbindungsstrecke von höchstens 5 ‰ Neigung und mindestens 500 m Länge eingeschaltet werden. Die Kreiskrümmungen erhalten bei Vollbahnen selten Radien von weniger als 200 m Radius. Wegen der Centrifugalbeschleunigung bleibt jetzt die Geleisebene nicht mehr horizontal, sondern wird um die Geleisaxe gedreht, so dafs die Aufsenseite höher zu liegen kommt. Theoretisch läfst sich diese Überhöhung nicht festlegen, da die Züge dieselbe Strecke mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchfahren müssen. Angenähert erhält man den Neigungswinkel (i) der Geleisebene aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} i = \frac{35}{R}\left(1 - \frac{100}{R}\right),$$

wo R den Radius des Kreisbogens in Metern bedeutet. Jedenfalls vermeidet man es, $i > 5{,}5^0$ zu nehmen, da eine zu geringe Überhöhung lange nicht so nachteilig ist als eine zu starke.

Die Anwendung von Kreiscylinderspiralen wird durch die Natur des Terrains oft verlangt. Ihre ausgeprägteste Verwendung finden sie in Gebirgsbahnen, wie z. B. in den beiderseitigen Zuführungsstrecken zum Gotthardtunnel. Als Krümmungsradius ist in diesem Falle der Radius des Leitcylinders (r_0) zu verstehen, welcher mit dem Krümmungsradius der Curve (r) und dem Torsionsradius (r') durch die bekannten Formeln

$$r = \frac{r_0}{\cos^2\alpha}, \quad r' = \frac{r_0}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

verknüpft ist. Der Winkel der Steigung ist mit α bezeichnet. Zur Verbindung gröfserer geradliniger Strecken, welche einen Winkel mit einander bilden, benutzt man einen Kreisbogen, der von beiden

berührt wird. Ist aber die Krümmung des Verbindungsbogens eine grofse, so entsteht an der Übergangsstelle eine sehr fühlbare Stetigkeitsunterbrechung und der weitere Übelstand, dafs die Drehung der Geleisebene schon in der geraden Strecke beginnen mufs, um beim Eintritt in die Kreislinie im erforderlichen Betrage vorhanden zu sein. Beiden Mifsständen hat man durch Einführung der Übergangscurven abzuhelfen gesucht. Man wählt hierzu cubische Parabeln von der Gleichung $a^2 y = x^3$. Der Halbmesser des Kreisbogens wird um eine kleine Strecke eingezogen, durch deren Mitte die cubische Parabel so zu liegen kommt, dafs man beiderseits gleiche Längen derselben verlegt. Die Länge des Übergangsbogens beträgt in der Regel 30 bis 40 m. Eine ebenso lange gerade Strecke ist auch zwischen Gegenkrümmungen einzuschalten oder man fügt zwei parabolische Übergangscurven mit gemeinsamem geradlinigen Verbindungsstück ein.

In dieser Weise hat man aus vier Curvenelementen die mannigfaltigsten Formen des Schienenwegs zusammengesetzt, statt den rationelleren Weg einer Tracirung in stetig gekrümmter Linie zu wählen, die zwei Stationen A und B verbinden würde. Freilich ist hierzu etwas Rücksicht auf die Geometrie der doppelt gekrümmten Curven zu nehmen, aber diese schon an und für sich belanglose Unbequemlichkeit wird durch mancherlei Vorteile reichlich aufgewogen. Denken wir uns die stetig gekrümmte Geleisaxe auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen und auf die horizontale Ebene (x, y) projicirt, so können wir

$$dx^2 + dy^2 = ds'^2 \quad \text{und} \quad ds^2 = ds'^2 + dz^2$$

setzen, so dafs ds' das Bogenelement der Horizontalprojection der Bahnlinie und ds das eigentliche Bogenelement derselben darstellt. Das Mafs (ε) der Steigung ist offenbar gegeben durch $\varepsilon = \frac{dz}{ds'}$, und der Krümmungsradius (R') der Bahncurve im Grundrifs durch die Gleichung

$$\frac{1}{R'} = \mathfrak{k}' = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds'^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds'^2}\right)^2}.$$

Die Beziehungen

$$\varepsilon = F(s') \text{ und } \mathfrak{k}' = G(s'),$$

wo F und G bestimmte — graphisch oder analytisch gegebene — Functionen bedeuten, liefern uns genügenden Aufschlufs über die Beschaffenheit der Geleisaxe innerhalb eines festgelegten Intervalles. Nimmt man noch die Gleichung $\operatorname{tg} i = f(R')$ hinzu und setzt fest, dafs die Schienenprofile auf der Geleisebene senkrecht stehen sollen, so ist die Schienenbahn für jeden Wert von s' resp. s vollständig bestimmt. Die Krümmung $(\mathfrak{k})$ und Torsion der Geleisaxe lassen sich in einfachster Weise für jeden Ort aufstellen und ergeben sich auch aus

bequemen Näherungsformeln, welche man durch Beachtung der Gröſsenordnung von ε und $\mathfrak{k}'$ erhält. So hat man z. B.

$$\mathfrak{k}^2 = (1 - \varepsilon^2)^2 \mathfrak{k}'^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{d\varepsilon}{ds'}\right)^2$$

und einen fast ebenso einfachen Ausdruck für die Torsion.

Die allgemeine Gestaltung des Schienenweges hängt sehr von den Bedürfnissen ab, welche die betreffende Bahn zu befriedigen hat. Wir haben bisher nur Vollbahnen im Auge gehabt. Wesentlich verschieden liegen die Unterlagen für die Tracirung von Kleinbahnen und insbesondere von Straſsenbahnen in verkehrsreichen Städten. Hier kommen Krümmungsradien bis 15 m vor, Übergangscurven im obigen Sinne und Überhöhungen sind bei Rillenschienen und dem vorgeschriebenen Planum nicht zulässig. Die Steigungen — bei Adhäsionsantrieb — sind oft ganz bedeutende, indem nicht selten 150‰ überwunden werden müssen. Erst der elektrische Betrieb hat diese Schwierigkeiten erfolgreich besiegt.

42. *Die Widerstände der Fahrzeuge.* Betrachten wir nun — unter vorläufigem Ausschluss des Motors und der Bremseinrichtung — das Kräftesystem, welches an einem Eisenbahnwagen bezw. Zuge wirksam ist. Auſser der Schwerkraft ist bei beträchtlicherer Geschwindigkeit der Kopfwiderstand der Luft, sowie die Seitenreibung derselben zu berücksichtigen. Man kann den betreffenden Widerstand in der Form

$$Q \frac{dz}{ds'} + \varkappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

darstellen, worin Q das Gewicht des Fahrzeugs und $\varkappa$ eine Constante bedeutet, die man zweckmäſsig so wählt, daſs auch die Seitenreibung der Luft eingeschlossen ist.

Die eigentliche Reibung des Fahrzeuges setzt sich aus drei Bestandteilen zusammen: 1) der Axreibung, 2) der rollenden Reibung des Radkranzes auf dem Schienenkopf und 3) der Zusatzreibung bei gekrümmter Geleisaxe. Über diese Widerstände liegen zahlreiche Versuche sowie einige theoretische Untersuchungen vor. Die beiden ersten Reibungsbeträge faſst man gewöhnlich zusammen und nimmt ungefähr 1,5‰ der Bruttolast des Wagens an, so lange normale Spurweite und vorzügliche Beschaffenheit der Strecke in Betracht kommt. Bei Straſsenbahnen mit Rillenschienen steigt sie oft auf das 5—6fache. Die Gröſse der Curvenwiderstände wird wesentlich durch den Radstand, den Grad der Beweglichkeit des Untergestells und die Spurerweiterung bedingt. Für Hauptbahnen (Vollspur) benutzt man häufig die empirische Formel (Hütte II. 32):

$$w_r = 21 \frac{4l + l^2}{R - 45},$$

worin l den festen Radstand des Fahrzeuges und R den Radius der Krümmung bedeutet. Für Lenkaxen und Drehgestelle ergeben sich entsprechend geringere Werte. Auf diesen Fall kommen wir bei den theoretischen Überlegungen (Nr. 45) zurück. Besonders ungünstige Reibungsverhältnisse treten bei heftigem andauernden Seitenwind ein, da alsdann — trotz richtiger Geleisüberhöhung in der Curve — eine schrotende Reibung des Spurkranzes an einer Schienenseite beträchtliche Widerstände veranlassen kann. Auch hierüber liegen Erfahrungsthatsachen und rationelle Beobachtungen vor. Ähnliche Wirkungen müssen natürlich eintreten, sobald die Curve mit

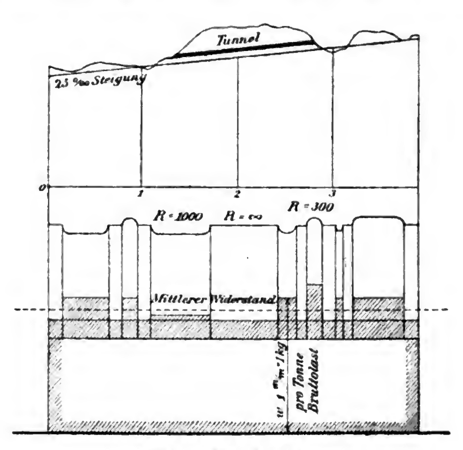


Fig. 11. Zugwiderstand.

Längenmafsstab: 1 m/m = 40 m.
Höhenmafsstab: 1 m/m = 10 m.

Geschwindigkeiten durchfahren wird, welche der Drehung der Geleisebene nicht mehr entsprechen, da alsdann das Schroten des einen Radkranzes sehr erheblichen Widerstand veranlafst.

Der Widerstand der Locomotive mufs besonders berücksichtigt werden. Soweit er von der Geschwindigkeit unabhängig ist, setzt man (Hütte a. a. O.)

$$w_e = 4\sqrt{n}\,{}^0/_{00},$$

wenn n die Anzahl der angetriebenen Axen bedeutet.

Während die Wirkung der Schwerkraft auf den Widerstand des Fahrzeuges bei gerader Strecke ohne weiteres klar ist, wird die

Auffassung derselben in Curven mit gleichzeitigem Gefälle recht schwierig. Ohne auf die Einzelheiten näher einzugehen, will ich nur den Trägheitswiderstand der rotirenden Axen (Föppl Vorl. IV. 194), sowie den Einflufs der Schlingerbewegung des Fahrzeuges hervorheben.

In Fig. 11 ist ein Widerstandsdiagramm eines Zuges in der üblichen Weise dargestellt.

43. *Die Motoren und ihre Kraftfelder.* Nachdem für eine Bahnlinie das Widerstandsdiagramm (Fig. 11) und die Zuggeschwindigkeit festgestellt sind, kann man die erforderlichen Motoren auswählen. Die maximale Leistung derselben ist bei Adhäsionsbetrieb natürlich durch den totalen Reibungswiderstand der Triebräder bedingt.

Den hier in Betracht kommenden Coefficienten der gleitenden Reibung nimmt man innerhalb der Grenzen 0,10 bis 0,15, je nach der Beschaffenheit der Schienen. Bei Zahnradbetrieb darf der Zahndruck einen zulässigen Höchstbetrag nicht überschreiten. Im allgemeinen ist die jeweilige Kraftäufserung des Motors eine Function der Zuggeschwindigkeit. Fig. 12 stellt die Leistung einer Locomotive (N) innerhalb der Fahrgeschwindigkeiten von $V = 10$ bis $V = 100$ km pr. Std. in Pferdekräften dar. Die Zunahme von N ist zwar für wachsendes V stets positiv, $\frac{dN}{dV}$ nimmt aber mit zunehmendem V immer kleinere Werte an. Berechnet man aus dem mitgeteilten Diagramm die effective Zugkraft für die aufeinander folgenden Werte von V, so zeigt sich, dafs dieselbe für gröfsere Geschwindigkeiten beträchtlich abnimmt, während hier der Luftwiderstand rasch anwächst. Der Übersicht wegen ist die Leistung desselben (W) in demselben Coordinatensystem eingetragen. Bei $V = 100$ km/Std. sind hiernach 230 HP von der Zugkraftleistung der Locomotive in Abzug zu bringen. Analoge Verhältnisse zeigt auch das Diagramm eines Gleichstrommotors (Fig. 13). Auch hier nimmt das Drehmoment (Zugkraft) mit wachsender Tourenzahl ab — aber in einem so beschleunigten Verhältnis, dafs ebenfalls die Leistung

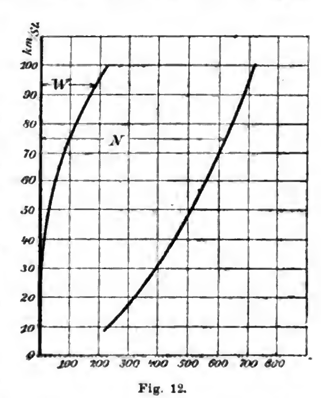


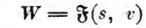
Fig. 12.

N = Leistung einer Locomotive (120 qm Heizfläche).
W = Leistung zur Überwindung des Luftwiderstandes.

bei wachsender Fahrgeschwindigkeit herabgesetzt wird. Der Wirkungsgrad ist ebenso wie bei Locomotiven für eine bestimmte Tourenzahl ein Maximum und wird für extreme Werte beträchtlich geringer. Wir können also für jeden Motor die Zugkraft

$$K = F(v)$$

setzen und annehmen, dafs die Function F analytisch oder graphisch gegeben ist. Der Zugwiderstand läfst sich dementsprechend durch einen Ausdruck von der Form



$$W = \mathfrak{F}(s, v)$$

darstellen, in welchem s die von dem Kopfende des Zuges auf der Geleisaxe durchlaufene Strecke bedeutet. Könnte man die ganze Zugbewegung mit der Bewegung eines materiellen Punktes (m) auf der Geleisaxe identificiren, so würde die Differentialgleichung der Bewegung lauten:

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = F\left(\frac{ds}{dt}\right) - \mathfrak{F}\left(s, \frac{ds}{dt}\right),$$

welche sich auch in die Form

$$m \frac{dv}{ds} = \frac{F(v) - \mathfrak{F}(s, v)}{v}$$

bringen läfst. Durch Integration findet man hieraus v als Function von s, und eine nachfolgende Quadratur liefert

Fig. 13. Diagramm eines Gleichstrommotors. Leistung in Pferdestärken.

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v},$$

also t als Function von s. Derartige Betrachtungen findet man schon bei Euler. Sie lassen sich ohne Schwierigkeit für jeden bestimmten Fall durchführen, geben aber kein zutreffendes Bild von der eigentlichen Zugbewegung, da es hierzu notwendig wird, die Bewegung des ganzen Systems aufzufassen.

44. *Anfahrt und Bremswirkung.* Je gröfser die durchlaufene Strecke ist, desto weniger kommt die Periode der Anfahrt in Betracht. Werden jedoch — wie bei Strafsenbahnen — meist nur Strecken von einigen hundert Metern durchfahren, so ist sowohl die Anfahrt als auch die Bremsstrecke genauer zu berücksichtigen. Dasselbe gilt in erhöhtem Mafse für Personenaufzüge und ähnliche Fördereinrichtungen, sobald erhebliche mittlere Geschwindigkeiten in Betracht kommen.

Beginnt eine Locomotive oder ein elektrischer Motor die Anfahrt, so ist die Kraftwirkung bis zu einem gewissen Werte $v = v_1$ nahezu constant oder schwankt zwischen Grenzen, die man als constant betrachten kann. Ebenso wird man den Widerstand in dieser Periode als unveränderlich ansehen können. Die anfängliche Bewegung erfolgt demnach nach den Gesetzen des freien Falles, indem die Beschleunigungsconstante einen bestimmten Wert (0,3 bis 0,5 m/sek) erhält. Ist nun die Geschwindigkeit v_1 erreicht, so tritt der Motor in die Charakteristik ein, d. h. er äufsert seine Zugkraft nach Mafsgabe seines Diagramms, und die Bewegung des Zuges nähert sich asymptotisch der stationären Periode. In Fig. 14 habe ich unter Zugrundelegung der empirischen Formel für die Zugkraft der Locomotive die Zugbewegung von $v = 3$ m/sek an graphisch dargestellt, indem ich die Werte für K aus Fig. 12 entnommen habe. Hier ist also

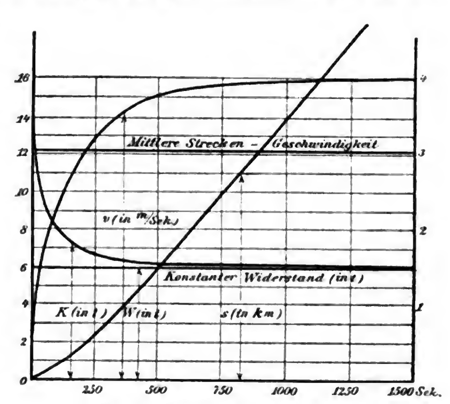


Fig. 14. Diagramm der Zugbewegung.

Verticalscala: { links: m/sek für v; km für s. rechts: t für K und W.

$$m \frac{dv}{ds} = \frac{F(v) - W_0}{v}$$

von $v = v_1$ ab zu integriren. Man erhält zunächst v als Function des Weges s und dann t als Function von s. Der besseren Übersicht wegen sind in dem Diagramm alle Gröfsen als Function der

Zeit dargestellt. Bei $t = 1500$ sec, d. h. nach 25 Min. ist der Beschleunigungsvorgang unmerklich geworden. In Wirklichkeit ist der Geschwindigkeitszuwachs schon vorher so gering geworden, dafs man unbedenklich annehmen kann, die stationäre Periode sei bereits eingetreten. Wäre jedoch der Widerstand als veränderlich angenommen, so kann diese Periode wohl praktisch erreicht werden, geht aber wieder in eine verzögerte Bewegung über u. s. w. In der Bremsperiode ist eine negative Beschleunigung thätig. Da es nun bei der Behandlung kinetischer Probleme auf das Vorzeichen der effectiven Beschleunigung insofern nicht ankommt, als bei entgegengesetztem Zeichen der Charakter der Lösung ungeändert bleibt, so ist die Bremse ebenfalls als ein Motor im mathematischen Sinne zu betrachten. Die gleitende Reibung zwischen Radreifen und Gufseisen resp. Gufsstahl des Bremsbackens ist gröfser als zwischen Radreifen und Schiene. Um die maximale Leistung zu erzielen, ist also das Schleifen des Rades auf der Schiene zu vermeiden. Westinghouse und Douglas Galton haben in dieser Richtung zahlreiche Versuche mit Eisenbahnzügen angestellt und unter bekannten Verhältnissen den günstigsten Bremsdruck dynamometrisch bestimmt. Hierbei wurde besonders die schon vorher[1]) erkannte Thatsache bewahrheitet, dafs der Coefficient der gleitenden Reibung eine gebrochene lineäre Function der Gleitgeschwindigkeit ist und mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt. Galton hat in der oben angeführten Schrift zahlreiche Bremsdiagramme mitgeteilt, die aufserordentlich lehrreich sind. Besonders interessant sind die möglichst beschleunigten Abbremsungen eines schweren Zuges aus voller Fahrt. Hierbei ist gelegentlich der Zug in zwei oder drei Stücke zerrissen worden — ein Beweis für das Auftreten ungewöhnlich hoher Spannungen in den Kupplungen. Chapsal hat sich namentlich um die Erzielung einer raschen Auslösung der Bremsvorrichtung verdient gemacht, indem er elektromagnetische Kräfte zu Hilfe nahm. Neuerdings wurden auch directe magnetische Reibungsbremsen, bei denen die Welle gebremst wird, bei Strafsenbahnen vielfach mit Erfolg angewendet. Da hier der Hebelarm verhältnismäfsig klein ist und infolgedessen relativ gröfsere Bremsdrücke erforderlich sind, so bleibt es fraglich, ob sich dieses System jemals für Eisenbahnzüge eignen wird, obwohl die Radreifen, so lange kein Schleifen eintritt, hierbei vorteilhaft geschont bleiben. Wegen der Heberlein-Bremse verweise ich auf die Darstellung in den oben angeführten Schriften über Eisenbahnbetriebsmittel.

45. *Theoretische Auffassung der Zugbewegung.* Wir wollen bei den nachfolgenden Betrachtungen annehmen, das Geleise sei geo-

1) Rochet, Frottement de glissement. C. R. 46. 1860. Ann. des Mines 19. 1861. Ann. des Ponts et Chauss. [1]. 1861.

metrisch gegeben und — der Allgemeinheit wegen — nicht voraussetzen, es bestehe aus aufeinanderfolgenden geraden Strecken, kreisförmig oder spiralig gekrümmten Curven und Übergangslinien, sondern die Geleisaxe sei stetig doppelt gekrümmt und es sei überall, wo die Krümmung von Null verschieden ist, eine gesetzmäfsig gegebene Drehung der Geleisebene um die Axe vorhanden (Überhöhung). Auf einem solchen Geleise befinde sich ein Zug mit bekannter Axenverteilung und der Kopfgeschwindigkeit v_0 (m/sek.). Ferner seien alle Fahrzeuge mit radial einstellbaren Drehgestellen versehen und in der üblichen Weise gekuppelt. Fig. 15 giebt ein Schema dieser Anordnung im Grundrifs. Der Einfachheit wegen mögen die drehbaren Axen einfach sein, so dafs theoretisch keine Spurerweiterung erforderlich ist. Auch soll zunächst von der Wirkung der Tragfedern ganz abgesehen werden und die Annahme hinzutreten, jeder Wagenkasten (auch der

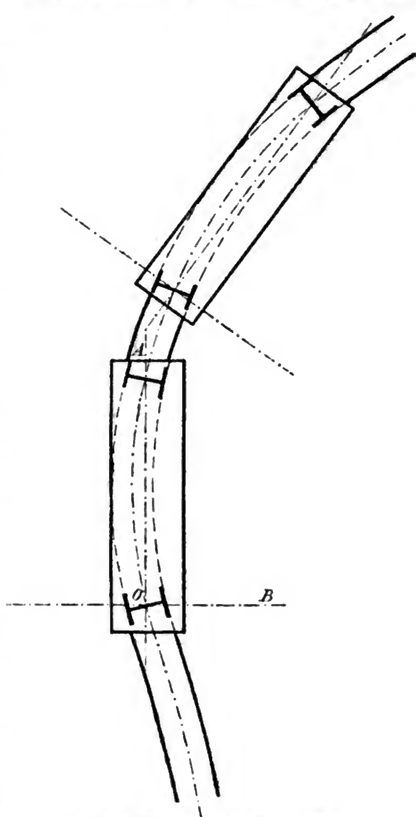


Fig. 15. Zugbewegung im Grundrifs.

Oberbau der Locomotive) sei auf der vorderen Axe in zwei symmetrisch zur Längsaxe liegenden Punkten und durch die hintere Axe über dem Mittelpunkt derselben durch einen Zapfen unterstützt.

Vorn kann die seitliche Verschiebung etwa durch einen Kugelzapfen aufgehoben sein. Diese Dreipunktunterstützung hält den Wagenkasten bei horizontaler Geleislage in einer parallelen horizontalen Ebene. Der ganze Zug wird (wenn wir auch vorläufig von der Federwirkung der Kupplungen, die wir uns etwa durch biegsame aber unausdehnbare und nicht zusammendrückbare Seile ersetzt denken, ganz absehen) als ein Gelenksystem, dessen einzelne Glieder starre Körper sind, in kinematischem Sinne aufgefafst. Unter Berücksichtigung aller Voraussetzungen erkennt man, dafs das so definirte System nur einen Grad der Freiheit besitzt. Es besteht also auch nur eine Differentialgleichung für die Bewegung dieses Systems. Als Coordinate wollen wir die in der Geleisaxe gemessene

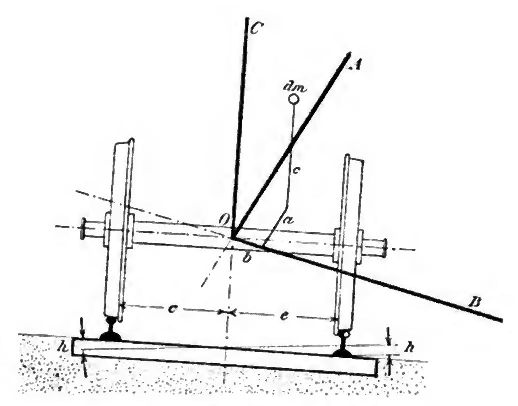


Fig. 16. Coordinatensystem des Wagenoberbaues.

Bogenlänge (s) des Kopfendes des Zuges, von einem beliebigen festen Punkte an gerechnet, wählen. Zur Festlegung aller Punkte des Systems sind für jedes Fahrzeug drei Coordinatensysteme erforderlich, nämlich je eins für die beiden Drehaxen und ein drittes für den Wagenkasten. Das letztere ist in Fig. 16 schematisch angedeutet. Wir denken uns nun für jeden Wagen (mit Rücksicht auf die drei beweglichen Coordinatensysteme desselben) die Energie E_ι als Function von s_ι (der Coordinate der vorderen Axmitte) aufgestellt. Dann wird

$$E_\iota = \tfrac{1}{2} F_\iota(s_\iota) \left(\frac{ds_\iota}{dt}\right)^2.$$

F_i enthält natürlich in seiner expliciten Form die Trägheitsmomente der rollenden Glieder und des Oberbaues sowie die Schwerpunktscoordinaten der Teilsysteme. Nun ist aber wegen der geometrischen Führung des Systems

$$s_1 = f_1(s),\ s_2 = f_2(s),\ \cdots\ s_i = f_i(s).$$

Diese Ausdrücke lassen sich am bequemsten mit Benutzung der Serret'schen Relation zwischen Bogen und Sehne gewinnen, da die Differenzen beider nur in der niedrigsten Gröfsenordnung beizubehalten sind. Die totale kinetische Energie des Systems wird demnach durch einen Ausdruck von der Form

$$E = \tfrac{1}{2} F(s) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

darstellbar. Da man aufserdem das äufsere Kräftesystem kennt, so läfst sich die Bewegungsgleichung aufstellen und graphisch integriren. Nachdem auf diese Weise v und s als Function von v_0 und t bekannt sind, erhält man die Geschwindigkeiten

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{df_1}{ds} \cdot v, \quad \frac{ds_2}{dt} = \frac{df_2}{ds} \cdot v, \quad \cdots \frac{ds_i}{dt} = \frac{df_i}{ds} \cdot v$$

und die Rotationscomponenten der einzelnen Glieder des Systems. Es bleibt jetzt noch die Bestimmung der geometrischen Reactionen (namentlich der Seitendrücke auf die Schienen) und der Kupplungsspannungen als wichtigster Teil der kinetischen Aufgabe übrig. Hierzu reichen aber die bisherigen Hilfsmittel der rationellen Mechanik vollkommen aus, wenn auch die explicite Durchführung der Untersuchung mancherlei Schwierigkeiten und recht beträchtliche Mühe verursacht. Dies mag auch wohl der Hauptgrund sein, weshalb man eine dynamische Lösung der in mehrfacher Hinsicht interessanten Aufgabe bisher nicht versucht hat. Ich habe — durch den Galton'schen Bericht über Bremsversuche veranlafst — vor einigen Jahren die Bewegung und die Spannungsverhältnisse eines Zuges in diesem Sinne unter der Voraussetzung untersucht, dafs der vordere Teil eben in eine Curve mit Steigung einläuft, während sich das Ende noch auf gerader Strecke befindet und in diesem Augenblick so rasch als möglich nach Mafsgabe der Westinghouse-Diagramme gebremst wird. Die graphische Integration der Differentialgleichungen ergab aber eine so ungünstige Beanspruchung der Kupplungen, dafs ich eine Bremsung nach dem bisherigen Verfahren (Beginn der Verzögerung am Kopfende, wenn auch mit sehr rascher Fortpflanzung nach dem Ende zu) unter so ungünstig gewählten Verhältnissen, die doch einmal gegebenenfalls eintreten können, für sehr bedenklich halte. Die Spannungsverhältnisse gestalten sich jedoch weit vorteilhafter, sobald der Bremsprocefs bei sonst gleichen

Bedingungen unter der Annahme erfolgt, dafs zuerst der letzte Wagen und dann in sehr rascher Aufeinanderfolge die vorangehenden bis zur Maschine gehemmt werden.

Eine ausführliche Darstellung derartiger theoretischer Untersuchungen liegt nicht im Plane dieses Referates. Dennoch habe ich die vorstehenden Andeutungen eingeflochten, weil hier ein praktisch wichtiges Problem tangirt wird, dessen rationelle Durchführung sehr geeignet erscheint, eine — wenn auch nur orientirende — Übersicht in Betreff der sehr verwickelten kinetischen und statischen Verhältnisse der Zugbewegung zu erlangen. Ist diese theoretische Einsicht in gewissem Grade erreicht, so bleibt es natürlicherweise Sache der Beobachtung und der Versuche, die Erkenntnis der praktischen Factoren, namentlich der Stabilität der Zugbewegung unter den verschiedenen in Betracht kommenden Bedingungen zu verbessern und weiterzuführen.

H. Reibung und Stofs.

Litteratur.

Coulomb, Mém. de l'acad. Paris 10. 1785.
Morin, Rec. des Savants étrang. 4, 5. Paris 1833—38.
Hirn, Bull Soc. industr. Mulhouse 1855.
Kirchweger, Mitt. des Gewerbever. f. Hannover. 1862.

O. Reynolds, On rolling friction. Phil. Trans. 166. London. 1877.
Thurston, Friction and lubrication. 1880.
Petroff, Neue Theorie der Reibung. 1887.
Masi, Nuove vedute sull' attrito. Bologna 1897. (Berichtet ausführl. über die ältere Litteratur sowie über die neueren Arbeiten von Thurston und Petroff.)

46. *Reibung.* Wir haben schon bei Poncelet der passiven Widerstände gedacht. Hier mögen noch einige Bemerkungen angeschlossen werden, die sich besonders auf die neueren Untersuchungen über Reibung beziehen. Soweit es sich um die Behandlung statischer oder dynamischer Probleme handelt, hat man fast ausnahmelos die Gültigkeit des Coulomb'schen Gesetzes adoptirt. In diesem Sinne sind auch die analytischen Probleme in der bekannten Monographie von Jellett durchgeführt, obwohl hier in der Einleitung auch auf allgemeinere Reibungsgesetze hingewiesen wird. Eine allgemeinere Auffassung in der kinetischen Behandlung der passiven Widerstände findet sich in Painlevé's „Leçons sur le frottement", indem hier von vornherein das Gesetz der Reibungswirkung in keiner Weise specialisirt wird, so dafs die allgemeinen analytischen Betrachtungen noch ihre Gültigkeit behalten, wenn man die Coulomb'sche Formel durch eine neuere ersetzt. Die bekannten Lehrbücher der analytischen

Mechanik nehmen — soweit es mir bekannt ist — auf die neueren Ansichten über die Wirkung der Reibung keine Rücksicht, obwohl Hirn schon im Jahre 1855 ganz bedeutende Fortschritte in der erfahrungsmäfsigen Erkenntnis dieser Erscheinungen gemacht hat. Hirn hat wohl zuerst die Bedeutung der Schmiermittel, welche die Zwischenschicht zwischen Zapfen und Lager bilden, physikalisch richtig erkannt und die quantitative Wirkung der Viscosität derselben festgestellt. Aus seinen Versuchen mit der Reibungswage folgerte er, dafs der Reibungscoefficient bei ausreichender Schmierung der Geschwindigkeit direct und der Quadratwurzel aus dem Zapfendruck umgekehrt proportional ist. Die Abhängigkeit des Viscositätscoefficienten von der Temperatur ist in dieser Arbeit bereits mit Sorgfalt untersucht, so dafs dieselbe als Grundlage der späteren Forschungen auf diesem Gebiete mit vollem Recht angesehen werden kann. Nachdem Poiseuille die Gesetze der inneren Reibung für Flüssigkeiten in capillaren Röhren gestützt auf die Newton'schen Grundanschauungen entwickelt hatte, war das Problem der Zapfenreibung insofern physikalisch geklärt, als nun die vorhandenen allgemeinen Hilfsmittel der theoretischen Physik, die seit Fourier weite Verbreitung gefunden hatten, vollkommen ausreichten, um die erforderlichen theoretischen Formeln aufzustellen. Dies ist in befriedigender Form bekanntlich zuerst von Petroff geschehen, wenn auch einige speciellere Fälle schon früher erledigt waren. O. Reynolds hatte die Theorie der Zapfenreibung insofern theoretisch noch weiter ausgebildet, als er namentlich den Einflufs der excentrischen Schmierschicht in Rechnung gezogen hat. Für unsere vorliegende Darstellung kommen diese — in neuerer Zeit — vielfach commentirten Untersuchungen eigentlich nur in einem bestimmten Sinne in Betracht. Wir haben nämlich hier die naheliegende Frage zu beantworten: Werden die Reibungsprobleme, soweit sie technische Bedeutung haben und der theoretischen Behandlung mit Rücksicht auf die Maschinenbewegung zugänglich sind, durch die neueren Anschauungen und Resultate wesentlich modificirt? Dies ist allerdings der Fall, insofern der Vorgang mit den Ergebnissen Coulomb's und Morin's zum Teil in directem Widerspruch steht. Andererseits darf man nicht aufser acht lassen, dafs die Berücksichtigung der Petroff'schen Formel in der Dynamik der Kurbelmechanismen recht beträchtliche Schwierigkeiten verursacht, sobald es sich um systematische Ansätze der zusammenhängenden Probleme handelt. Die Durchführung wird aber keineswegs unmöglich, wenn man sich nur einmal dazu entschlossen hat, die Integrationsfurcht beim Anblick der kinetischen Differentialgleichungen gänzlich abzulegen und statt dessen auf Mittel zu sinnen, welche die explicite Lösung des Problems gestatten (cf. Nr. 49 und 50).

Die trockene gleitende Reibung zwischen zwei Flächen sucht

man in der Technik möglichst zu vermeiden. Kommen erhebliche Pressungen hinzu, so beginnt ein Rosionsvorgang, welcher mit beträchtlicher Wärmeentwicklung verbunden ist. Derartige Processe lassen sich überhaupt nicht durch allgemeine Gesetze festlegen und gehören deshalb auch nicht in das Gebiet der mechanischen Untersuchung. Solange man keine weiteren Unterlagen zu ihrer quantitativen Schätzung besitzt, kann man sich innerhalb gewisser Grenzen auf die Coulomb'schen Annahmen stützen, da sie die einfachsten sind.

47. *Anwendungen der Stofsgesetze.* Erhält irgend eine Masse innerhalb eines sehr kleinen Zeitintervalls eine beträchtliche Geschwindigkeitsvermehrung, so wird der kinetische Vorgang nach allgemeinem Sprachgebrauch als Stofs bezeichnet. Newton hat die theoretische Behandlung der Stofsprocesse für Kugeln zu einem gewissen Abschlufs gebracht. Für ganz beliebige Begrenzungen und beliebige beschränkende Bewegungsbedingungen sind dieselben von Poinsot formal erweitert und schon vorher durch Poisson und Poncelet in specielleren Fällen in der technischen Mechanik verwertet worden. Hierbei hat man immer zwei ideale Vorgänge als extreme Grenzen der Wirklichkeit in den Vordergrund gestellt: den Stofs vollkommen unelastischer Körper und den Stofs bei vollständiger Erhaltung der kinetischen Gesamtenergie. Von Newton wurde allerdings schon der Versuch gemacht, das Verhalten der wirklichen Substanzen als Zwischenform durch Einführung eines Restitutionscoefficienten theoretisch darzustellen, aber seine Versuche zur Bestimmung dieser Gröfse sind durchaus nicht einwurfsfrei und jedenfalls den heutigen Anforderungen keineswegs genügend. Im Hinblick auf die aufserordentlich zahlreichen und umfassenden Versuche über Reibung ist es nicht erklärlich, weshalb man diesem theoretisch und praktisch in gleichem Mafse interessanten und wichtigen Nachbargebiete so auffallend geringe Versuchsthätigkeit hat zu teil werden lassen. St. Vénant hat zwar den elastischen Stofs stabförmiger Körper eingehender behandelt, aber es fehlt noch immer an systematischen Versuchen zur Bestimmung des Verhaltens der wichtigsten technischen Materialien beim plötzlichen Aufeinandertreffen. Sogar die neue Auflage der „Hütte“ weifs an der betreffenden Stelle dem Techniker keine neueren Daten als die Newton'schen für Glas, Elfenbein, Stahl und Kork mitzuteilen. Auch in den neueren systematischen Darstellungen der rationellen Mechanik tritt die Bedeutung einer entwickelteren Stofstheorie immer mehr in den Hintergrund, indem man sich auf die stereotype Reproduction der Elementargesetze beschränkt. Die gründlichste Darstellung giebt Poncelet, wie wir schon in Nr. 13 gezeigt haben. Zur Vervollständigung des dort Gesagten möge deshalb noch eine kurze Übersicht seiner

Untersuchung über Hammerwirkung hier Platz finden, die für den Techniker stets ein classisches Beispiel einer theoretischen Durchführung auf diesem Gebiete bleiben wird. In Fig. 17 ist ein Schwanzhammer in der Auflage und der Anhublage skizzirt. Die Wirkung des Hebedaumens zerfällt in drei Perioden. In der ersten Periode erfolgt die gegenseitige Zusammenpressung des Hebedaumens und des Helms (Ring). Die zweite Periode beginnt mit Beendigung des ersten Stofses und dauert bis zu dem Augenblicke, wo der

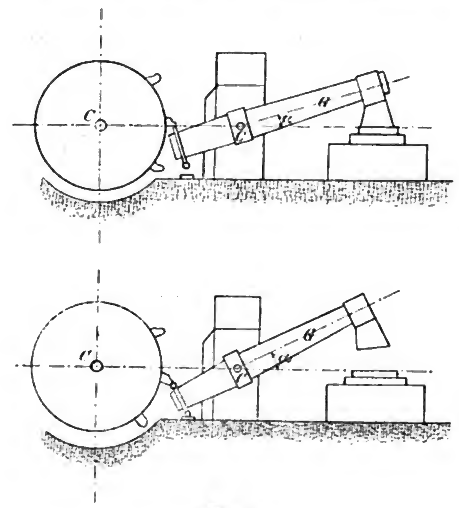


Fig. 17.

Daumen den Helm verläfst. Hier schliefst sich die dritte Periode an, welche in dem Moment, wo der folgende Hebedaumen den Helm berührt, endet. Es sei nun

N der Druck des Hebedaumens auf den Helm,

ω, ω' die Winkelgeschwindigkeiten der Daumenwelle und des Hammers,

R, R' die Entfernungen der Berührungsstelle von den Drehpunkten C und C',

f' das Verhältnis der Reibung zu dem Zapfendruck des Hammers,

ϱ' der Halbmesser der Zapfen und r' der Abstand eines Massenelementes dm' des Hammers von der Drehaxe.

Dann setzt Poncelet das Trägheitsmoment

$$\int r'^2 dm' = M'R'^2.$$

Um den Zapfendruck zu bestimmen, legt er durch C' zwei rechtwinklige Axen, so dafs dm die Coordinaten x', y' erhält. Bezeichnet man ferner mit x^*, y^* die Coordinaten des Schwerpunktes G des Hammers, mit l dessen Entfernung von der Drehaxe, mit θ den Höhenwinkel von $C'G$ und mit m' die Masse des Hammers, so wird

$$\frac{d\omega'}{dt}\int x'dm' = \frac{d\omega'}{dt}\cdot m'x^*, \qquad \frac{d\omega'}{dt}\int y'dm' = \frac{d\omega'}{dt}\cdot m'y^*$$

und die Resultante aller Trägheitskräfte $= m'l\frac{d\omega'}{dt}\cdot$ Der Zapfendruck wird also:

$$D = \sqrt{\left(N + \frac{d\omega'}{dt}m'l\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{d\omega'}{dt}m'l\sin\theta\right)^2}.$$

Da man wegen der Kleinheit des Winkels θ mit Sicherheit weifs, dafs das erste Glied im Radicanden gröfser ist als das zweite, so giebt die Poncelet'sche Methode der Linearapproximationen (cf. Nr. 50) den angenäherten Ausdruck:

$$D = 0{,}96\,(N + \dot{\omega}'m'l\cos\theta) + 0{,}4\,\dot{\omega}'m'l\sin\theta.$$

Für $\theta = 0$ wird:

$$D = N + \dot{\omega}'m'l.$$

In jedem Augenblick der Stofsperiode besteht also die Gleichung

$$NR' = M'R'^2\dot{\omega}' + f'\varrho'\{N + \dot{\omega}'m'l\},$$

und hieraus folgt

$$N = \frac{M'R'^2 + f'\varrho'm'l}{R' - f'\varrho'}.$$

Andererseits müssen die Trägheitskräfte der Daumenwelle den Druckkräften des Hebedaumens und der entsprechenden Reibung das Gleichgewicht halten. Es besteht also die weitere Beziehung:

$$\dot{\omega}\cdot MR^2 = N(R + f\varrho),$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$\frac{1 + \frac{f\varrho}{R}}{1 - \frac{f'\varrho'}{R'}}\left(1 + \frac{f'\varrho'm'l}{M'R'^2}\right) = \varkappa$$

setzt, die Beziehung zwischen den Winkelbeschleunigungen:

$$MR^2\cdot\dot{\omega} = \varkappa M'RR'\cdot\dot{\omega}'.$$

Hieraus folgt durch Integration von $\omega' = 0$ bis $\omega' = \omega \frac{R}{R'}$:

$$(\Omega - \omega) M R^2 = \varkappa M' R^2 \omega,$$

worin Ω die maximale Winkelgeschwindigkeit der Daumenwelle bezeichnet. Mithin ist

$$\omega = \frac{M}{M + \varkappa M'} \Omega.$$

Poncelet setzt nun die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Daumenwelle

$$\Omega' = \frac{\Omega + \omega}{2},$$

woraus sich ergiebt:

$$\Omega = \frac{M + \varkappa M'}{M + \frac{1}{2} \varkappa M'} \Omega' \quad \text{und} \quad \omega = \frac{M}{M + \frac{1}{2} \varkappa M'} \Omega'.$$

Der durch den Stofs bewirkte Verlust an kinetischer Energie ist folglich

$$V_1 = M R^2 \Omega^2 - (M + M') R^2 \omega^2 = M R^2 \frac{(2\varkappa - 1) M M' + \varkappa^2 M'^2}{(M + \varkappa M')^2} \Omega^2$$

oder

$$V_1 = 4 M' R^2 \frac{2\varkappa - 1 + \varkappa^2 \frac{M'}{M}}{\left(2 + \varkappa \frac{M'}{M}\right)^2} \Omega'^2,$$

also im wesentlichen von dem Verhältnis $M' : M$ abhängig, da $\varkappa$ in der Praxis meist nur wenig gröfser als 1 ist. Durch Einführung des Wertes für Ω' erhält man

$$V_1 = M' R'^2 \left(2\varkappa - 1 + \varkappa^2 \frac{M'}{M}\right) \omega'^2.$$

Die Daumenwelle consumirt bei jedem Stofs den Arbeitsbetrag

$$(\Omega^2 - \omega^2) M R^2$$

oder, da Ω und ω als Functionen von Ω' bekannt sind, das Arbeitsquantum

$$2 A_1 = 4 \varkappa \frac{M M' R^2}{2 M + \varkappa M'} \Omega'^2.$$

Poncelet stellt nun für die zweite Periode die Gleichgewichtsgleichung zwischen der von dem Hebedaumen ausgeübten Kraft und den Widerständen auf. Bezeichnet man nämlich mit S die Normalkraft, welche der Hebedaumen auf den Helm ausüben mufs, um alle Widerstände zu überwinden, mit α die Erhebung des Hammers und mit Q das Gesamtgewicht desselben, so besteht in Bezug auf die Axe C' die reducirte Gleichgewichtsgleichung:

$$R' S = Q l \cos(\theta + \alpha) + f' \varrho' \{0{,}96 (Q + S \cos\alpha) + 0{,}4 S \sin\alpha\} \cdot$$

Durch Integration von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha'$ folgt nach einigen Reductionen für die während des Hubes hervorgebrachte Arbeitsquantität

$$S'R'\alpha' = \frac{Qh + 0{,}96 f'\varrho' Q\alpha'}{R'\alpha' - f'\varrho'\{0{,}96 \sin\alpha' + 0{,}4(1 - \cos\alpha')\}} R'\alpha',$$

da für die Hubhöhe die Beziehung

$$h = l\{\sin(\theta + \alpha) - \sin\alpha\}$$

besteht. S' ist der mittlere Wert von S.

Für Aufwerf- und Stirnhämmer erhält man einen ganz analogen Ausdruck. Es bezeichne nun P die in der Entfernung R_1 von der Rotationsaxe auszuübende Kraft und N_1 das Gesamtgewicht der Daumenwelle. Dann ist, wenn φ die Amplitude der Drehung bedeutet, der Zapfendruck der Hammerwelle angenähert $N_1 + P - S'$ und

$$\int PR_1\,d\varphi = \int S'R_1\,d\varphi + \tfrac{1}{2} f \int S'(R + R')R'\alpha'\,d\varphi$$
$$+ f\varrho \int (N_1 + P' - S')\,d\varphi.$$

Hieraus folgt der Mittelwert P' der veränderlichen Grösse P durch Ausführung der Integration zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{R'}{R}\alpha'$:

$$P' = \frac{\{1 + \frac{1}{2} f(R + R')\alpha'\}S' + f\varrho(N_1 - S')}{R_1 - f\varrho}.$$

Die Gesamtarbeit während des Hubes ist dann:

$$A_2 = P'R_1 \frac{R'}{R}\alpha'.$$

Ohne jede Schwierigkeit erhält man die Arbeit während der dritten Periode für einen Hub, nämlich

$$A_3 = \frac{R_1}{R}\left(\frac{2\pi R}{n} - R'\alpha'\right)\frac{f\varrho M_1}{R_1 - f\varrho},$$

wo n die Anzahl der Hebedaumen bedeutet.

Das totale Arbeitsquantum, welches einem Hube entspricht, ist also

$$A_1 + A_2 + A_3,$$

woraus sich dann leicht der Nutzeffect des Hammers bestimmen läfst. In der Regel besitzt der Hammerstiel einen hohen Grad von Elasticität, so dafs es auch wünschenswert ist, die Modificationen, welche durch die Durchbiegungen hervorgebracht werden, kennen zu lernen. Dies ist von Poncelet nicht geschehen, da er das System als ein unelastisches ansieht. Aber bei der heutigen Entwickelung der Mechanik nicht starrer Systeme bietet diese Erweiterung keine principiellen Schwierigkeiten und könnte, sobald es gefordert wird,

recht wohl durchgeführt werden. Zugleich möge noch die Bemerkung Platz finden, dafs in neuester Zeit ausgedehntere Versuche über den Wirkungsgrad der Hämmer angestellt wurden, welche zu einem Vergleich mit den theoretischen Resultaten auffordern.

J. Graphische und analytische Hilfsmittel.

48. *Geometrische Darstellungen.* Die Kräfte, deren Gleichgewicht und Reduction in der Statik untersucht wird, sind im allgemeinen räumliche Vectoren. Die ganze Aufgabe dieses Teils der Mechanik fällt also naturgemäfs in das Gebiet der Geometrie und findet auch hier ihre elementarsten und anschaulichsten Lösungsmittel. Dieser elementargeometrische Charakter der Statik ist aber im wesentlichen an gewisse einfache Voraussetzungen über die in Betracht kommenden Systeme geknüpft. Die Behandlung des starren Körpers, der Fachwerke, des zwangsläufigen Gelenksystems und der Kettenlinie sind die wichtigsten Beispiele für die Anwendung geometrischer Methoden. Die allgemeinen elastischen Systeme verlangen schon Hilfsmittel, die wenigstens formal der Theorie der partiellen Differentialgleichungen — also einem analytischen Gebiet der Mathematik — angehören. Aber auch hier sind die einzelnen Fälle oft so einfacher Natur, dafs man — soweit es sich um praktische Probleme handelt — mit den üblichen graphischen Methoden aufserordentlich viel erreicht hat. Weniger erfolgreich sind die Bemühungen gewesen, welche eine Übertragung dieser, namentlich in technischen Kreisen sehr verbreiteten Hilfsmittel auf verwickeltere Fragen der Kinematik bezweckten. So lange es sich um ebene Systembewegungen handelte, gelang die Erweiterung der graphischen Methoden ohne jede nennenswerte Schwierigkeit, aber die räumlichen Probleme liefsen sich nur ausnahmsweise auf diesem Wege so lösen, dafs die geometrische Durchführung vor der analytischen den Vorzug der gröfseren Einfachheit behielt. Der Grund dieser Erscheinung ist ein sehr naheliegender. Unser constructives Vorstellen und Denken erfolgt im Raume mit drei Dimensionen ebenso consequent und anschaulich als in der Ebene, aber sobald wir die Lösungsmethode explicirt auf das Papier bringen müssen, um Mafse und Verhältnisse aus dem fertigen Resultat herausgreifen zu können, wird ein Hilfsmittel — die Projection — notwendig, dessen geschickte Handhabung sehr umfangreiche Übung und Erfahrung verlangt. Das Anklammern an stereotype Methoden führt bei räumlichen kinematischen Problemen nur zu oft auf unbrauchbare Lösungen — ein wirklicher Erfolg ist nur durch umsichtige, allen Eigentümlichkeiten der Aufgabe Rechnung tragende Anwendung der Projectionsverfahren aussichtsvoll. Wie ergiebig und wertvoll aber die allgemeine Abbildungsgeometrie in der Hand des geübten Mathematikers werden

könne, zeigen die Bestrebungen von Ch. A. Vogler, Lalanne, Collignon, Lallemand und D' Ocagne, Functionen von zwei und mehr unabhängigen Argumenten in der Ebene graphisch darzustellen. Bisher sind diese Methoden — soweit die Mechanik in Betracht kommt — vorwiegend bei Problemen der Festigkeitslehre zur Verwertung gekommen, sie bieten jedoch auch gleichzeitig ein sehr bequemes Hilfsmittel zur Durchführung verwickelter Aufgaben der Kinematik.

Wie steht es nun mit der graphischen Behandlung dynamischer Probleme? Man könnte glauben, in Proell's „Versuch einer graphischen Dynamik" die Grundmittel zu finden, welche es ermöglichen, allgemeinere kinetische Probleme mit Hilfe der Geometrie zu lösen. Diese an und für sich schätzenswerte Monographie enthält jedoch nicht ein einziges Problem der Dynamik in dem bei Mathematikern üblichen Sinne des Wortes. Der Verfasser hat sich vielmehr durchgehends auf die Kinematik beschränkt, wenigstens habe ich nach wiederholtem Studium seines Buches nichts anderes darin entdecken können. Eine graphische Dynamik hat ihre allgemeine Aufgabe etwa so zu formuliren: Ein materielles System ist seiner Art und Gestalt nach so weit definirt, dafs der Complex der möglichen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aus diesen Bestimmungen eindeutig folgt. Die geometrische Configuration desselben und sein Geschwindigkeitszustand sind zur Zeit $t = t_0$ vollständig gegeben. Welches ist seine Configuration, sein Geschwindigkeitszustand und das System der inneren Spannungen zur Zeit $t = t_1$, wenn dasselbe in dem Zeitintervall $t_1 - t_0$ der Einwirkung eines bestimmten äufseren Kräftesystems, welchem definirbare passive Widerstände entgegenstehen, unterworfen ist? Es ist hier ganz und gar belanglos, ob das materielle System ein starres oder ein deformirbares, ob es zwangsläufig ist oder mehrere bezw. unendlich viele Freiheitsgrade besitzt. Es ist ferner gleichgültig, ob das äufsere Kräftesystem conservativ oder nicht conservativ ist, ob es analytisch oder nur graphisch definirt ist. Von entscheidender Wichtigkeit ist es vielmehr, dafs in der That jedes wirklich gegebene kinetische Problem, sobald es überhaupt exact formulirt ist, mit passenden graphischen Hilfsmitteln explicit, d. h. in einer Form, welche allen praktischen Anforderungen genügt, lösbar ist. Selbstverständlich wird es in vielen Fällen bei kinetischen Fragen der Technik unmöglich sein, den vollständigen Complex der Daten zu fassen, worauf ich in der vorliegenden Darstellung schon wiederholt hingedeutet habe. Es kommt hier nur darauf an, zu zeigen, dafs unter den gemachten Annahmen die Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt und dem praktischen Zwecke entsprechend integrirt werden können. Das erste Ziel erreicht man in schwierigeren Fällen meist am sichersten — wenn auch nicht immer auf dem kürzesten Wege

— durch Benutzung des verallgemeinerten Hamilton'schen Princips, weil alsdann auch die veränderlichen Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden sich der exacten Einkleidung in die Form der Differentialgleichungen fügen müssen. Sind diese gewonnen, so hat man entweder ein System simultaner Differentialgleichungen zu integriren, deren einzige unabhängige Veränderliche die Zeit t ist, oder es liegt — im allgemeineren Falle — ein System von partiellen Differentialgleichungen vor. Bleiben wir zunächst bei der einfacheren Annahme stehen. Die Bewegungsgleichungen lassen sich dann immer auf die Form bringen:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n, t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \cdots x_n, t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \cdots x_n, t).$$

Die Gröfsen x sind zum Teil Coordinaten, zum Teil Geschwindigkeitscomponenten. Zum Ausgangspunkt der Integration nehme man die gegebenen Initialwerte x_1^0, x_2^0, $\cdots$ x_n^0 und trage dieselben (Fig. 18) für die gemeinsame Abscisse $t = t_0$ als Ordinaten auf. In der Gleichung

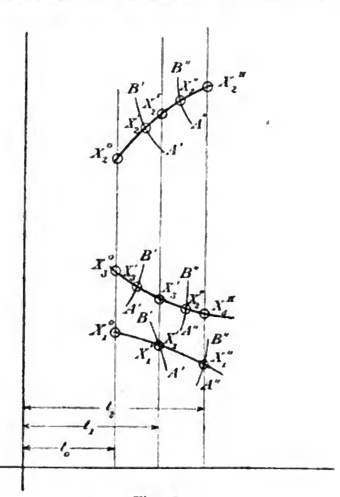


Fig. 18.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2^0, \cdots x_n^0, t)$$

denke man sich $\dot{x}_1$ constant und nur die Gröfsen x_1, t als variabel. Dieselbe stellt dann eine Curve dar und für $\dot{x}_1 = \dot{x}_1', = \dot{x}_1'', = \cdots$ eine Curvenschar. Ganz dasselbe gilt für die übrigen Gleichungen. Man wähle nun eine Wertreihe $\dot{x}_1'$, $\dot{x}_2'$, $\cdots$ $\dot{x}_n'$ so aus, dafs dieselben von $\dot{x}_1^0$, $\dot{x}_2^0$, $\cdots$ $\dot{x}_n^0$ wenig abweichen und in der Nachbarschaft der Initialpunkte x_1^0, x_2^0, $\cdots$ x_n^0 kleine Curvenstücke $A'B'$ ergeben, die alle auf derselben Seite der zu $t = t_0$ gehörigen Ordinate liegen. Diese Curvenstücke ergeben sich also aus den Gleichungen

$$\dot{x}_1' = f_1(x_1, x_2^0, \cdots x_n^0, t),$$

$$\dot{x}_2' = f_2(x_1^0, x_2, \cdots x_n^0, t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_n' = f_n(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n, t)$$

und sind hiernach leicht construirbar. Bei einiger Übung kommt man mit zwei passend liegenden Punkten aus. Jetzt betrachtet man die arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(\dot{x}_1^0 + \dot{x}_1')$, $\frac{1}{2}(\dot{x}_2^0 + \dot{x}_2')$, $\cdots$ als die Tangenten der Trajectorien der Curvenscharen und gewinnt die Punkte x_1', x_2', $\cdots x_n'$. Durch den äufsersten Punkt, etwa x_1' in Fig. 18, zieht man eine Ordinate, welche die übrigen verlängerten Curvenstücke in den Punkten x_2^{I}, x_3^{I}, $\cdots x_n^{\mathrm{I}}$ trifft. Alle die so erhaltenen Werte gehören zu dem Argumente $t = t_1$. Nun betrachtet man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1'' &= f_1(x_1,\ x_2^{\mathrm{I}},\ x_3^{\mathrm{I}},\ \cdots x_n^{\mathrm{I}},\ t), \\ \dot{x}_2'' &= f_2(x_1^{\mathrm{I}},\ x_2,\ x_3^{\mathrm{I}},\ \cdots x_n^{\mathrm{I}},\ t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n'' &= f_n(x_1^{\mathrm{I}},\ x_2^{\mathrm{I}},\ x_3^{\mathrm{I}},\ \cdots x_n,\ t) \end{aligned}$$

für passend gewählte Werte von $\dot{x}_1''$, $\dot{x}_2''$, $\cdots \dot{x}_n''$ und fährt in der bisherigen Weise weiter fort, wodurch man die Punkte x_1'', x_2'', $\cdots x_n''$ der Integralcurven gewinnt. Dieses graphische Fortsetzungsverfahren ist äufserst primitiv, liefert aber dennoch bei seiner Anwendung auf kinetische Probleme der Technik, wie ich mich durch Ausführung von Beispielen überzeugt habe, in Anbetracht der meist innerhalb weiter Grenzen unsicheren Daten, recht befriedigende Resultate. Zudem werden wir gleich analytische Approximationsmethoden zur Integration der Differentialgleichungen anführen, die einen beliebigen Grad der Genauigkeit gestatten, also gegebenenfalls in naheliegender geometrischer Umbildung an die Stelle des obigen graphischen Verfahrens treten können.

Die partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung veränderlicher Systeme lassen sich immer durch einen Grenzübergang aus einem System simultaner Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen gewinnen. Bei Euler, Lagrange und Fourier finden wir in der That einige sehr lehrreiche Darstellungen dieses Processes. Diese Anschauung gründet sich eigentlich auf eine tiefere Erfassung der Grundprincipien der Bewegungslehre und hätte, wegen ihrer Wichtigkeit, wohl verdient, in den Lehrbüchern der Mechanik eingehend behandelt zu werden. Schon der Versuch, die Gültigkeit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für gesetzmäfsig veränderliche Systeme zu erweisen, mufste auf Betrachtungen dieser Art führen. Nachdem dieses Princip für starre Systeme erwiesen und das System der möglichen Geschwindigkeiten als eine Superposition von Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten erkannt ist, betrachtet man bekanntlich die Deformationen des Elementartrieders und stellt im allgemeinen Falle ein ganz analoges Verschiebungssystem auf. Man erweitert die Grundvorstellungen, indem man sie auf alle Elemente des deformirbaren materiellen Systems überträgt, und erhält so die Gewifsheit von der allgemeinen Gültigkeit des Lagrange-

schen Princips. Unter diesem Gesichtspunkt sind nun auch die partiellen Differentialgleichungen der Bewegung zu betrachten und graphisch zu integriren. Natürlich kommen zunächst nur die elementarsten Fälle in Betracht, da das Aufsuchen künstlicher Schwierigkeiten, d. h. solcher, die ein specifisch mathematisches Interesse besitzen, überhaupt nicht mit den Zielen der technischen Mechanik vereinbar ist.

49. *Analytische Hilfsmittel.* Die Interpolationsmethoden spielen in der astronomischen Mechanik eine wichtige Rolle und haben auch von dieser Seite aus eine weitgehende Ausbildung erfahren. Bei technischen Problemen kommen sie weniger in Betracht, da die Bevorzugung der graphischen Darstellungen das analytische Interpoliren meistens unnötig macht. Dagegen ist hier sehr oft Gelegenheit zur Anwendung der Quadraturmethoden, welche man früher mit der Interpolationsrechnung in eine organische Verbindung gebracht hat, während man neuerdings ihre algebraische Grundlage als die naturgemäfsere mehr in den Vordergrund stellt. Die Quadraturmethoden mit äquidistanten Argumentintervallen sind von Cotesius in voller Allgemeinheit entwickelt und enthalten die fälschlich nach Simpson benannte viel gebrauchte Formel als besonderen Fall. Poncelet's Modification ist wesentlich geometrischer Natur. Eine grundsätzliche Umgestaltung wurde durch die Gaufs'schen Quadraturprincipien herbeigeführt, die eine Verminderung der Ordinatenzahl um etwa die Hälfte bei gleicher Genauigkeit zulassen. Zu den Anwendungen auf technische Probleme haben sie keinen Eingang gefunden, weil die Coefficienten der Ordinaten meist unbequeme Zahlen sind. Ihre eigentliche Bedeutung wird weiter unten erörtert werden. Von diesem Übelstande sind die Quadraturformeln von Tchebycheff frei. Sie werden deshalb von Schiffsarchitekten häufiger benutzt. In Wirklichkeit sind diese Formeln unmittelbare Folgerungen des Gaufs'schen Quadraturansatzes und verlangen deshalb keine besondere Theorie.

Die neuerdings allgemeinere Verbreitung findende Vectoranalysis gehört ebenfalls zu den hier kurz zu erörternden analytischen Hilfsmitteln der Mechanik. Ihre Bedeutung ist aber eine rein formale, indem sie nicht eigentliche Lösungsmethoden liefert. Die Quaternionen der Engländer kann man in der Mechanik wohl ganz vermeiden, da sie nur zur Darstellung endlicher Rotationen in geschlossener Form erforderlich sind. Diese gehören aber ins Gebiet der Geometrie. Die Mechanik hat nur Rotationen von unendlich kleiner Amplitude als Elemente der wirklichen Bewegung eines starren Systems darzustellen, und hierzu reicht der Begriff des „äufseren" Productes zweier Vectoren vollkommen aus. Das „innere" Product stellt dann den Arbeitsbegriff in übersichtlicher Form vor, und die ganze Vectoranalysis reducirt sich auf diese beiden Algorithmen und die Grundvorstellung der Streckenaddition. In diesem Sinne hat Herr Lüroth

einen „Grundrifs der Mechanik" (1881) veröffentlicht, wodurch jedem Techniker ein knappes und doch sehr inhaltsreiches Hilfsbuch der allgemeinen mechanischen Principien geboten ist. In ähnlicher Beschränkung hat auch Herr Föppl in seinen Vorlesungen der technischen Mechanik von der Vectoranalysis ausgiebigen Gebrauch gemacht. Mehr im Sinne der Grafsmann'schen Darstellungen sind einige Veröffentlichungen des Herrn Caspary über die Bewegung des starren Systems gehalten. Jedenfalls scheint die Verwendung der Vectorrechnung in der Mechanik immer festeren Boden zu gewinnen, und insbesondere zeigen gerade die jüngeren Techniker, die schon durch ihre Beschäftigung mit der Maxwell'schen Theorie mit dem Vectorbegriff vertraut sind, diesen formalen Bestrebungen gegenüber eine offenbare Zuneigung. Erschwerend steht noch immer der Mangel an Einheitlichkeit in der Bezeichnung im Wege, aber vielleicht wird auch in diesem Punkte einmal die wünschenswerte Übereinstimmung erreicht. Ich sehe den Hauptwert der Vectoranalysis in dem Umstand, dafs sie uns zwingt, die Begriffe von Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und Moment in ihrer natürlichen Raumlage vorzustellen, und dafs sie die zufällige und oft nutzlose Zerlegung in Componenten fast ganz zu umgehen gestattet. Das Rechnen wird dadurch mehr zu anschaulichem Denken, was in der technischen Mechanik von ganz besonderer Bedeutung ist. Andererseits kann man Studirenden gegenüber nicht eindringlich genug vor der Auffassung warnen, welche in der Vectoranalysis ein eigentliches Werkzeug der mathematischen Untersuchung erblickt. Solche wirksame Hilfsmittel sind nur originelle, das unmittelbar vorliegende Problem erfassende Gedanken und niemals rein formale Algorithmen.

Analytische Methoden zur approximativen Integration der Differentialgleichungen sind zwar schon von Euler, Laplace u. a. gegeben worden, aber diese besafsen nicht den erforderlichen Näherungsgrad, um bei gröfseren Intervallen praktische Verwendung finden zu können. Diesen Anforderungen genügte erst eine dreigliedrige Näherungsformel, welche Herr Runge nach Analogie der Simpson-schen Regel aufgestellt und in den Math. Ann. Bd. 46 (1895) veröffentlicht hat. Sie gilt zunächst für die Integration der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

und gestattet, von einem gewissen Anfangswertpaar (x, y) ausgehend, für einen gegebenen Argumentzuwachs Δx, den zugehörigen Wert von Δy zu berechnen. Das Verfahren ist durch folgende Gleichungen gekennzeichnet:

$$\Delta y = \tfrac{1}{6}\{f(x, y) + 4f(x + \tfrac{1}{2}\Delta x, y + \tfrac{1}{2}f \cdot \Delta x) + f(x + \Delta x, \Delta' y)\}\Delta x,$$
$$\Delta' y = f(x + \Delta x,\ y + f \cdot \Delta x)\Delta x.$$

Der mittlere Interpolationswert hat also, wie bei der Simpson'schen Formel, das vierfache Gewicht der anderen. Die Übertragung auf Simultansysteme von Differentialgleichungen erster Ordnung, also auf die Bewegungsgleichungen eines Systems von einer endlichen Anzahl Freiheitsgraden, hat nicht die geringste Schwierigkeit. Hiermit ist auch zugleich der Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung erledigt.

Angeregt durch das Studium der Runge'schen Arbeit, habe ich den Versuch gemacht, den umfassenderen Gaufs'schen Quadraturgedanken in seiner Analogie auf das Gebiet der Differentialgleichungen zu übertragen, und es gelang mir, die Gesamtheit der Approximationsformeln für eine beliebige Näherungsordnung zu gewinnen (Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 45). Die Zahl der brauchbaren Formeln wurde dadurch — in theoretischem Sinne — eine unbeschränkte. In Wirklichkeit wird man über die Approximationen vierter Ordnung wohl kaum jemals hinausgehen, da die Genauigkeit derselben schon eine aufserordentlich grofse ist. Von den Näherungen zweiter Ordnung seien hier nur die folgenden angeführt:

$$\text{I)}\quad \Delta y = f\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y + \tfrac{1}{2} f \cdot \Delta x\right)\Delta x,$$

$$\text{II)}\quad \Delta y = \tfrac{1}{2}\left\{f(x, y) + f(x + \Delta x,\ y + f \cdot \Delta x)\right\}\Delta x,$$

$$\text{III)}\quad \Delta y = \tfrac{1}{2}\left\{f\left(x + \tfrac{1}{3}\Delta x, y + \tfrac{1}{3} f \cdot \Delta x\right) + f\left(x + \tfrac{2}{3}\Delta x, y + \tfrac{2}{3} f \cdot \Delta x\right)\right\}\Delta x,$$

welche, trotz ihrer verhältnismäfsig geringen Genauigkeit, in der Mechanik praktische Verwendung finden können. Unter den zweigliedrigen Formeln dritter Ordnung scheint die folgende am bequemsten zu sein:

$$\Delta y = \tfrac{1}{4}\left\{f(x, y) + 3 f\left(x + \tfrac{2}{3}\Delta x,\ y + \Delta' y\right)\right\}\Delta x,$$
$$\Delta' y = \tfrac{2}{3} f\left(x + \tfrac{1}{3}\Delta x,\ y + \tfrac{1}{3} f \cdot \Delta x\right)\Delta x.$$

Bemerken möchte ich hier noch, dafs auch die schöne Quadraturformel von Tchebycheff in der Theorie der Differentialgleichungen ihr Analogon besitzt.

50. *Tragweite der elementaren mathematischen Hilfsmittel.* Das Bestreben nach möglichster Vereinfachung der mathematischen Hilfsmittel hängt mit dem innersten Wesen der technischen Mechanik so eng zusammen, dafs alle Bemühungen, welche geeignet sind, in dieser Richtung Fortschritte zu erzielen, — sei es nun durch blofses Ausscheiden des Nutzlosen, oder sei es durch positive Schaffung neuer eigenartiger elementarer Methoden, — bei der unablässig wachsenden Bedeutung der Anwendungsgebiete, sicheren Beifall und weitere Förderung finden. Thatsächlich haben theoretisch gebildete Techniker fast immer eine ausgeprägte Neigung an den Tag gelegt, ihre Aufgaben mit den elementarsten mathematischen Mitteln zu lösen. In

neuerer Zeit ist namentlich John Perry in seinen Veröffentlichungen (Calculus for Engineers und Applied Mechanics, London 1899) in dieser Richtung mit ganz besonderer Energie vorgegangen, indem er mit einem ungewöhnlichen Geschick zeigt, wie man recht verwickelte Probleme der Maschinenmechanik und der Elektrotechnik mit grundsätzlicher Beschränkung auf die Elementarfunctionen x^n, e^{nx}, $\sin nx$ und $\cos nx$ behandeln kann. Er hat damit in England ohne Zweifel grofsen Beifall gefunden, und die nachfolgenden Worte aus seinen Applied Mechanics (S. 586) lassen deutlich genug erkennen, welche Stellung er zur modernen „akademischen" Mathematik einnimmt. „There seems to be as much absence of common sense now in academic persons as there was in the time of Erasmus. He the greatest scholar of the fifteenth century, wrote „They are a proud susceptible race. They will smother me under six hundred dogmas. They will call me heretic, and bring thunderbolts out of their arsenals, where they keep whole magazines of them for their enemies. Still they are Folly's servants, though they disown their mistress. They live in the third heaven, adoring their own persons, and disdaining the poor crawlers upon earth. They are surrounded by a bodyguard of definitions, conclusions, corollaries, propositions explicit and propositions implicit" —." Dieses herbe Urteil ist jedenfalls symptomatisch für die Stimmung, welche in den Kreisen wissenschaftlich hochgebildeter und leistungsfähiger Techniker zur Zeit herrscht, und es wäre von Seiten der Mathematiker unklug, die thatsächliche Situation einfach zu ignoriren oder sie durch fortgesetzte einseitige Betonung der hyperkritischen Speculationen, die zum Teil jegliche Berührung mit dem gesunden Boden der Wirklichkeit und der praktischen Anwendbarkeit verloren haben, noch weiter zu verschärfen. Erfreulicherweise ist namentlich in Deutschland und Frankreich unter der energischen Einwirkung hervorragender Mathematiker eine Bewegung veranlafst worden, welche die zweifellos vernachlässigte Fühlung zwischen Mathematik und wissenschaftlicher Technik wiederherzustellen und mit selbständigen Ideen neu zu beleben bemüht ist, andererseits aber auch bereit zu sein scheint, den bisherigen positiven mathematischen Errungenschaften — insofern sie in weiterem Sinne für die angewandten Wissenschaften in Betracht kommen — ihr natürliches Recht zu wahren, und dieselben gegen kurzsichtige Angriffe zu verteidigen.

In Wirklichkeit ist die Sachlage eine durchaus klare, wenn sie nur mit völliger Objectivität überblickt wird. So lange nämlich der Techniker entwerfend und praktisch construirend vorgeht oder bereits fertige theoretische Anschauungen für den Einzelfall benutzt, wird er immer mit den allerelementarsten mathematischen Mitteln auskommen und seine eigentliche geistige Thätigkeit vorwiegend in der Richtung des Combinirens und in geschickter Anpassung an die

mannigfachen und oft schwer zu erfüllenden Anforderungen der Praxis nach Maſsgabe seiner persönlichen Erfahrungen bethätigen. Diese Betriebsmathematik ist seit einem Jahrhundert ausgebildet und jedenfalls durch Euler in dem hier in Betracht kommenden Umfange abgeschlossen. Aber sobald die Notwendigkeit eintritt, umfassendere Probleme theoretisch durchzuarbeiten — wir haben hier in erster Linie die kinetischen im Auge —, die zugleich neue Gesichtspunkte für den Gang der experimentellen Forschung liefern sollen, wird in manchen Fällen eine lebendige Kenntnis der Ideen eines Lagrange, Gauſs oder Riemann entschieden förderlicher sein, als ein mühsames Herumsuchen in Integraltafeln und Ingenieurkalendern. Wir dürfen jedoch hierbei nicht vergessen, daſs gerade diese Schöpfer der modernen Mathematik der eigentlichen Technik ferngestanden haben, und daſs infolgedessen die Übersetzung ihrer genialen Ideen in die hausbackene Form, in der sie hier gebraucht werden, eine Aufgabe bildet, deren geschickte und zweckmäſsige Lösung durchaus nicht leicht ist. Nur Poncelet macht eine Ausnahme, da er auf beiden Gebieten gleich heimisch war. Von ihm haben wir die schöne Methode der Linearapproximationen, die es ermöglicht, ungefüge analytische Ausdrücke durch äuſserst einfache zu ersetzen, so daſs die Durchführung des betreffenden Problems ohne Anwendung transcendenter Functionen erfolgen kann. Im einfachsten Falle handelt es sich um die Darstellung:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \alpha a + \beta b + C.$$

Liegt $\frac{a}{b}$ zwischen den Grenzen k und ∞, so folgt

$$\alpha = \frac{2}{1 + \sqrt{2(1 + k^2) - 2k\sqrt{1 + k^2}}},$$

$$\beta = \frac{2(\sqrt{1 + k^2} - k)}{1 + \sqrt{2(1 + k^2) - 2k\sqrt{1 + k^2}}},$$

und der maximale Wert des Fehlers C ist $1 - \alpha$. Ist also überhaupt $a > b$, so wird

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}960\,a + 0{,}400\,b,$$

und der gröſste Wert des Fehlers C wird 0,040 (cf. Nr. 47).

Poncelet fügt noch die Bemerkung hinzu: „Diese Methode würde sich in gewissen Fällen sogar auch leicht auf eine Function einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen $a, b, c, d, \cdots$ anwenden lassen, wenn man sich auf ähnliche Betrachtungen stützte, wie die, durch welche Laplace und Fourier die Werte der unbekannten Gröſsen einer Reihe von Bedingungsgleichungen so bestimmt zu haben, daſs der gröſste der Fehler, abgesehen vom Vorzeichen, so klein als möglich wird. Denn die ganze Schwierigkeit besteht in jedem Falle darin, den analytischen Ausdruck der Fehlergrenzen zu finden und

sie dann ohne Rücksicht auf das Vorzeichen einander gleich zu setzen. Aus dem vorstehenden Beispiele kann man auch entnehmen, welche Mittel in jedem besonderen Falle angewendet werden müssen, und welche Vorteile dieses Verfahren in gewissen Fällen vor den gewöhnlichen Methoden, welche in der Entwickelung der Functionen in Reihen oder in Kettenbrüchen bestehen, gewähren kann (Méc. appl. dtsch. Bearb. 1. 287—88).

Allgemeiner kann man dem Anschlufsproblem für eine unabhängige Veränderliche die folgende Form geben: Es sollen zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ derart bestimmt werden, dafs die gegebene Function $F(x)$ durch den Ausdruck

$$F(x) = \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) + C(x)$$

innerhalb des Intervalls $k < x < h$ dargestellt wird und $C(x)$ gewissen Minimumeigenschaften genügt. Läfst man z. B. die Krümmung der Curve $y = \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)$ in einem passend gewählten Punkte mit derjenigen von $F(x)$ für $k < x < h$ und gleichzeitig die Tangentenrichtung in zwei umliegenden Punkten zusammenfallen, so erhält man schon recht brauchbare Näherungsformeln. Im Interesse der Anwendungen auf dynamische Probleme der Technik wären solche Untersuchungen, welche eine Fortführung des Poncelet'schen Grundgedankens im Auge haben, jedenfalls erwünscht, und es würde auf diesem Weg der Beweis geliefert, dafs die Mathematik recht wohl imstande ist, der Praxis die entsprechenden Hilfsmittel zu liefern. Reiches Material für derartige Bestrebungen liefern auch die genialen Untersuchungen Tchebycheff's, dessen gesammelte Werke jetzt im Erscheinen begriffen sind. Die beste allgemeine Richtschnur wird aber immer ein möglichst unbefangener Blick und sorgfältiges Fernhalten aller methodischen Pedanterie bleiben.

Der Fortgang der Zeit mufs zeigen, ob die Mathematik — bei ihrer jetzigen fast bis ins Ungemessene ausgeprägten Tendenz zur formalen Verallgemeinerung und zur Erreichung der äufsersten logischen Strenge — in ihren alten Wurzeln und ersten Zweigen noch hinreichende Vegetationskraft bewahrt hat, dafs aus diesem Grundstock neue Zweige in anderer Richtung herauswachsen können, die vielleicht weniger formvollendet sind und nicht in gleichem Mafse die Bedürfnisse des abstracten Denkens befriedigen, wie die bisherigen, aber um so mehr den praktischen Anforderungen in Bezug auf Einfachheit und unmittelbare Brauchbarkeit entsprechen werden. Ebenso bleibt abzuwarten, welche positiven Vorteile ein Zusammenwirken des Technikers und des Mathematikers für die gemeinsamen Grenzgebiete der von ihnen vertretenen Wissenschaften zeitigen wird. — Hoffen wir das Beste!

Sachregister.

Hervorgegangen aus dem seit Jahren empfundenen Bedürfnisse nach einem engeren wissenschaftlichen und persönlichen Zusammenschlufs der Fachgenossen, hat sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gebildet mit der Aufgabe: „in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem kollegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten".

Dementsprechend bringen die Jahresberichte u. a. über die geschäftlichen Angelegenheiten und über die auf den Jahresversammlungen gehaltenen Vorträge Berichte, ferner alljährlich ein Verzeichnis der Mitglieder mit genauer Adressenangabe, Nekrologe über die verstorbenen Mitglieder mit beigefügten Porträts und enthalten aufserdem gröfsere Referate über einzelne Zweige der gesamten mathematischen Wissenschaften. Diese Referate, welche den gegenwärtigen Stand unserer bez. Kenntnisse in historisch-kritischer Darstellung zusammenfassen, sind von anerkanntem wissenschaftlichen Werte; sie bieten jedem die Möglichkeit, einen Einblick in die geistigen Bestrebungen der Gegenwart zu gewinnen, wie ihn auch derjenige besitzen sollte, der durch seinen Beruf mehr oder weniger an der selbstthätigen Fortbildung der Wissenschaft gehindert ist.

In den bisher erschienenen Bänden [I. 1892. M 7.60; II. 1893. M 4.50; III. 1894. M 16.—; IV. 1897. M 16.—; V. 1897/98. M 7.20; VI. 1899. M 8.—; VII. 1899. M 12.80] kamen folgende gröfsere Referate zum Abdruck:

I: **W. Frz. Meyer:** Die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. 1892.
II: **Fr. Kötter:** Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. 1893.
III: **A. Brill und M. Noether:** Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. 1894.
III: **L. Henneberg:** Über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. 1894.
IV: **D. Hilbert:** Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. 1897.
V: **E. Kötter:** Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. 1898.
VI: **G. Bohlmann:** Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. 1899.
S. Finsterwalder: 1) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. 1899. 2) Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation. 1899.
VII: **E. Czuber:** Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. 1899.
VIII: **A. Schoenflies:** Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 1900.
IX. **K. Heun:** Über die kinetischen Probleme der wissenschaftl. Technik. 1900.

In Vorbereitung für die nächsten Bände befinden sich:

R. Haussner: Numerische Auflösung von Gleichungen.
A. Kneser: Bericht über die Variationsrechnung.
E. Kötter: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. Teil II.
G. Kowalewski, G. Scheffers, F. Schur: Referate über die Arbeitsgebiete von Sophus Lie.
R. Mehmke: Bericht über die graphischen Methoden.
Müller-Breslau: Über die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Bauconstructionen.
L. Schlesinger: Über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen.
A. Schoenflies: Über Curven- und Punktmannigfaltigkeiten. II.
P. Stäckel: Über die allgemeine Dynamik.
E. Steinitz: Bericht über die Theorie der endlichen Gruppen.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. gegen 500 Mitglieder. Diese erhalten obige Publikation bei direktem Bezuge von der Mathematiker-Vereinigung zu einem Vorzugspreise. Anmeldungen zur Mitgliedschaft nimmt Prof. Dr. **A. Gutzmer** in Jena, Wildstrafse 2, entgegen. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

